MATEMÁTICAS 2º ESO B y D

TEMA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES

Este documento trata de ser una ayuda para explicar y entender los contenidos del **tema 8** del libro de matemáticas, el cuál debes leer prestando especial atención a los recuadros marcados en amarillo en el mismo. Además, estableceré los ejercicios que debes hacer para fijar dichos contenidos. La explicación y los ejercicios siguen en todo momento el libro de matemáticas utilizado en clase.

Este tema ya habíamos empezado a verlo en clase, pero dadas las circunstancias es importante recordar los contenidos desde el principio.

Lo que aparece marcado en azul es importante estudiarlo.

Debes dedicarle un tiempo similar al empleado en clase para la materia.

Todos los ejercicios o anotaciones de teoría que hagas deben estar en el **cuaderno de la materia.** Recuerdo que es importante que hagas los ejercicios (no hay ningún problema sino salen bien a la primera, es lo normal) para que, una vez que tengas las soluciones, corregir los errores y aprender de los mismos.

1.- ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Una ecuación de primer grado con dos incógnitas expresa la relación existente entre dos valores desconocidos.

Las ecuaciones de primer grados con dos incógnitas se denominan **ecuaciones lineales.**

Una **solución de una ecuación lineal** es un **par de valores** que verifica la igualdad.

Una ecuación lineal tiene **infinitas soluciones.**

Ejemplo:
Un ejemplo de ecuación lineal es $x + y = 12$
Como observamos, tiene *dos incógnitas* e *infinitas soluciones.* Algunas soluciones son:
$x = 9, y = 3$ ya que $9 + 3 = 12$, con lo que se verifica la igualdad.
$x = 6, y = 6$ ya que $6 + 6 = 12$, con lo que se verifica la igualdad.
$x = -2, y = 14$ ya que $-2 + 14 = 12$, con lo que se verifica la igualdad.

Dada una ecuación con dos incógnitas, por ejemplo x e y, si queremos comprobar que dos valores de x e y son solución de dicha ecuación, solo hay que sustituir dichos valores y ver si se cumple la igualdad.

Ejemplo:
Sea la ecuación lineal $2x - y = 6$, queremos comprobar si $x = 4$ e $y = 2$ es una solución de la ecuación.

Sustituimos los valores de x e y en la ecuación: $2.4-2=8-2=6$, nos da 6, la igualdad se cumple, por lo que el par de valores $x=4$ e $y=2$ es una solución de la ecuación lineal dada.

Toda ecuación lineal puede escribirse en esta forma $\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{by}=\boldsymbol{c}$, donde a, b y c son valores conocidos. Esta forma se llama **forma general.** **(MUY IMPORTANTE)**

Repasa los ejercicios 1, 3 y 4 de la página 160 ya hechos en clase.

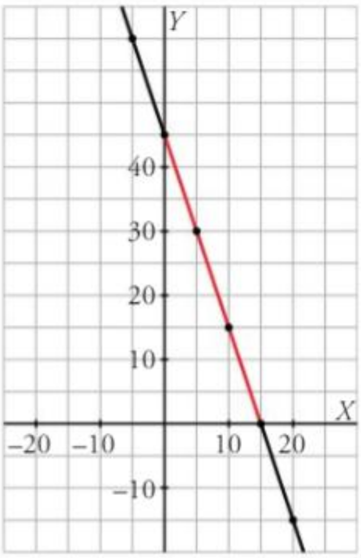
- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN LINEAL:

Para obtener distintas soluciones de una ecuación lineal, se suele despejar una de las incógnitas y dar valores a la otra. Los valores se recogen en una tabla.

Ejemplo:
Sea la ecuación lineal $3x+y=45$. Despejamos la incógnita y: $y=45-3x$
Dando valores a x obtenemos los correspondientes de y para completar esta tabla:
$x=0 \longrightarrow y=45-3.0=45$
$x=5 \longrightarrow y=45-3.5=45-15=30$
$x=10 \longrightarrow y=45-3.10=45-30=15$
$x=15 \longrightarrow y=45-3.15=0$
$x=20 \longrightarrow y=45-3.20=45-60=-15$
$x=-5 \longrightarrow y=45-3.(-5)=45+15=60$

x	0	5	10	15	20	–5	......
y	45	30	15	0	–15	60	....

Cada par de valores (x,y) es una solución de la ecuación lineal. Representamos estos valores en los ejes de coordenadas, quedando alineados en una recta.



Por tanto, podemos afirmar que:

- Cada ecuación lineal tiene una recta asociada en el plano.
- Cada punto de esa recta representa una de las infinitas soluciones de la ecuación lineal.

Debes repasar los ejercicios 5, 6 y 7 de la página 161 ya hechos en clase.

2.- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Dos ecuaciones lineales forman un **sistema:** $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

La **solución del sistema** es la solución común a ambas ecuaciones.

Es decir, dado un sistema de ecuaciones, podemos obtener la **solución** hallando las soluciones de cada una de las ecuaciones y tomando como **solución del sistema la que coincide.** A continuación vemos un ejemplo, si bien **no** vamos a resolver los sistemas de ecuaciones lineales de esta forma.

Ejemplo:

Sea el sistema de ecuaciones del que queremos obtener solución el siguiente:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

Calculamos la tabla de valores de cada una de las ecuaciones lineales, despejando en cada ecuación una de las incógnitas y dando valores a la otra incógnita:

$3x - y = 3 \longrightarrow y = 3x - 3$

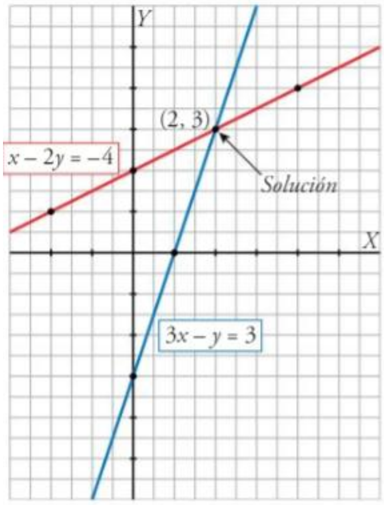
x	–1	0	1	2	3
y	–6	–3	0	3	6

$x - 2y = -4 \longrightarrow y = \frac{x+4}{2}$

x	–2	0	2	4	6
y	1	2	3	4	5

La **solución del sistema de ecuaciones** es el par de valores que coinciden, es decir, $x = 2$ e $y = 3$.

Si representamos las ecuaciones en un sistema de coordenadas tomando los puntos de las tablas de valores, obtenemos dos rectas que se cortan en un punto. Dicho punto es el (2,3), es decir, los valores que son solución del sistema de ecuaciones lineales.

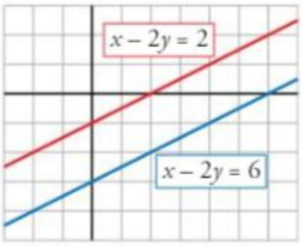


Por tanto, la solución de un sistema de ecuaciones lineales coincide con el punto de corte de las rectas asociadas a las ecuaciones.

- CASOS ESPECIALES:

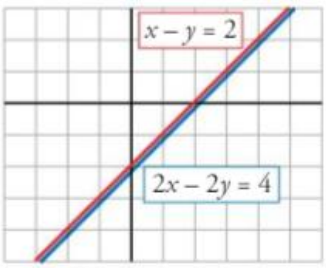
- **Sistemas sin solución:**
  Hay sistemas de ecuaciones lineales que no tienen solución, pues las **ecuaciones son incompatibles.** Cuando representamos las ecuaciones en un sistema de coordenadas obtenemos **dos rectas paralelas,** es decir, dos rectas que nunca se cortan, por lo que no hay ningún par de valores que sea solución de ambas ecuaciones.

  Por ejemplo: $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$



- **Sistemas con infinitas soluciones:**
  Otros sistemas de ecuaciones tienen **infinitas soluciones;** las ecuaciones son equivalentes y al representarlas en un sistema de coordenadas obtenemos **dos rectas que se superponen,** es decir, pasan por los mismos puntos.

  Por ejemplo: $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$



Haz el ejercicio 1 de la página 162.

3.- MÉTODOS PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

En el punto anterior hemos visto una forma de resolver sistemas de ecuaciones lineales, la cuál es lenta y laboriosa en ciertos casos. Por tanto, para resolver sistemas, no vamos a emplear la misma, sino **tres métodos** que veremos a continuación.

Los tres métodos siguen una línea común: obtener, a partir de dos ecuaciones dadas, otra ecuación con una sola incógnita. Resuelta esta, es fácil obtener el valor de la incógnita eliminada.

Es muy importante entender y emplear correctamente estos tres métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. **(MUY IMPORTANTE)**

- MÉTODO DE SUSTITUCIÓN:

Dado un sistema de ecuaciones lineales, se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y la expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación.

Ejemplo:
Resolver por sustitución este sistema: $\begin{cases} x + 4y = 1 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

a) Despejamos, por ejemplo, y en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} x + 4y = 1 \\ 2x - y = -7 \longrightarrow y = 2x + 7 \end{cases}$$

b) Sustituimos la expresión obtenida en la primera ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x + 4y = 1 \\ y = 2x + 7 \end{array}\right\} \longrightarrow x + 4\,.\,(2x + 7) = 1$$

c) Resolvemos la ecuación que hemos obtenido, la cual solo tiene una incógnita:

$$x + 4\,.\,(2x + 7) = 1 \longrightarrow x + 8x + 28 = 1 \longrightarrow 9x = -27 \longrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{-27}{9} = \mathbf{-3}$$

d) Sustituimos el valor de $x = -3$ en la expresión obtenida al principio al despejar y, y calculamos:

$$y = 2x + 7 \longrightarrow y = 2\,.\,(-3) + 7 \longrightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{1}$$

Por tanto, la solución del sistema es $\boldsymbol{x} = \mathbf{-3}$ e $\boldsymbol{y} = \mathbf{1}$.

Haz el ejercicio 1 de la página 163, y del ejercicio 2 de dicha página los apartados a) y b).

- MÉTODO DE IGUALACIÓN:

Dado un sistema, se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas.

Ejemplo:
Resolver por igualación este sistema: $\begin{cases} x + 4y = 1 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

a) Despejamos, por ejemplo, y en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 4y = 1 \longrightarrow y = \frac{1-x}{4} \\ 2x - y = -7 \longrightarrow y = 2x + 7 \end{cases}$$

b) Igualamos las dos expresiones obtenidas para y:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1-x}{4} \\ y = 2x + 7 \end{array}\right\} \longrightarrow \frac{1-x}{4} = 2x + 7$$

c) Resolvemos la ecuación que hemos obtenido, la cual solo tiene una incógnita:

$$\frac{1-x}{4} = 2x + 7 \longrightarrow 1 - x = 4\,.\,(2x + 7) \longrightarrow 1 - x = 8x + 28 \longrightarrow -x - 8x = 28 - 1 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow -9x = 27 \longrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{27}}{\mathbf{-9}} = \mathbf{-3}$$

d) Sustituimos el valor de $x = -3$ en cualesquiera de las expresiones obtenidas al principio al despejar y, y calculamos:

$$y = \frac{1-x}{4} \longrightarrow y = \frac{1-(-3)}{4} \longrightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{1}$$

Por tanto, la solución del sistema es $\boldsymbol{x} = \mathbf{-3}$ e $\boldsymbol{y} = \mathbf{1}$**.**

Haz el ejercicio 3 de la página 164, y del ejercicio 4 de dicha página los apartados a) y b).

- MÉTODO DE REDUCCIÓN:

Dado un sistema, se pasan las ecuaciones a la **forma general,** y después se multiplican por los números adecuados para que los coeficientes de una de las incógnitas sean **opuestos.**

Al pasar miembro a miembro las ecuaciones, dicha incógnita desaparece.

Ejemplo:
Resolver por reducción este sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$

a) Multiplicamos la segunda ecuación por +3 para que los coeficientes de la incógnita y sean opuestos (+3 y −3):

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=8 \\ 4x-y=2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x+3y=8 \\ 12x-3y=6 \end{array}\right\}$$

b) Ahora, sumando miembro a miembro, obtenemos una ecuación con una sola incógnita (y):

$$\begin{array}{r} 2x+3y=8 \\ 12x-3y=6 \\ \hline 14x \quad\quad =14 \end{array}$$

c) Resolvemos la ecuación obtenida:

$14x=14 \longrightarrow x=\frac{14}{14} \longrightarrow \boldsymbol{x=1}$

d) Sustituimos el valor de $x=1$ en cualesquiera de las ecuaciones iniciales:

$4x-y=2 \longrightarrow 4\,.\,1-y=2 \longrightarrow 4-y=2 \longrightarrow 4-2=y \longrightarrow y=2$

Por tanto, la solución del sistema es $\boldsymbol{x=1}$ e $\boldsymbol{y=2.}$

Si todavía tienes alguna duda sobre la aplicación de estos métodos de resolución de sistemas puedes ver estos vídeos educativos en las siguientes direcciones web:

- https://www.youtube.com/watch?v=h9q5rLcW73Y
- https://www.youtube.com/watch?v=IBsJAFUpV2c
- https://www.youtube.com/watch?v=hIYhtq8e8jA

Haz los ejercicios 5 y 6 de la página 165, y del ejercicio 7 de dicha página los apartados a) y b).

4.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON AYUDA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

Los sistemas de ecuaciones suponen una potente herramienta para resolver problemas.

A continuación figuran algunos ejemplos de problemas resueltos con sistemas a modo de modelo, los cuales es importante entender y saber resolver.

Ejemplo:

Juan, en el balancín, se equilibra con María, que lleva una bolsa de 2 kilos y juntos, sin la bolsa, se equilibran con su madre, que pesa 72 kilos. ¿Cuánto pesa cada uno?

a) Identifica los elementos del problema y codifícalos algebraicamente:

Peso de Juan: x

Peso de María: y

b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre estos elementos:
Juan pesa 2 kilos más que María (ya que cuando María tiene la bolsa el balancín está equilibrado): $x = y + 2$
Juan y María, juntos, pesan 72 kilos: $x + y = 72$

c) Resuelve el sistema (por alguno de los métodos aprendidos anteriormente): en este caso aplicamos el método de sustitución, ya que tenemos x despejada en la primera ecuación y solo tenemos que sustituir dicha incógnita en la segunda ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 2 \\ x + y = 72 \end{array}\right\} \longrightarrow y + 2 + y = 72 \longrightarrow 2y = 70 \longrightarrow y = \frac{70}{2} \longrightarrow \boldsymbol{y = 35}$$

$$x = y + 2 \longrightarrow x = 35 + 2 \longrightarrow \boldsymbol{x = 37}$$

d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala:
Solución: x era el peso de Juan e y el peso de María, por lo que Juan pesa 37 kg, y María, 35 kg.
Comprobación: solo tenemos que sustituir los valores obtenidos en las ecuaciones y ver que se cumplen las igualdades.
$x = y + 2 \longrightarrow 37 = 35 + 2$
$x + y = 72 \longrightarrow 37 + 35 = 72$

Haz los ejercicios 1 y 2 de la página 16.

Ejemplo:
La semana pasada, dos entradas para el cine y una caja de palomitas nos costaron 10 €.
Hoy, por cuatro entradas para el cine y tres cajas de palomitas hemos pagado 22 €. ¿Cuánto cuesta una entrada? ¿Y una caja de palomitas?

a) Identifica los elementos del problema y codifícalos algebraicamente:
Precio de una entrada para el cine: x
Precio de una caja de palomitas: y

b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre estos elementos:
Dos entradas y una caja de palomitas nos costaron 10 €: $2x + y = 10$
Cuatro entradas y tres cajas de palomitas nos han costado 22 €: $4x + 3y = 22$

c) Resuelve el sistema (por alguno de los métodos aprendidos anteriormente): en este caso aplicamos el método de reducción, multiplicando la primera ecuación por -3:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 10 \\ 4x + 3y = 22 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow -6x - 3y = -30 \\ \longrightarrow \underline{\quad 4x + 3y = 22 \quad} \\ \qquad -2x \qquad = -8 \longrightarrow \boldsymbol{x = 4} \end{array}$$

$4x + 3y = 22 \longrightarrow 4\,.\,4 + 3y = 22 \longrightarrow 3y = 22 - 16 \longrightarrow 3y = 6 \longrightarrow \boldsymbol{y = 2}$

d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala:
Solución: hemos denominado x al precio de una entrada de cine e y al precio de una caja de palomitas, por lo que una entrada de cine cuesta 4 €, y una caja de palomitas, 2 €.
Comprobación: solo tenemos que sustituir los valores obtenidos en las ecuaciones y ver que se cumplen las igualdades.
$2x + y = 10 \longrightarrow 2\,.\,4 + 2 = 10$
$4x + 3y = 22 \longrightarrow 4\,.\,4 + 3\,.\,2 = 22$

Haz los ejercicios 3 y 4 de la página 167.

Ejemplo:
¿Qué cantidades de oro, a 8 €/gramo, y de plata, a 1,70 €/gramo, se necesitan para obtener 1 kg de aleación que resulte a 4,22 €/gramo?

a) Identifica los elementos del problema y codifícalos algebraicamente:
(Recuerda que 1 kg=1 000 g)
En este tipo de problemas es conveniente hacer una tabla como esta.

	Cantidad (g)	Precio (€/g)	Coste (€/g)
Oro	x	8	8 . x
Plata	y	1,7	1,7 . y
Aleación	1 000	4,22	4,22 . 1 000

b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre estos elementos:

Cantidades de oro y plata: $x + y$; $1\,000$ $\longrightarrow$ $x + y = 1\,000$

Coste de la aleación: $8x + 1{,}7y$; $4{,}22\,.\,1\,000$ $\longrightarrow$ $8x + 1{,}7y = 4\,220$

c) Resuelve el sistema (por alguno de los métodos aprendidos anteriormente): en este caso aplicamos el método de sustitución, despejando y en la primera ecuación y sustituyendo dicha incógnita en la segunda ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1\,000 \\ 8x + 1{,}7y = 4\,220 \end{array}\right\} \longrightarrow y = 1\,000 - x$$

$8x + 1{,}7\,.\,(1\,000 - x) = 4\,220 \longrightarrow 8x + 1\,700 - 1{,}7x = 4\,220 \longrightarrow$

$\longrightarrow 8x - 1{,}7x = 4\,220 - 1\,700 \longrightarrow 6{,}3x = 2\,520 \longrightarrow x = \frac{2\,520}{6{,}3} \longrightarrow \boldsymbol{x = 400}$

$x + y = 1\,000 \longrightarrow y = 1\,000 - 400 \longrightarrow \boldsymbol{y = 600}$

d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala:
Solución: hemos denominado x a la cantidad de oro e y a la cantidad de plata, por lo que se necesitan 400 g de oro y 600 g de plata.
Comprobación: solo tenemos que sustituir los valores obtenidos en las ecuaciones y ver que se cumplen las igualdades.

$x + y = 1\,000 \longrightarrow 400 + 600 = 1\,000$

$8x + 1{,}7y = 4\,220 \longrightarrow 8\,.\,400 + 1{,}7\,.\,600 = 3\,200 + 1\,020 = 4\,220$

Haz el ejercicio 6 de la página 168.

Ejemplo:
El perímetro de un rectángulo mide 50 cm, y el área, 150 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

a) Identifica los elementos del problema y codifícalos algebraicamente:
Largo: x
Ancho: y

b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre estos elementos: el perímetro es la suma de todos los lados, y el área se calcula multiplicando el largo del rectángulo por el ancho del mismo.
Perímetro: $2x + 2y = 50$
Área: $x\,.\,y = 150$
En este caso, la segunda ecuación del sistema no es lineal, ya que no es una ecuación de primer grado sino de segundo grado, como vimos en el tema 6 de Álgebra (recordad que al haber una multiplicación de dos incógnitas se suman los exponentes)

c) Resuelve el sistema (por alguno de los métodos aprendidos anteriormente): en este caso aplicamos el método de sustitución después de dividir la primera ecuación entre 2 para simplificarla.

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 50 \\ x\,.\,y = 150 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ x\,.\,y = 150 \end{array}\right\} \longrightarrow x = 25 - y$$

$$(25 - y).\,y = 150 \longrightarrow 25y - y^2 = 150 \longrightarrow y^2 - 25y + 150 = 0$$

Llegamos a una ecuación de segundo grado que resolvemos como hemos aprendido en el tema anterior.

$y^2 - 25y + 150 = 0$

$$y = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4\,.\,1\,.\,150}}{2\,.\,1} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{25 \pm 5}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{25+5}{2} = \frac{30}{2} = 15 \\ \frac{25-5}{2} = \frac{20}{2} = 10 \end{cases}$$

Soluciones del sistema

$y = 15 \longrightarrow x = 25 - 15 \longrightarrow x = 10$

$y = 10 \longrightarrow x = 25 - 10 \longrightarrow x = 15$

Ambas soluciones son conjugadas y nos dan una única solución del problema.

d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala:
Solución: los lados del rectángulo miden 15 cm de largo y 10 cm de ancho.
Comprobación: solo tenemos que sustituir los valores obtenidos en las ecuaciones y ver que se cumplen las igualdades.
Perímetro: $2x + 2y = 50 \longrightarrow 2\,.\,15 + 2\,.\,10 = 30 + 20 = 50$
Área: $x\,.\,y = 150 \longrightarrow 15\,.\,10 = 150$

Haz los ejercicios 8 y 9 de la página 169.

Ahora solo queda hacer ejercicios para poner en práctica y consolidar los contenidos aprendidos. Para ello, debes hacer, en la medida de lo posible, los siguientes ejercicios:

- Ejercicios 1, 3, 4 y 5 de la página 170.
- Ejercicios 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 20 y 24 la página 171.
- Ejercicios 25, 27 y 30 de la página 172.

Estos ejercicios son opcionales, es decir, para hacer a modo de pasatiempo:

- Ejercicios 6 y 8 de la página 170.
- Ejercicios 14, 15, 19, 21, 22 y 23 de la página 171.
- Ejercicios 26, 28, 31 y 32 de la página 172.