5. Integrales por partes

Cuando nos encontremos con la **integral de un producto de funciones** (o división de funciones que podemos usarlas como producto), deberemos pensar en resolver dicha integral aplicando el **método de integración por partes**.

* Recuerda que debemos descartar, en primer lugar, la posibilidad de que sea inmediata.

Veamos qué tipo de producto de funciones pueden resolverse mediante este método:

Producto de funciones a las cuales podemos aplicar integración por partes	
Tipo I	$\int \text{polinomio} \cdot \text{seno o coseno} \cdot dx$
Tipo II	$\int \text{polinomio} \cdot \text{f exponencial} \cdot dx$
Tipo III	$\int \text{polinomio} \cdot \text{logaritmo} \cdot dx$
Tipo IV	$\int \text{polinomio} \cdot \text{arcos} \cdot dx$
Tipo V	$\int \text{f exponencial} \cdot \text{seno o coseno} \cdot dx \rightarrow$ **Ciclicas**

Para resolver estas integrales de producto de funciones, usaremos la siguiente formula:

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

"Un día vi una vaca sin rabo vestida de uniforme"	¡¡Regla nemotécnica!!

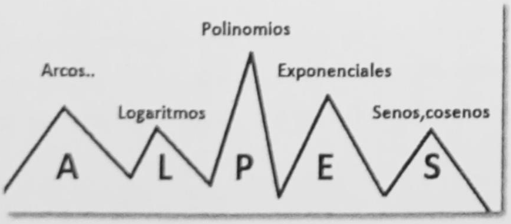
- Para poder aplicar la fórmula, antes debemos:

1) identificar quién va a ser $\underline{u}$ y quién va a ser $\underline{dv}$

Elegimos como $\underline{u}$ a la función que aparezca primero en el siguiente orden de prioridad:

Arcos → Logaritmos → Polinomios → Exponenciales → Senos, cosenos

Y la función que aparezca después en dicho orden, será $\underline{dv}$ (¡¡Importante!! $\underline{dv}$ **incluye a** $\underline{dx}$)



¡¡Regla nemotécnica!!
Relacionando la palabra "ALPES" con las iniciales de las funciones, elegimos como $\underline{u}$ a aquella función del integrando que aparezca primero en esta palabra y la otra será $\underline{dv}$

$a) \int (x+2)\cos x \; dx$ — **Integración por partes** Orden: "ALPES" → $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$\int$ **polinomio · coseno ·** dx

$\boxed{u = (x+2)}$ $\boxed{dv = \cos x \; dx}$

- Determinamos ***du*** calculando la **derivada** de $u = (x+2)$

$\boxed{du = 1\, dx}$ (Ponemos dx al final ya que estamos derivando respecto de x)

- Determinamos $\underline{v}$ calculando la **integral** de $dv = \cos x \; dx$

$\boxed{v = sen\, x} + C$ (La constante C la omitiremos en la fórmula ya que la pondremos al final)

Ya podemos aplicar la fórmula y resolver:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

"Un día vi una vaca sin rabo vestida de uniforme"

$$\int \boxed{(x+2)} \cdot \boxed{\cos x \; dx} = \boxed{(x+2)} \cdot \boxed{sen\, x} - \int \boxed{sen\, x} \cdot \boxed{1\, dx} = (x+2) sen\, x + \cos x + C$$

b) $\int xe^{2x}\, dx$ — **Integración por partes** Orden: "ALPES" → $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$\int$ **polinomio · f exponencial ·** dx

$\boxed{u = x}$ — **Derivamos** → $\boxed{du = 1\, dx}$

$\boxed{dv = e^{2x}\, dx}$ — **Integramos** → $\boxed{v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}} + C$

$$\int u \cdot dv = \boxed{u \cdot v - \int v \cdot du}$$

"Un día vi una vaca sin rabo vestida de uniforme"

$$\int x \cdot e^{2x} dx = \boxed{x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 1dx} = \frac{1}{2} x\, e^{2x} - \frac{1}{2 \cdot 2}\int 2e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} x\, e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

c) $\int \ln x\ dx$ — **Integración por partes** Orden: "ALPES" → $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$\int$ **Logaritmo · polinomio** $\cdot\, dx$

¡¡OJO!! $\int 1 \cdot \ln x\, dx$ (Hay un polinomio de grado 0)

$\boldsymbol{u = \ln x}$ — Derivamos → $\boldsymbol{du = \frac{1}{x}\, dx}$

$\boldsymbol{dv = 1\, dx}$ — Integramos → $\boldsymbol{v = x}$ $+C$

$$\int u \cdot dv = \boxed{u \cdot v - \int v \cdot du}$$

"Un día vi una vaca sin rabo vestida de uniforme"

$$\int \ln x \cdot dx = \boxed{\ln x \cdot x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx} = x \ln x - x + C$$

¡¡OJO!! Decimos que $\boldsymbol{\ln x \cdot x = x \ln x}$ para evitar caer en el error decir que sería igual a $\ln x^2$

Esta integral es un **clásico** y aparece tanto que acabarás haciéndola como si fuera inmediata. Incluso la podríamos incluir en nuestra tabla de integrales: $\int \ln x\, dx = \boldsymbol{x \ln x - x + C}$

d) $\int arco\ tg\ x\ dx$ — **Integración por partes** Orden: "ALPES" → $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$\int$ **Arcotangente · polinomio** $\cdot\, dx$

¡¡OJO!! $\int 1 \cdot arco\ tg\, x\, dx$ (Hay un polinomio grado 0)

$\boldsymbol{u = arco\ tg\ x}$ — Derivamos → $\boldsymbol{du = \frac{1}{1+x^2}\, dx}$

$\boldsymbol{dv = 1\, dx}$ — Integramos → $\boldsymbol{v = x}$ $+C$

$$\int u \cdot dv = \boxed{u \cdot v - \int v \cdot du}$$

"Un día vi una vaca sin rabo vestida de uniforme"

$$\int arco\ tg\ x\, dx = \boxed{arco\ tg\ x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx} = x \cdot arco\ tg\ x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= x \cdot arco\ tg\ x - \frac{1}{2}\int \frac{2 \cdot x}{1+x^2}\, dx = \boldsymbol{x \cdot arco\ tg\ x - \frac{1}{2} \ln\left|1+x^2\right| + C}$$

Es muy común que en la integración por partes no sea tan directa **y nos lleven a otra integral por partes**... Entonces tendremos que aplicar el método varias veces. ¡¡Veamos un ejemplo!!

$\boxed{\int x^2 sen\, x\, dx}$ —— **Integración por partes** Orden: "ALPES" $\longrightarrow$ $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$\int$ **Polinomio · seno** $\cdot\, dx$

$\boxed{u = x^2}$ —— Derivamos $\longrightarrow$ $\boxed{du = 2x\, dx}$

$\boxed{dv = sen\, x\, dx}$ —— Integramos $\longrightarrow$ $\boxed{v = -cos\, x}$ $+C$

$$\int u \cdot dv = \boxed{u \cdot v - \int v \cdot du}$$

"Un día vi una vaca sin rabo vestida de uniforme"

$$\int x^2 \cdot \mathrm{sen}\, x\, dx = \boxed{x^2 \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot 2x\, dx} = -x^2 \cdot \cos x + \int \cos x \cdot 2x\, dx$$

Nueva integración por partes

$\boxed{u = 2x}$ —— Derivamos $\longrightarrow$ $\boxed{du = 2\, dx}$

$\boxed{dv = cos\, x\, dx}$ —— Integramos $\longrightarrow$ $\boxed{v = sen\, x}$ $+C$

$$\int u \cdot dv = \boxed{u \cdot v - \int v \cdot du}$$

"Un día vi una vaca sin rabo vestida de uniforme"

$$\int x^2 \cdot \mathrm{sen}\, x\, dx = -x^2 \cdot \cos x + \boxed{2x \cdot sen\, x - \int sen\, x \cdot 2\, dx} =$$

$$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot sen\, x - 2\int sen\, x\, dx = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot sen\, x + 2\, cos\, x + C$$

También puede ocurrir que una integral por partes sea **cíclica** ("La pescadilla que se muerde la cola") y tengamos que despejar la integral como si fuera una ecuación para resolverla.
Este tipo de integral la encontramos cuando en el integrando haya una función exponencial y un seno o coseno. ¡¡Vamos a ver un ejemplo!!

$\int e^x \cdot \cos x\, dx$ — **Integración por partes** Orden: "ALPES" → $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$\int \text{F exponencial} \cdot \text{coseno} \cdot dx$

$u = e^x$ — Derivamos → $du = e^x\, dx$

$dv = \cos x\, dx$ — Integramos → $v = \operatorname{sen} x$ $+C$

$$\int u \cdot dv = \boxed{u \cdot v - \int v \cdot du}$$

"Un día vi una vaca sin rabo vestida de uniforme"

$$\int e^x \cdot \cos x\, dx = \boxed{e^x \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot e^x\, dx}$$

Nueva integración por partes

$u = e^x$ — Derivamos → $du = e^x\, dx$

$dv = \operatorname{sen} x\, dx$ — Integramos → $v = -\cos x$ $+C$

$$\int u \cdot dv = \boxed{u \cdot v - \int v \cdot du}$$

"Un día vi una vaca sin rabo vestida de uniforme"

$$\int \operatorname{sen} x \cdot e^x\, dx = \boxed{-e^x \cdot \cos x - \int -\cos x \cdot e^x\, dx} = -e^x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot e^x\, dx$$

Nueva integración por partes

Otra vez nos queda una integración por partes, pero si te fijas, es exactamente la integral original que queríamos calcular ("La pescadilla que se muerde la cola"), por lo que para resolverla despejaremos la integral afirmando que: $\mathbf{A = \int \cos x \cdot e^x dx}$

Teniendo en cuenta la equivalencia de A y la última integral obtenida:

$$\boxed{A = \int \cos x \cdot e^x dx}$$

$$\boxed{\int sen\, x \cdot e^x\, dx = -e^x \cdot cos\, x + \underbrace{\int cos\, x \cdot e^x\, dx}_{\boxed{A}}}$$

Sustituimos en la primera integral:

$$\boxed{\int e^x \cdot cos\, x\, dx = e^x \cdot sen\, x - \int sen\, x \cdot e^x\, dx}$$

$$\boxed{A = e^x \cdot sen\, x - (-e^x \cdot cos\, x + A)}$$

Despejamos A:

$$A = e^x \cdot sen\, x - (-e^x \cdot cos\, x + A) \ \rightarrow\ A = e^x \cdot sen\, x + e^x \cdot cos\, x - A$$

$$2A = e^x \cdot sen\, x + e^x \cdot cos\, x \ \rightarrow\ A = \frac{e^x \cdot sen\, x + e^x \cdot cos\, x}{2}$$

Puesto que sabemos que $A = \int \cos x \cdot e^x dx$

$$\int cos\, x \cdot e^x dx = \frac{e^x \cdot sen\, x + e^x \cdot cos\, x}{2} + c$$

6. Integrales por cambio de variable

En los apartados anteriores hemos aprendido a resolver integrales inmediatas, integrales de funciones racionales polinómicas y producto de funciones... pero aún podríamos encontrarnos integrales que no se ven de forma directa y que no podrían resolverse mediante los métodos anteriores... para ello vamos a estudiar la **resolución de integrales por cambio de variable:**

Consiste en sustituir una parte del integrando por otra función o variable de manera que podamos resolver la integral con los métodos ya estudiados.

La dificultad estriba en elegir el cambio de variable adecuado... ¡¡Pero no te preocupes!! Os resultará bastante intuitivo una vez veamos los siguientes casos:

Si en el integrando aparecen:	**Cambio de variable sugerido:**	
Raíces cuadradas	$t = \sqrt{\textbf{Polinomio}}$	
Raíces no cuadradas	$t = \sqrt[m]{\textbf{Polinomio}}$	Siendo m el mínimo común múltiplo de los índices de las raíces.
Funciones exponenciales	$t = e^{nx}$	Siendo n el menor índice de los exponentes del integrando.
Funciones logarítmicas	$t = \ln x$	

* Recuerda que debemos descartar, en primer lugar, la posibilidad de que sea inmediata.

De forma general, podemos resolver este tipo de integrales aplicando los siguientes pasos:

1. Elegimos el cambio de variable adecuado (t)

2. Despejamos x en la ecuación.

3. Derivamos a ambos lados de la igualdad anterior.

4. Sustituimos los términos obtenidos (t), (x) y (dt) en la integral original y los ordenamos. (Si desaparece x y la integral depende sólo de t lo habremos hecho correctamente).

5. Resolvemos la integral con los métodos ya aprendidos en los apartados anteriores.

6. ¡¡Muy importante!! **Nuestra integral tiene que estar en función de x por lo que debemos deshacer el cambio de variable volviendo a sustituir t en la integral ya resuelta.**

¡¡Vamos a ver unos cuantos ejemplos de cada caso para practicar!!

Caso en el que en el integrando aparecen <u>raíces cuadradas</u>:

a) $\int x\sqrt{x+3}\,dx$ b) $\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,dx$

Cambio de variable:	$t=\sqrt{\text{Polinomio}}$

a) $\int x\sqrt{x+3}\,dx$

1. Elegimos el cambio de variable: $\boxed{t=\sqrt{x+3}}$

2. Despejamos x en la ecuación: $t=\sqrt{x+3} \;\rightarrow\; t^2=x+3 \;\rightarrow\; \boxed{x=t^2-3}$

3. Derivamos a ambos lados de la igualdad anterior:

$$(x)' = (t^2-3)'$$

Estamos derivando respecto de x $\leftarrow$ $\boxed{1\cdot dx} = \boxed{2t\cdot dt}$ $\rightarrow$ Estamos derivando respecto de t

4. Sustituimos los términos obtenidos (t), (x) y (dt) en la integral original y los ordenamos. (Si desaparece x y la integral depende sólo de t lo habremos hecho correctamente):

$$\int x\sqrt{x+3}\,dx = \boxed{\int (t^2-3)\cdot t\cdot 2t\cdot dt} = \int 2(t^4-3t^2)\,dt$$

5. Resolvemos la integral:

$$\int 2(t^4-3t^2)\cdot dt = 2\int (t^4-3t^2)\,dt = 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{3t^3}{3}\right)+C = \frac{2t^5}{5}-2t^3+C$$

6. ¡¡Muy importante!! Nuestra integral tiene que estar en función de x por lo que debemos <u>deshacer el cambio de variable</u> volviendo a sustituir t en la integral ya resuelta:

$$\int x\sqrt{x+3}\,dx = \frac{2t^5}{5}-2t^3+C = \boxed{\frac{2\left(\sqrt{x+3}\right)^5}{5}-2\left(\sqrt{x+3}\right)^3+C}$$

b) $\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,dx$

1. Elegimos el cambio de variable: $\boxed{t=\sqrt{x}}$

2. Despejamos x en la ecuación: $t=\sqrt{x} \;\rightarrow\; t^2=x \rightarrow \boxed{x=t^2}$

3. Derivamos a ambos lados de la igualdad anterior: $(x)'=(t^2)' \rightarrow \boxed{dx=2t\cdot dt}$

4. Sustituimos los términos obtenidos (t), (x) y (dt) en la integral original y los ordenamos:

$$\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,dx = \boxed{\int sen(t)\cdot 2t\cdot dt} = \int 2t\cdot sen\,t\cdot dt$$

5. Resolvemos la integral:

¡¡Fíjate!! Ahora nos "aparece" una integral por partes... ¡¡Esto es un clásico!!

$\int 2t \cdot sen\, t \cdot dt$ — **Integración por partes** Orden: "ALPES" $\longrightarrow$ $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$\int \textbf{Polinomio} \cdot \textbf{seno} \cdot dt$

$\boxed{u = 2t}$ — **Derivamos** $\longrightarrow$ $\boxed{du = 2\, dt}$

$\boxed{dv = sen\, t\, dt}$ — **Integramos** $\longrightarrow$ $\boxed{v = -cos\, t}\ +C$

$$\int u \cdot dv = \boxed{u \cdot v - \int v \cdot du}$$

"Un día vi una vaca sin rabo vestida de uniforme"

$$\int 2t \cdot sen\, t \cdot dt = \boxed{2t \cdot (-cos\, t) - \int -cos\, t \cdot 2\, dt} = -2t \cdot cos\, t + 2\, sen\, t + C$$

6. Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \text{sen}(\sqrt{x})\, dx = -2t \cdot cos\, t + 2\, sen\, t + C = \boxed{-2\sqrt{x} \cdot cos(\sqrt{x}) + 2\, sen\,(\sqrt{x}) + C}$$

Caso en el que en el integrando aparecen raíces no cuadradas:

a) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ b) $\int \frac{2\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

Cambio de variable:	$t = \sqrt[m]{\textbf{Polinomio}}$	m: común múltiplo de los índices de las raíces

a) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

1. Elegimos el cambio de variable: $\boxed{t = \sqrt[6]{x}}$ $\longrightarrow$ 6 es el M.C.M. de la raíz cuadrada (2) y raíz cubica (3)

2. Despejamos x en la ecuación: $t = \sqrt[6]{x} \rightarrow t^6 = x \rightarrow \boxed{x = t^6}$

3. Derivamos a ambos lados de la igualdad anterior: $(x)' = (t^6)' \rightarrow \boxed{dx = 6t^5 \cdot dt}$

4. Sustituimos los términos obtenidos (t), (x) y (dt) en la integral original y los ordenamos:

$$\int \frac{\mathbf{1}-\sqrt{\boldsymbol{x}}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}}dx = \boxed{\int \frac{1-\sqrt{t^6}}{\sqrt[3]{t^6}}\,6t^5\,dt} = \int \frac{1-t^3}{t^2}\,6t^5dt = \int 6(1-t^3)t^3dt = \int \boldsymbol{6(t^3-t^6)dt}$$

5. Resolvemos la integral:

$$\int 6(t^3-t^6)dt = 6\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^7}{7}\right)+C = \frac{3t^4}{2}-\frac{6t^7}{7}+C$$

6. Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3t^4}{2}-\frac{6t^7}{7}+C = \boxed{\frac{3(\sqrt[6]{x})^4}{2}-\frac{6(\sqrt[6]{x})^7}{7}+C} = \frac{3\sqrt[6]{x^4}}{2}-\frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7}+C =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}-\frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7}+C$$

b) $\displaystyle\int \frac{2\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

1. Elegimos el cambio de variable: $\boxed{t=\sqrt[6]{x}} \longrightarrow$ 6 es el M.C.M. de la raíz cuadrada (2), raíz cubica (3) y raíz sexta (6)

2. Despejamos x en la ecuación: $t=\sqrt[6]{x} \rightarrow t^6 = x \rightarrow \boxed{x=t^6}$

3. Derivamos a ambos lados de la igualdad anterior: $(x)' = (t^6)' \rightarrow \boxed{dx = 6t^5\cdot dt}$

4. Sustituimos los términos obtenidos (t), (x) y (dt) en la integral original y los ordenamos:

$$\int \frac{2\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx = \boxed{\int \frac{2\sqrt[6]{t^6}+3\sqrt[3]{t^6}}{\sqrt{t^6}}\,6t^5\,dt} = \int \frac{2t+3t^2}{t^3}\,6t^5\,dt = \int (12t^3+18t^4)\,dt$$

5. Resolvemos la integral:

$$\int \frac{2\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx = \int (12t^3+18t^4)\,dt = \frac{12t^4}{4}+\frac{18t^5}{5}+C = 3t^4+\frac{18t^5}{5}+C$$

6. Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \frac{2\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx = 3t^4+\frac{18t^5}{5}+C = \boxed{3(\sqrt[6]{x})^4+\frac{18(\sqrt[6]{x})^5}{5}+C} = 3\sqrt[6]{x^4}+\frac{18\sqrt[6]{x^5}}{5}+C$$

Caso en el que en el integrando aparecen funciones exponenciales:

$$\text{a)} \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{2}{2-e^x}\,dx \qquad \text{c)} \int \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}\,dx$$

Cambio de variable:	$t = e^{nx}$	n: Menor índice de los exponentes del integrando

Vamos a recordar dos propiedades importantes para calcular este tipo de integrales:

Propiedad de potencias:

$e^{nx} \leftrightarrow (e^x)^n$

Propiedad de identidades:

$e^x = t \rightarrow \ln e^x = \ln t \rightarrow x \underbrace{\ln e}_{1} = \ln t \rightarrow \boldsymbol{x = \ln t}$

a) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

1. Elegimos el cambio de variable: $\boxed{t = e^x} \longrightarrow$ **1** es el menor índice de los exponentes e^x y e^{2x}

2. Despejamos x en la ecuación: $t = e^x \rightarrow \ln t = x \ln e \rightarrow \boxed{x = \ln t}$

3. Derivamos a ambos lados de la igualdad anterior: $(x)' = (\ln t)' \rightarrow \boxed{dx = {}^1/_t \cdot dt}$

4. Sustituimos los términos obtenidos (t), (x) y (dt) en la integral original y los ordenamos:

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx = \boxed{\int \frac{\cancel{t}}{1+t^2}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\,dt} = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

5. Resolvemos la integral:

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = arco\ tg\ t + C$$

6. Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = arco\ tg\ t + C = \boxed{arco\ tg\ e^x + C}$$

b) $\int \frac{2}{2-e^x}\,dx$

1. Elegimos el cambio de variable: $\boxed{t = e^x}$

2. Despejamos x en la ecuación: $t = e^x \rightarrow \ln t = x \ln e \rightarrow \boxed{x = \ln t}$

3. Derivamos a ambos lados de la igualdad anterior: $(x)' = (\ln t)' \rightarrow \boxed{dx = {}^1/_t \cdot dt}$

4. Sustituimos los términos obtenidos (t), (x) y (dt) en la integral original y los ordenamos:

$$\int \frac{2}{2-e^x}\,dx = \boxed{\int \frac{2}{2-t}\cdot\frac{1}{t}\,dt} = \int \frac{2}{t(2-t)}\,dt$$

5. Resolvemos la integral:

¡¡Fíjate!! **Ahora nos "aparece" una integral racional... ¡¡Esto es otro clásico!!**

$\int \frac{2}{t(2-t)}\,dt$ —— **Podemos descartar <u>integración inmediata</u>** → **Función racional. Caso 2.1: $g^{\underline{o}}\, D. > g^{\underline{o}}\, N.$**

- Igualamos a cero el denominador y resolvemos la ecuación (buscamos sus raíces):

$$t(2-t) = 0\begin{cases} t = 0 \\ 2-t = 0 \rightarrow \boldsymbol{t = 2} \end{cases}$$

El denominador tiene dos raíces simples: $\boldsymbol{t(2-t)}$

- Expresamos el integrando como una suma de fracciones de la siguiente forma:

$$\frac{2}{t(2-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(2-t)}$$

- Despejamos y calculamos A, B siguiendo las siguientes pautas:

- Sacamos mínimo común múltiplo de la suma de fracciones y las expresamos como una sola:

$$\frac{2}{t(2-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(2-t)} = \frac{A\cdot(2-t) + B\cdot t}{t(2-t)}$$

- Eliminamos denominadores a ambos lados de la igualdad: $2 = A\cdot(2-t) + \boldsymbol{B\cdot t}$

* Para despejar A, asignamos a t el valor de la raíz $t = 0$

$$2 = A\cdot[2-(0)] + \cancel{B\cdot(0)} \;\rightarrow\; 2 = 2A + 0 \rightarrow \;\; \mathbf{A = 1}$$

* Para despejar B, asignamos a t el valor de la raíz $t = 2$

$$2 = A\cdot\cancel{[2-(2)]} + B\cdot(2) \;\rightarrow\; 2 = 0 + 2B \rightarrow \;\; \mathbf{B = 1}$$

- Sustituimos los valores de A, B y calculamos las integrales inmediatas logarítmicas:

$$\int \frac{2}{t(2-t)}dx = \int \frac{\mathbf{1}}{t}dx + \int \frac{\mathbf{1}}{(2-t)}dx = \int \frac{1}{t}dx + \frac{1}{\mathbf{-1}}\int \frac{\mathbf{-1}}{(2-t)}dx = \mathbf{ln|t| - ln|2-t| + C}$$

6. Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \frac{2}{2-e^x}dx = \ln|t| - \ln|2-t| + C = \boxed{\ln|e^x| - \ln|2-e^x| + C} =$$

$$= x\cdot\ln e - \ln|2-e^x| + C = \boldsymbol{x - \ln|2-e^x| + C}$$

c) $\int \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}\,dx$

¡¡Caso curioso!! Tenemos e^x dentro de un raíz

1. Elegimos el cambio de variable: $\boxed{t = \sqrt{e^x}}$

2. Despejamos x en la ecuación:

$$t = \sqrt{e^x} \quad \rightarrow \quad t^2 = e^x \quad \rightarrow \quad \ln t^2 = \ln e^x \quad \rightarrow \quad 2\ln t = x \ln e \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 2\ln t}$$

3. Derivamos a ambos lados de la igualdad anterior: $(x)' = (2\ln t)' \rightarrow \boxed{dx = {}^{2}/_{t} \cdot dt}$

4. Sustituimos los términos obtenidos (t), (x) y (dt) en la integral original y los ordenamos:

$$\int \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}\,dx = \boxed{\int \frac{t^2}{1+t} \cdot {}^{2}/_{t} \cdot dt} = \int \frac{2t}{t+1}\,dt$$

5. Resolvemos la integral:

$\int \frac{2t}{t+1}\,dt$ —— Podemos descartar <u>integración inmediata</u> → **Función racional. Caso 1: $g^{\underline{o}}\, N. \geq g^{\underline{o}}\, D.$**

$$\begin{array}{r|l} 2t & t+1 \\ \hline -2t-2 & 2 \leftarrow C(x) \\ R(x) \rightarrow -2 & \end{array}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}} \rightarrow \boxed{\frac{2t}{t+1} = 2 + \frac{-2}{t+1}}$$

$$\boxed{\int \frac{2t}{t+1}\,dt = \int 2dt + \int \frac{-2}{t+1}\,dt} = 2\int dt - 2\int \frac{1}{t+1}\,dt = 2t - 2\ln|t+1| + C$$

6. Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}\,dx = 2t - 2\ln|t+1| + C = \boxed{2\sqrt{e^x} - 2\ln\left|\sqrt{e^x}+1\right| + C}$$

Caso en el que en el integrando aparecen funciones logarítmicas:

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$$

Cambio de variable:	$t = \ln x$

¡¡Recuerda la definición de ln!! $\ln x = t \to x = e^t$

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$$

1. Elegimos el cambio de variable: $\boxed{t = \ln x}$

2. Despejamos x en la ecuación: $t = \ln x \ \to \boxed{x = e^t}$

3. Derivamos a ambos lados de la igualdad anterior: $(x)' = (e^t)' \to \boxed{dx = e^t \cdot dt}$

4. Sustituimos los términos obtenidos (t), (x) y (dt) en la integral original y los ordenamos:

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx = \boxed{\int \frac{1}{\cancel{e^t} \cdot t^2} \cdot \cancel{e^t} \cdot dt} = \int t^{-2} \cdot dt$$

5. Resolvemos la integral:

$$\int t^{-2} \cdot dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{t} + C$$

6. Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx = \frac{-1}{t} + C = \boxed{\frac{-1}{\ln x} + C}$$

<ins>Alternativa</ins>. **Aplicando un paso previo, podríamos transformar la integral en inmediata y resolverla rápidamente... ¡¡Por eso es muy importante tener este factor en cuenta!!**

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int \frac{1}{x} (\ln x)^{-2} dx = \frac{(\ln x)^{-1}}{-1} + C = \boxed{\frac{-1}{\ln x} + C}$$