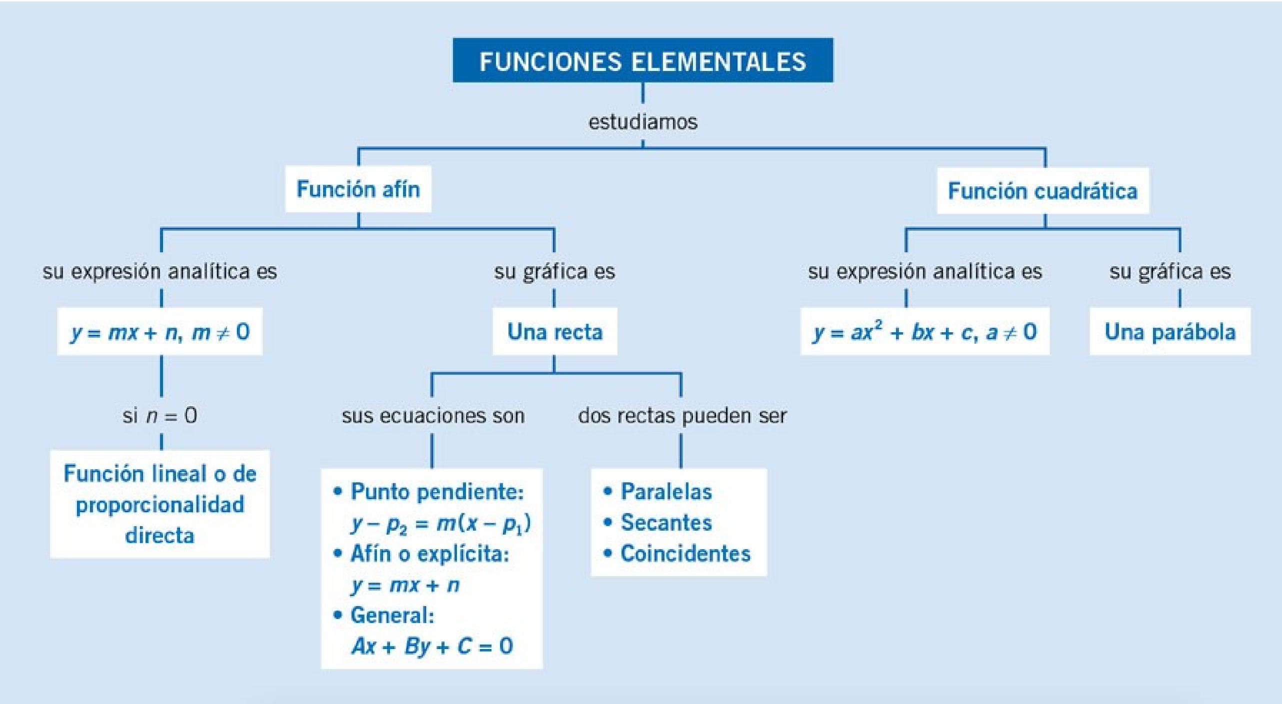
TEMA 11. Funciones elementales:



1. **Función de proporcionalidad directa (o función lineal)**

Recuerda que dos variables son directamente proporcionales si xu cociente es constante. El cociente se denomina constante de la proporción: $\frac{y}{x} = m$.

Así la función que relaciona dos variables directamente proporcionales se llama función de proporción directa o función lineal. Y tiene por fórmula:

$$\boxed{y = mx \iff f(x) = mx}$$

Pues bien, la gráfica de este tipo de funciones son **rectas que pasan por el origen de coordenadas**. Y la constante de la proporción *m* es la pendiente de la recta (que indica la variación en altura con respecto a la variación horizontal). Si *m >0* , pendiente positiva, la función es creciente, y si *m < 0*, pendiente negativa, la función es decreciente.
(Si *m = 0*, no será función de proporción directa, este caso se trata de la función constante *y = 0, que es una recta horizontal: Eje X*)

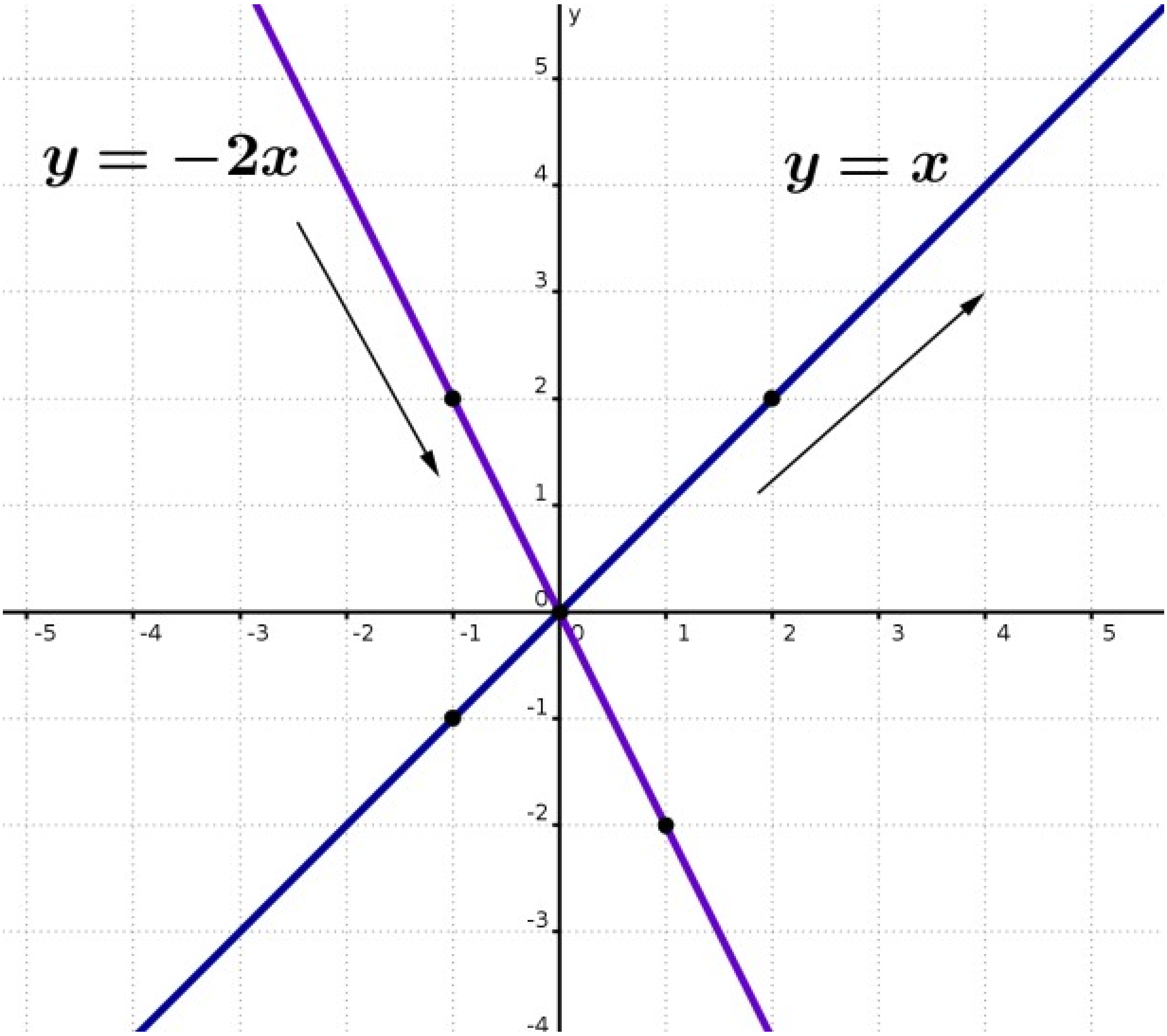
Ejemplo:

$y = -2x$, hacemos una tabla de valores para representar su gráfica, pendiente: $m = -2$

x	$y = -2x$
0	0
1	- 2

$y = x$, hacemos una tabla de valores para representar su gráfica,pendiente $m = 1$

x	$y = x$
0	0
2	2



1. Representa las funciones de proporcionalidad siguientes: (indicando cuales son crecientes y cuales decrecientes)

a) $y = 2x$ c) $y = -\frac{x}{2}$

b) $y = 3x$ d) $y = -3x$

2. De una función de proporcionalidad sabemos que $f(2) = 7$, Calcula su fórmula, y los valores $f(4)$, $f(5)$ y haz la gráfica.

3. La gráfica de una función de proporcionalidad pasa por el punto $P(-2, 5)$. Calcula la constante de proporcionalidad y haz la gráfica de la función.

4. La velocidad de una persona que camina a buen ritmo es de unos 4 km/h, suponiendo que siempre camina a esa velocidad, obtener una tabla de valores y representar la función.
(*distancia (y km) - tiempo (x horas)*)

2. Función afín.

La función afín o función polinómica de 1º grado, es la que tiene por fórmula:

$$\boxed{y = mx + n \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = mx + n}$$

Su **gráfica es una recta, que corta al eje Y (de ordenadas), en el punto *(o, n),***
así, tenemos que el coeficiente del término de primer grado: ***m es la pendiente de la recta,*** *y el coefiente de grado 0, (el término independiente)* ***n, es el valor de la ordenada en el origen*** (es decir a que altura corta la recta al eje Y)

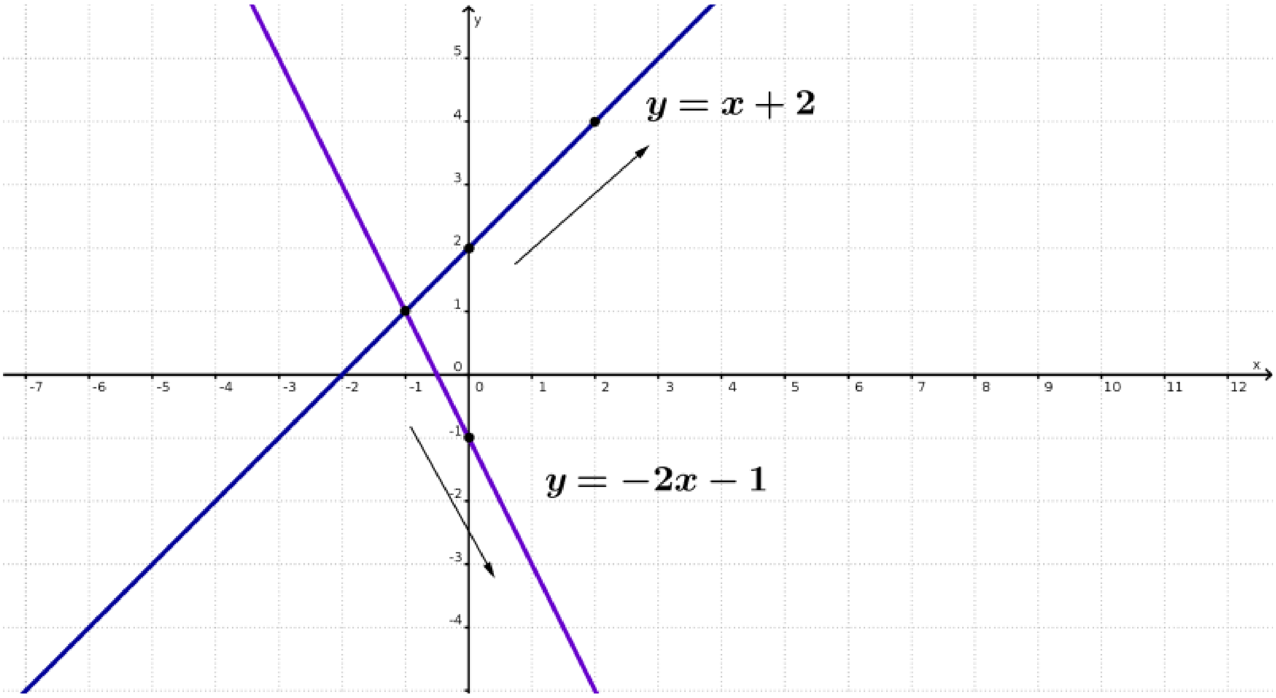
Ejemplo:

$y = -2x - 1$, hacemos una tabla de valores para representar su gráfica,
pendiente: $m = -2$

x	$y = -2x - 1$
0	- 1
- 1	1

$y = x + 2$, hacemos una tabla de valores para representar su gráfica,
pendiente $m = 1$

x	$y = x + 2$
0	2
2	4



5. Representa las funciones afines siguientes: (¿Cuáles tendrán rectas paralelas?)

a) $y = 2x - 1$

b) $y = 2x + 5$

c) $y = -\frac{x}{2} + 2$

d) $y = -\frac{x}{2} - 2$

6. Representa graficamente las funciones afines:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

c) $y = -\frac{3x}{2} + 2$

b) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$

d) $y = -\frac{3x}{4} - 1$

7. De una función afín sabemos que pasa por el punto (0 , - 3) y que tiene una pendiente de -4. ¿Cuál es la fórmula de la función?

8. Representa una función afín que tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y ordenada en el origen de $\frac{1}{4}$

9. Compara las gráficas de las funciones siguientes y di que ves:

a) $f(x) = \frac{3}{2}x + 1$

c) $y = \frac{3x}{2}$

b) $f(x) = \frac{3}{2}x - 1$

d) $y = \frac{3x}{2} + 3$

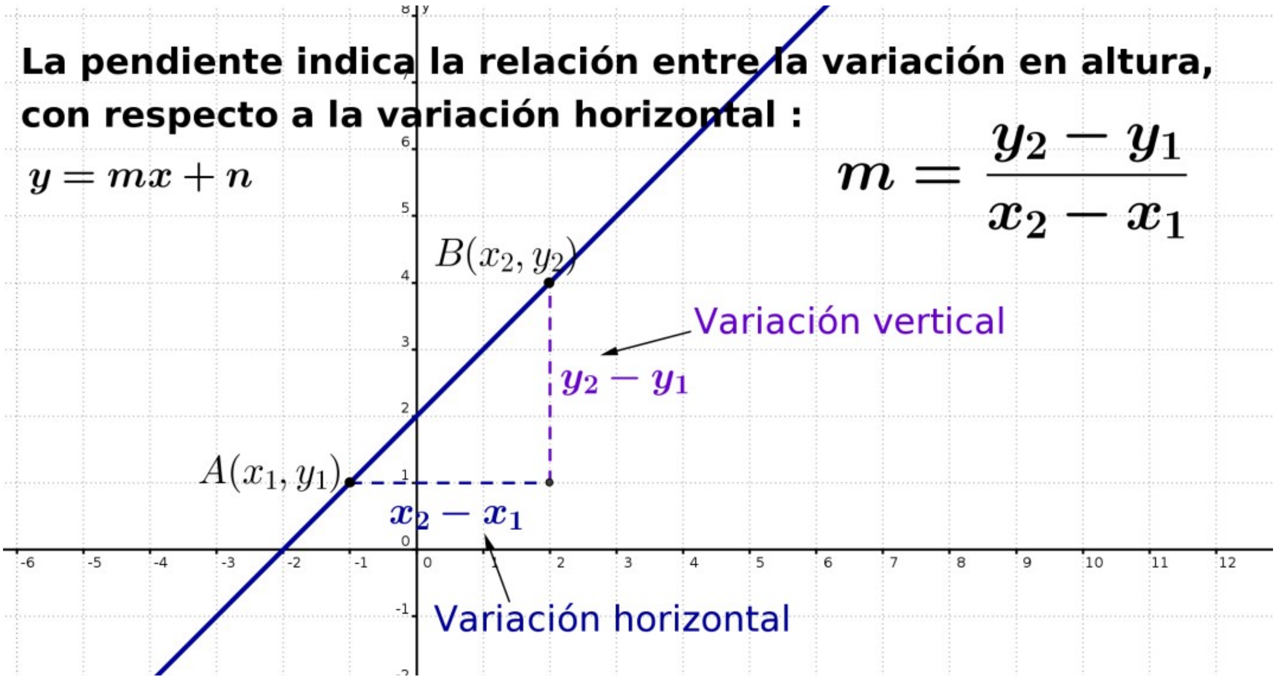
Conclusión:

Dos rectas son paralelas cuando ...

10. Calcula la pendiente de una recta que pasa por los puntos (2 , 5) y (4, 9)

Pendiente de la recta que pasa por dos puntos: $A(x_1 , y_1)$ y $B(x_2 , y_2)$

$$m = \frac{\text{variación en altura}}{\text{variación horizontal}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



11. Calcula los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las funciones:

a) $f(x)=2x+2$

b) $f(x)=\frac{3}{2}x-1$

c) $y=3x-5$

d) $y=-\frac{5x}{4}+2$

12. La gráfica de una función polinómica de primer grado pasa por los puntos (0, 2) y (-5 , 0). ¿Cuál es la fórmula de la función?

13. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1, 3) y (3, 6).

14. Una recta tiene con pendiente 2 y pasa por el punto (2 , - 4). Calcula su ecuación.

15. Calcula la ecuación de la recta paralela a la recta $y=-2x+3$ que pasa por el punto (-1 , 4).

16. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-1, 3) y (2, 3). ¿Cómo es la gráfica de la recta?

17. Una recta pasa por los puntos (3, 0) y (0, 5). ¿Cuánto vale su pendiente?

18. Calcula la ecuación de la recta paralela a la del ejercicio 17, que pasa por (0, -3).

Formas explícita e implícita de una recta:
- La ecuación general explícita de una recta es: $y=mx+n$

- La ecuación general implícita de una recta es: $ax+by+c=0$

19. Dadas las siguientes rectas, obtener la forma explícita y representar sus gráficas:

a) $2x+y=-1$

b) $3x+2y=0$

c) $2x-5y=-1$

d) $3y-5=0$

20. Si dos rectas tienen la misma pendiente, ¿cómo son sus gráficas?

21. Escribe en forma implícita las rectas siguientes:

a) $y=-2x+1$

b) $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$

c) $y=2x$

d) $y=\frac{3}{4}$

22. Halla la ecuación de la recta paralela a $2x+y=-1$ que pasa por el punto (2, 6).

Interpretación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales. (2x2)

Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es equivalente a hallar el punto de corte de las dos rectas, que forman el sistema. (cada ecuación del sistema es una recta)

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'\,x + b'\,y = c' \end{cases}$$

Ejemplo:

Resolver graficamente el sistema: $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y = -2 \end{cases}$

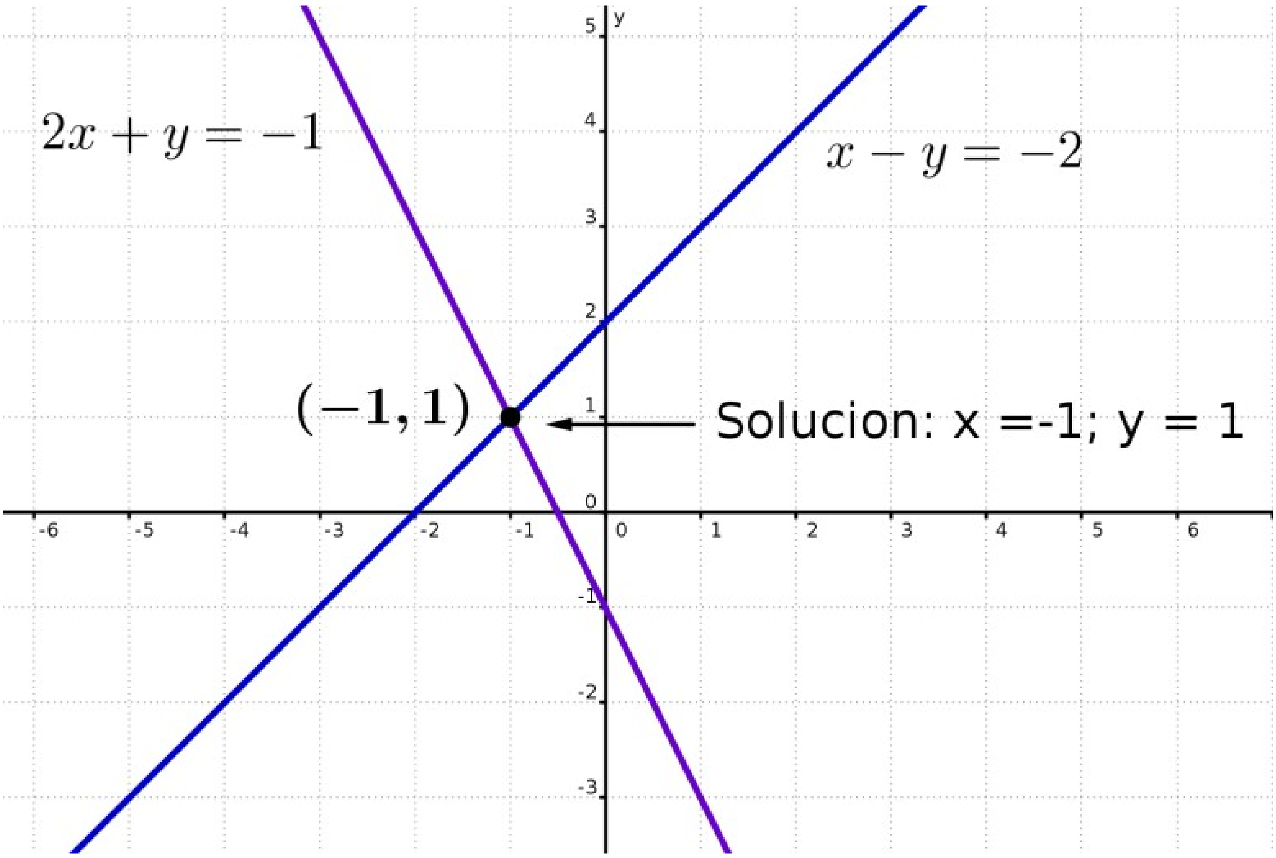
Representamos cada una de las rectas:

$y = -2x - 1$, hacemos una tabla de valores para representar su gráfica,

x	$y = -2x - 1$
0	- 1
- 1	1

$y = x + 2$, hacemos una tabla de valores para representar su gráfica,

x	$y = x + 2$
0	2
-1	1



23. Resuelve graficamente los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x+y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-6y=-2 \\ 6x+2y=8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-3y=-7 \\ x+y=4 \end{cases}$

24. Propón un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que tenga por solución (3, 2), y represéntalo graficamente.

Posición relativa de dos rectas. $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

El estudio de la posición relativa de dos rectas en el plano, es equivalente al estudio de las soluciones del sistema formado por esas dos rectas, tenemos tres casos:

- **Sistema compatible determinado,** el sistema tiene **una única solución,** es decir, las rectas se cortan en un sólo punto, por tanto, las rectas son **secantes.**

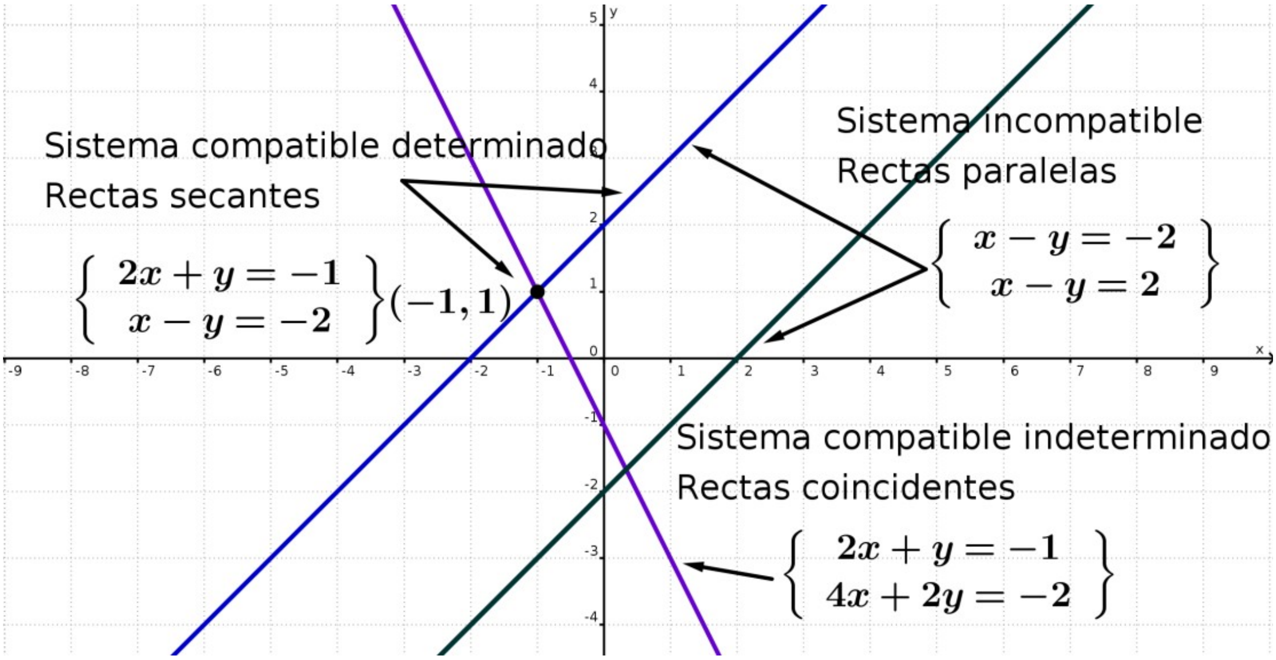
$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ (las ecuaciones no son proporcionales)

- **Sistema compatible indeterminado,** el sistema tiene **infinitas soluciones**, es decir, las dos rectas **son coincidentes**. (Una ecuación es múltiplo de la otra)

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (todos los coeficientes son proporcionales)

- **Sistema incompatible,** el sistema no tiene solución, es decir, las rectas **son paralelas** (distintas)

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ (los términos independientes **no** son proporcionales)



25. Indica cuál es la posición relativa de los pares de rectas siguientes:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 1{,}5x + 2y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ -4x + 6y = 14 \end{cases}$

26. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 4y = -3 \\ -x + ky = 1{,}5 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones calcula *k.*

27. Halla el valor de la constante *k* para que los sistemas siguientes se interpreten como dos rectas coincidentes:

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 8 \\ kx - 4y = k+5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 5y = 6 \\ -4x + ky = -12 \end{cases}$

28. Dada la ecuación $2x - y = 4$, se pide:
a) Dar otra ecuación para obtener un sistema sin solución.
b) Dar otra ecuación de forma que el sistema tenga infinitas soluciones.

29. Considera el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ ax + 2y = 4 \end{cases}$, sabiendo que la solución es (2, -1), calcula el valor de *a*, e ionterpreta gráficamente el sistema.

Las funciones cuadráticas. Función polinómica de 2º grado. Las parábolas.

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c \iff f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Son las funciones cuya fórmula es un polinomio de segundo grado, recuerda que
el término cuadrático es ax^2 ($a \neq 0$ coeficiente principal, **no puede ser = 0, pues de serlo no sería un polinomio de grado 2**), bx es el término lineal, y *c* es el término independiente. (*a*, *b*, *c se denominan coeficientes*). Su gráfica es una parábola.

Estudio de las características de una función cuadrática.

Para dar la gráfica de las parábolas seguimos los siguientes pasos:
1º paso: Identificamos la forma de la parábola: El signo del coeficiente principal, indica la forma de la parábola,
si $a < 0$ $\cap$ (abierta cara abajo: convexa); si $a > 0$ $\cup$ (abierta cara arriba, cóncava)
2º paso: Buscamos las coordenadas del **vértice:** $V(x_v\ ,\ y_v)$

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad ; \quad y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$$ (es el máximo o el mínimo, según la forma de la parábola)

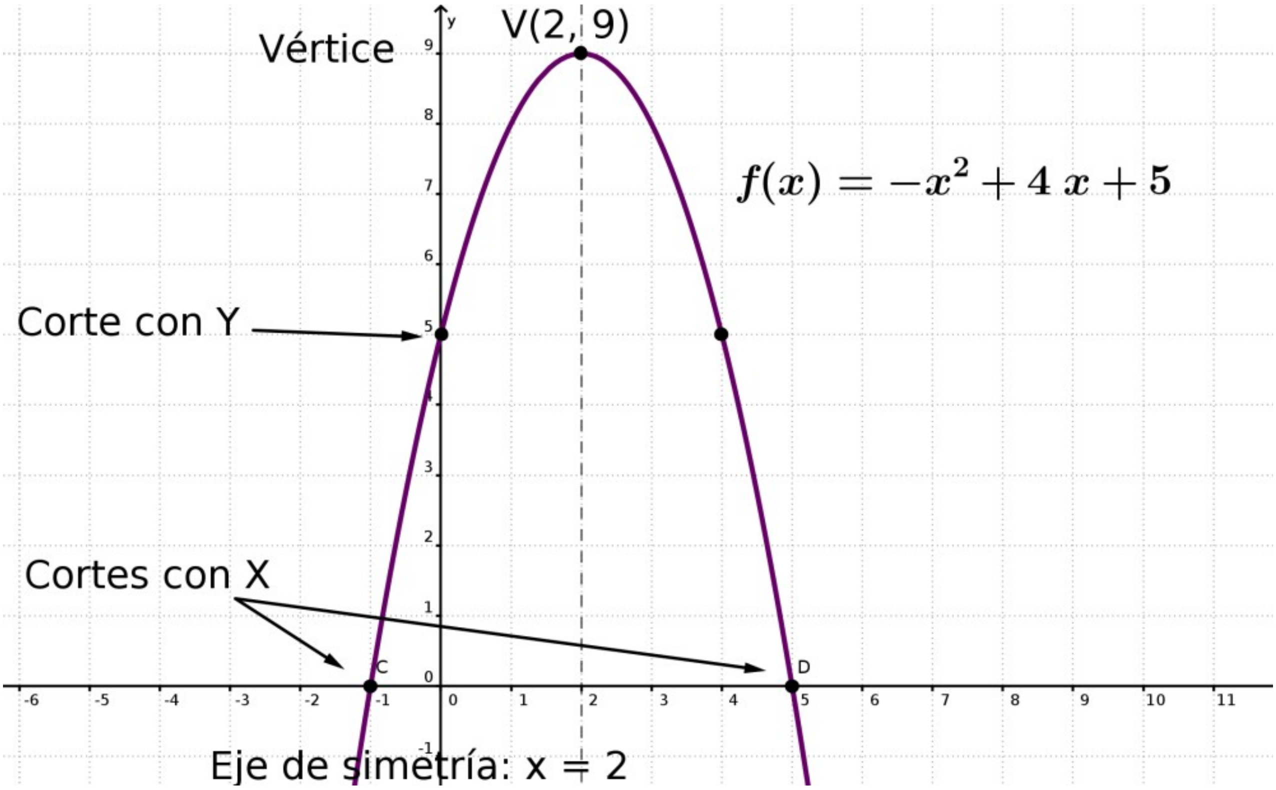
3º paso: Corte con los ejes:

- Corte con el eje Y: estamos en el eje vertical cuando: **x = 0,** entonces: y = c, esto es: **(0, c)**

- Corte con el eje X: estamos en el eje horizontal, cuando: **y = 0,** entonces se trata de resolver la ecuación: $a x^2 + b x + c = 0$.
Si tiene dos soluciones, tenemos los puntos de la gráfica (x_1 , 0) y (x_2 , 0) .

4º paso: Construir la gráfica. Si fuera necesario construimos algunos puntos más con una tabla de valores.
Nota: La recta vertical que pasa por la coordenada x, del vértice es el eje de simetría de la parábola.

Ejemplo resuelto: Representa la parábola: $f(x) = -x^2 + 4x + 5$



1º paso: Identificamos la forma de la parábola: $a = -1 < 0 \; \cap$ abierta cara abajo. así sabemos que **el vértice es un máximo** de la función.

2º paso: Buscamos las coordenadas del vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$$, entonces

la coordenada y del vértice $y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(2) = -4 + 8 + 5 = 9$, es decir: **V(2, 9).**

3º paso: Corte con los ejes:

- Corte con el eje Y: estamos en el eje vertical cuando: **x = 0,** entonces: y = 5, esto es: **(0,5)**

- Corte con el eje X: estamos en el eje horizontal, cuando: **y = 0,** entonces se trata de resolver la ecuación:

$$0 = -x^2 + 4x + 5 \iff x_1 = -1,\ x_2 = 5$$

En consecuencia, tenemos los puntos **(-1, 0)** y **(5, 0)**

En caso de querer mayor precisión haremos tabla de valores:

x	**y**
-1	0
0	5
2	9
4	5
5	0

30. Calcula el vértice de las siguientes parábolas, e indica si se trata de un máximo o un mínimo de la función.

a) $f(x) = x^2 + x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

c) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

d) $f(x) = -x^2 + 8x + 1$

d) $f(x) = -x^2 + 3x$

e) $f(x) = 5x - x^2$

31. Calcula los puntos de corte de las funciones siguientes con los ejes de coordenadas:

a) $f(x) = -x^2 + 3x$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$

c) $f(x) = x^2 - 9$

d) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

d) $f(x) = -x^2 + 3x$

e) $f(x) = x^2 - 25$

32. Representa las siguientes funciones cuadráticas, obteniendo las características principales (es decir, seguir los pasos como en el ejemplo resuelto)

a) $f(x) = -x^2 + 4x$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

c) $f(x) = x^2 + 4x$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

e) $f(x) = -x^2 + 3x$

f) $f(x) = x^2 - 9$

g) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

h) $f(x) = -x^2 + 4x + 9$

i) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$

j) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$