Tabla-Resumen de las reglas de integración inmediatas

Función	Integral sencilla	Integral compuesta
Polinomio	$\int k \cdot dx = kx + C$	
Potencia	$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$
Logaritmo neperianos	$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
Exponencial en base *e*	$\int e^x \cdot dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = e^{f(x)} + C$
Exponencial en base a	$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
Seno	$\int sen\, x \cdot dx = -\cos x + C$	$\int sen[f(x)] \cdot f'(x) \cdot dx = -\cos[f(x)] + C$
Coseno	$\int \cos x \cdot dx = sen\, x + C$	$\int cos[f(x)] \cdot f'(x) \cdot dx = sen[f(x)] + C$
Tangente	$\int \frac{1}{cos^2 x} \cdot dx = tg\, x + C$ $\int (1 + tg^2 x) \cdot dx = tg\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{cos^2 f(x)} \cdot dx = tg\, f(x) + C$ $\int [1 + tg^2 f(x)] \cdot f'(x) \cdot dx = tg\, f(x) + C$
Arcoseno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = arco\, sen\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot dx = \text{arco sen}\, f(x) + C$
Arcocoseno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -arco\cos x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot dx = -\text{arco}\cos f(x) + C$
Arcotangente	$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = arco\, tg\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} \cdot dx = arco\, tg\, f(x) + C$

* Polinomios

$$\int k \cdot dx = kx + C$$	$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$
*"La integral de un número es, **dicho número multiplicado por x**"*	*"La integral de x elevado a un número es, **la x elevada a un grado más y todo ello dividido por ese nuevo grado**"*

¡¡Vamos a ver unos cuantos ejemplos!!

$$a) \int 5\, dx = \mathbf{5x + C}$$

$$b) \int 3x\, dx = \frac{3x^2}{2} + C$$

$$c) \int 7x^3\, dx = \frac{7x^4}{4} + C$$

$$d) \int (x^3 - 4x^2 + 9x - 3)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} - 3x + C$$

$$e) \int (x^4 - 3x^2 + 6x)\, dx = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + C = \frac{x^5}{5} - x^3 + 3x^2 + C$$

* Potencias

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$
*"La integral de una función elevada a un número por la derivada de la función es, **la función elevada a un grado más y todo ello dividido entre ese nuevo grado**"*

¡¡Interesante!! La regla nos hace ver que el grado n tiene que ser distinto de -1, ya que en ese caso, el nuevo grado sería $n + 1 = 0$, y entonces la integral sería logarítmica.

¡¡Vamos a calcular algunas integrales de este tipo!! Recuerda los <u>pasos generales</u>:

1. Sacamos el número fuera de la integral (si nos conviene).
2. Multiplicamos la función de la integral por el número que nos haga obtener la derivada de la función junto a la función. A su vez dividimos fuera de la integral por el mismo número.
3. Ya podremos aplicar la regla y obtener su integral: $\boxed{\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C}$

Tenemos que multiplicar $(3x+2)$ por el número que nos dé su derivada. Por lo tanto, multiplicamos por 3. A su vez dividimos fuera de la integral por el mismo número.

$$a)\int 7(3x+2)^5dx = \mathbf{7}\int (3x+2)^5dx = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\int \mathbf{3}\cdot(3x+2)^5dx = \frac{7}{3}\cdot\frac{\mathbf{(3x+2)^6}}{\mathbf{6}} + \boldsymbol{C} =$$

$$= \frac{7(3x+2)^6}{18} + C$$

Tenemos que multiplicar (x^2+6) por el número que nos dé su derivada. Como ya tenemos x, solo tenemos que multiplicar por 2. A su vez dividimos fuera de la integral por el mismo número.

¡¡OJO!! En las integrales podemos sacar el número fuera de la integral pero no las x

$$b)\int 3x\cdot(x^2+6)^3dx = \mathbf{3}\int x\cdot(x^2+6)^3dx = \frac{3}{\mathbf{2}}\int \mathbf{2}\cdot x\cdot(x^2+6)^3dx =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\mathbf{(x^2+6)^4}}{\mathbf{4}} + \boldsymbol{C} = \frac{3(x^2+6)^4}{8} + C$$

Como no tenemos número nos saltamos el paso 1. Ahora tenemos que multiplicar $(5-e^{2x})$ por el número que nos dé su derivada. Como ya tenemos e^{2x}, solo tenemos que multiplicar por -2. A su vez dividimos fuera de la integral por el mismo número.

$$c)\int e^{2x}\cdot(5-e^{2x})^6dx = \frac{1}{\mathbf{-2}}\int \mathbf{-2}\cdot e^{2x}\cdot(5-e^{2x})^6dx = \frac{-1}{2}\cdot\frac{\mathbf{(5-e^{2x})^7}}{\mathbf{7}} + \boldsymbol{C} =$$

$$= \frac{-(5-e^{2x})^7}{14} + C =$$

$$d)\int 7senx\cdot(cosx+3)^5dx = \mathbf{7}\int senx\cdot(cosx+3)^5dx = \frac{7}{\mathbf{-1}}\int -senx\cdot(cosx+3)^5dx =$$

$$= \frac{\mathbf{-7(cosx+3)^6}}{\mathbf{6}} + \boldsymbol{C}$$

¡¡OJO!! Es frecuente encontrar este tipo de integrales "camufladas" y tendremos que transformarlas previamente para verlas. ¡¡Vamos a ver algunos ejemplos!!:

$$a)\int \frac{3x}{(5x^2-1)^3}dx =$$

Como paso previo, subimos el denominador ¡¡Recuerda!!: $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$, $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$

$$= \int 3x \cdot (\mathbf{5x^2-1})^{-3}dx =$$

① ② ③

$$= \mathbf{3}\int x \cdot (5x^2-1)^{-3}dx = \frac{3}{\mathbf{10}}\int \mathbf{10}x \cdot (5x^2-1)^{-3}dx = \frac{3}{10} \cdot \frac{(\mathbf{5x^2-1})^{-2}}{\mathbf{-2}} + \boldsymbol{C} =$$

$$= \boxed{\frac{-3(5x^2-1)^{-2}}{20} + C = \frac{-3}{20(5x^2-1)^2} + C}$$

Volvemos a aplicar la propiedad

$$b)\int 4\sqrt{5x-6}dx =$$

Como paso previo, transformamos la raíz en potencia ¡¡Recuerda!! $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$= \int 4(\mathbf{5x-6})^{1/2}dx =$$

① ② ③

$$= \mathbf{4}\int (5x-6)^{1/2}dx = \frac{4}{\mathbf{5}}\int \mathbf{5} \cdot (5x-6)^{1/2}dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{(\mathbf{5x-6})^{1/2+1}}{\mathbf{1/2+1}} + C =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{(5x-6)^{3/2}}{3/2} + C = \boxed{\frac{4(5x-6)^{3/2}}{15/2} + C = \frac{4\sqrt{(5x-6)^3}}{15/2} + C} = \frac{8\sqrt{(5x-6)^3}}{15} + C$$

Volvemos a aplicar la propiedad

$$c)\int \frac{\mathrm{Ln}^4 x}{x}dx =$$

Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma:

$$= \int (\mathbf{Ln}\ \boldsymbol{x})^4 \cdot \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}dx =$$

③

$$= \int (\mathrm{Ln}\ x)^4 \cdot \frac{1}{x}dx =$$

Fíjate que ya tenemos la función con su derivada así que podemos aplicar directamente la regla

$$= \frac{(\mathbf{Ln}\ \boldsymbol{x})^5}{\mathbf{5}} + \boldsymbol{C}$$

* Logaritmo neperiano

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln|f(x)| + C$$

*"La integral de una derivada entre su función, **es el logaritmo neperiano del <u>valor absoluto</u> de la función**"*

Vamos a calcular algunas integrales de este tipo. Recuerda los <u>pasos generales</u>:

1. Sacamos el número fuera de la integral (si nos conviene).
2. Multiplicamos el numerador de la integral para que sea igual que la derivada de la función (denominador). A su vez deberemos dividir fuera de la integral por el mismo número.
3. Ya podremos aplicar la regla para obtener su integral: $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln|f(x)| + C}$

$$a) \int \frac{6}{5x-3} dx \overset{①}{=} \mathbf{6} \int \frac{1}{5x-3} dx \overset{②}{=} \frac{6}{\mathbf{5}} \int \frac{\mathbf{5} \cdot 1}{5x-3} dx \overset{③}{=} \frac{6}{5} \ln|5x-3| + C$$

$$b) \int \frac{-2}{3x+7} dx \overset{①}{=} \mathbf{-2} \int \frac{1}{3x+7} dx \overset{②}{=} \frac{-2}{\mathbf{3}} \int \frac{\mathbf{3} \cdot 1}{3x+7} dx \overset{③}{=} \frac{-2}{3} \ln|3x+7| + C$$

¡¡Recuerda!! En las integrales podemos "jugar" con los números como en los ejemplos anteriores pero... ¡¡OJO!! No podemos hacerlo con las x como los ejemplos siguientes:

$$c) \int \frac{x}{x^2-5} dx \overset{①}{=} \mathbf{1} \int \frac{x}{x^2-5} dx \overset{②}{=} \frac{1}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{2}x}{x^2-5} dx \overset{③}{=} \frac{1}{2} \ln|x^2-5| + C$$

$$d) \int \frac{7x^2}{x^3+3} dx \overset{①}{=} \mathbf{7} \int \frac{x^2}{x^3+3} dx \overset{②}{=} \frac{7}{\mathbf{3}} \int \frac{\mathbf{3}x^2}{x^3+3} dx \overset{③}{=} \frac{7}{3} \ln|x^3+3| + C$$

Ya hemos visto los pasos generales para la resolución de integrales inmediatas (incluyendo la transformación previa). Para el resto de tipos de integrales, aplicaremos los mismos (o similares pasos) <u>**PERO**</u> no vamos a marcaros los pasos con ① ② ③ específicamente para que aprendáis a "volar solos". No os preocupéis, vamos poco a poco y seguiremos marcando cada variación de cada paso en **letra negrita.**

* Exponenciales en base e:

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = e^{f(x)} + C$$

"La integral del número e elevada a una función por la derivada de la función es, ***el número e elevado a la función*** *"*

¡¡CHISTE!!

Está e^x en una fiesta sola en una esquina a esto que se le acerca la función polinómica y le dice: "Venga va, intégrate" a lo que e^x responde: **"Para qué... SI ME VOY A QUEDAR IGUAL"**

¡¡Vamos a ver unos cuantos ejemplos!!

$a)\ \int 5e^{2x}dx = 5\int e^{2x}dx = \frac{5}{2}\int 2e^{2x}dx = \frac{5}{2}e^{2x} + C$

$b)\ \int -5xe^{3x^2}dx = -5\int xe^{3x^2}dx = \frac{-5}{6}\int 6xe^{3x^2}dx = \frac{-5}{6}e^{3x^2} + C$

$c)\ \int \frac{e^{-4x}}{5}dx = \frac{1}{5}\int e^{-4x}dx = \frac{1}{5\cdot(-4)}\int -4e^{-4x}dx = \frac{1}{-20}e^{-4x} + C$

$d)\ \int 2xe^{x^2-4}\,dx =$ Fíjate que ya tenemos la función con su derivada así que podemos aplicar directamente la regla $= e^{x^2-4} + C$

* Exponenciales en base a (distinta de e):

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$$

"La integral de un número elevado a una función por la derivada de la función es, ***el número elevado a la función entre el logaritmo neperiano del número*** *"*

¡¡Vamos a ver unos cuantos ejemplos!!

$a)\ \int 3x\cdot 2^{x^2}dx = 3\int x\cdot 2^{x^2}dx = \frac{3}{2}\int 2x\cdot 2^{x^2}dx = \frac{3}{2}\frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C$

$b)\ \int 5x^2\cdot 7^{x^3}dx = 5\int x^2\cdot 7^{x^3}dx = \frac{5}{3}\int 3x^2\cdot 7^{x^3}dx = \frac{5}{3}\frac{7^{x^3}}{\ln 7} + C$

*** Trigonométricas: Seno y coseno**

$\int \boldsymbol{sen[f(x)] \cdot f'(x) \cdot dx = -\cos[f(x)] + C}$	*La integral del seno de una función por la derivada de la función es,* ***el menos coseno de la función***
$\int \boldsymbol{cos[f(x)] \cdot f'(x) \cdot dx = sen[f(x)] + C}$	*La integral del coseno de una función por la derivada de la función es,* ***el más seno de la función***

¡¡Cuidado!! **La derivada del seno es el más coseno mientras que la integral del seno es el menos coseno** ¡¡No te equivoques con los signos!! Veamos algunos ejemplos:

a) $\int 5\,\mathrm{sen}(3x)dx = \mathbf{5}\int \mathrm{sen}(3x)dx = \frac{5}{\mathbf{3}}\int \mathbf{3}\mathrm{sen}(3x)dx = \frac{-5}{3}\,\boldsymbol{cos(3x) + C}$

b) $\int 7x^2 \cdot \cos(2x^3)\,dx = \mathbf{7}\int x^2 \cdot \cos(2x^3)\,dx = \frac{7}{\mathbf{6}}\int \mathbf{6}x^2 \cdot \cos(2x^3)\,dx = \frac{7}{6}\,\mathbf{sen(2x^3) + C}$

c) $\int x^4 \cdot \mathrm{sen}(x^5+1)dx = \frac{1}{\mathbf{5}}\int \mathbf{5}x^4 \cdot \mathrm{sen}(x^5+1)dx = \frac{-1}{5}\,\mathbf{cos(x^5+1) + C}$

d) $\int e^{-x} \cdot \cos(e^{-x})\,dx = \frac{1}{\mathbf{-1}}\int \mathbf{-1}e^{-x} \cdot \cos(e^{-x})\,dx = -\,\mathbf{sen(e^{-x}) + C}$

e) $\int (x+1) \cdot \mathrm{sen}(x^2+2x+1)dx = \frac{1}{\mathbf{2}}\int \mathbf{2}(x+1) \cdot \mathrm{sen}(x^2+2x+1)dx =$

$= \frac{-1}{2}\,\mathbf{cos(x^2+2x+1) + C} = \frac{-\cos(x^2+2x+1)}{2} + C$

f) $\int \mathrm{sen}\,x \cdot [\mathrm{sen}(\cos x)]\,dx = \frac{1}{\mathbf{-1}}\int \mathbf{-1}\mathrm{sen}\,x \cdot [\mathrm{sen}(\cos x)]\,dx = -1[\mathbf{-\cos(\cos x)}] + \boldsymbol{C} =$

$= \cos(\cos x) + C$

g) $\int \frac{\cos x}{4}dx = \frac{1}{\mathbf{4}}\int \cos x\,dx = \frac{1}{4}\mathbf{sen\,x + C} = \frac{\mathrm{sen}\,x}{4} + C$

¡¡OJO!! Es frecuente encontrar este tipo de integrales "camufladas" y tendremos que transformarlas previamente para verlas. ¡¡Vamos a ver algunos ejemplos!!

$a) \int \frac{5\text{sen}[\ln(3x)-1]}{x}dx =$ Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma: $= \int \mathbf{5sen[ln(3}\boldsymbol{x}\mathbf{)-1]} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx} =$

$= \mathbf{5}\int \text{sen}[\ln(3x)-1]\cdot\frac{1}{x}dx = \mathbf{-5cos[ln(3}\boldsymbol{x}\mathbf{)-1]+}\boldsymbol{C}$

$b) \int \text{sen}\, x \cdot cos^3 x\, dx =$ ¡¡OJO!! Nos damos cuenta de que no es una integral trigonométrica. Es de tipo <u>potencial</u> "camuflada" $= \int \mathbf{sen}\,\boldsymbol{x}\cdot(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x})^3\boldsymbol{dx} =$

$= \frac{1}{\mathbf{-1}}\int \mathbf{-1}\text{sen}\, x\cdot(\cos x)^3 dx = \frac{\mathbf{-(cos}\,\boldsymbol{x}\mathbf{)^4}}{\mathbf{4}} + \boldsymbol{C} = \frac{-cos^4 x}{4} + C$

$c) \int \frac{5\text{sen}\left(\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1-x}}dx =$ Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma: $= \int 5\text{sen}\left(\sqrt{1-x}\right)\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{1-x}}\boldsymbol{dx} =$

$= 5\int \text{sen}\left(\sqrt{1-x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \frac{\mathbf{5\cdot 2}}{\mathbf{-1}}\int \text{sen}\left(\sqrt{1-x}\right)\cdot\frac{\mathbf{-1}}{2\sqrt{1-x}}dx = 10\cos\left(\sqrt{1-x}\right) + \boldsymbol{C}$

3.7. Trigonométricas: Tangente. Las expresaremos mediante dos formas:

$\int \frac{\boldsymbol{f'(x)}}{\boldsymbol{cos^2 f(x)}}\cdot\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{tg\ f(x)+C}$	*La integral de la derivada de la función entre el coseno al cuadrado de la función es,* ***la tangente de la función***
$\int [\mathbf{1}+\boldsymbol{tg^2 f(x)}]\cdot\boldsymbol{f'(x)}\cdot\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{tg\ f(x)+C}$	*La integral de uno más la tangente al cuadrado de la función y todo ello multiplicado por la derivada de la función es,* ***la tangente de la función***

$a) \int \frac{7}{cos^2 x}dx = \mathbf{7}\int \frac{1}{cos^2 x}dx = 7\ \boldsymbol{tg\ x+C}$

$b) \int 4[1+tg^2(3x)]dx = \mathbf{4}\int [1+tg^2(3x)]dx = \frac{4}{\mathbf{3}}\int \mathbf{3}\cdot[1+tg^2(3x)]dx = \frac{4}{3}\ \boldsymbol{tg(3x)+C}$

$c) \int \frac{2x^4}{\cos^2(x^5)}dx = \mathbf{2}\int \frac{x^4}{\cos^2(x^5)}dx = \frac{2}{\mathbf{5}}\int \frac{\mathbf{5}x^4}{\cos^2(x^5)}dx = \frac{2}{5}\ \boldsymbol{tg(x^5)+C}$

$$d)\int \frac{-3}{\cos^2(8x)}dx = -3\int \frac{1}{\cos^2(8x)}dx = \frac{-3}{8}\int \frac{8}{\cos^2(8x)}dx = \frac{-3}{8}tg(8x) + C$$

¡¡OJO!! Es frecuente encontrar este tipo de integrales "camufladas" y tendremos que transformarlas previamente para verlas. ¡¡Vamos a ver algunos ejemplos!!

$$e)\int [e^x + e^x \mathrm{tg}^2(e^x)]dx =$$

Como paso previo, sacamos factor común y expresamos la integral de la siguiente forma:

$$= \int e^x \cdot [1 + \mathrm{tg}^2(e^x)]dx = \mathrm{tg}(e^x) + C$$

$$f)\int \frac{6}{\sqrt{x}\cdot\cos^2(\sqrt{x})}dx =$$

Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma:

$$= \int \frac{6}{\cos^2(\sqrt{x})}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx =$$

$$= 6\int \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 6\cdot 2\int \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 12\,tg(\sqrt{x}) + C$$

$$g)\int \frac{9[1+\mathrm{tg}^2(\ln x)]}{x}dx =$$

Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma:

$$= \int 9[1+\mathrm{tg}^2(\ln x)]\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= 9\int [1+\mathrm{tg}^2(\ln x)]\cdot\frac{1}{x}dx = 9\mathrm{tg}(\ln x) + C$$

$$h)\int \frac{2^x}{\cos^2(2^x)}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{2^x\cdot\ln 2}{\cos^2(2^x)}dx = \frac{1}{\ln 2}\cdot\mathrm{tg}(2^x) + C = \frac{\mathrm{tg}(2^x)}{\ln 2} + C$$

$$i)\int [1+\mathrm{tg}^2(\cos x)]\cdot \mathrm{sen}\,x\,dx = \frac{1}{-1}\int [1+\mathrm{tg}^2(\cos x)]\cdot(-1)\cdot\mathrm{sen}\,x\,dx = -\mathrm{tg}(\cos x) + C$$

¡¡OJO!! En el numerador **no** tenemos la derivada de $5x$, por lo tanto no es de tipo tangente. Es de tipo <u>potencial</u> "camuflada"

$$j)\int \frac{\mathrm{sen}\,(5x)}{\cos^2(5x)}dx =$$

Subimos el denominador arriba aplicando la propiedad de la potencia:

$$= \int \cos^{-2}(5x)\cdot\mathrm{sen}(5x)dx =$$

$$= \frac{1}{-5}\int \cos^{-2}(5x)\cdot(-5)\cdot\mathrm{sen}(5x)\,dx = \frac{-1}{5}\,\frac{\cos^{-1}(5x)}{-1} + C = \frac{1}{5\,cos(5x)} + C$$

*** Arcos: Arcoseno y arcocoseno**

<table>
<tr><td>$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot dx = \textbf{arco sen } f(x) + C$$</td><td rowspan="2">La integral de la derivada de la función entre la raíz cuadrada que incluye a uno menos la función al cuadrado es, el arcoseno de la función o el menos arcocoseno de la función</td></tr>
<tr><td>$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot dx = -\textbf{arco } cos\, f(x) + C$$</td></tr>
</table>

¡¡Interesante!! Como podéis ver, las dos fórmulas son muy parecidas y usaremos como norma general la definida para el arcoseno. Ejemplo:

$$\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = 5 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = 5\ \textbf{arco sen}\ x + C$$

¡¡OJO!! Es frecuente encontrar este tipo de integrales "camufladas" y tendremos que transformarlas previamente para verlas. **Como nos conviene que dentro de la raíz del denominador se encuentre $1-[f(x)]^2$, recurriremos a todas las propiedades y conocimientos que ya tenemos para conseguirlo... ¡¡Vamos a ello!!**

a) $\int \frac{3x}{\sqrt{1-4x^4}} \cdot dx =$

> Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma:
> ¡¡Recuerda esta propiedad!!
> $(a^m)^n \leftrightarrow a^{m \cdot n}$
> $4x^4 = 2^2 \cdot x^4 = (2x^2)^2$

$= \int \frac{3x}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} \cdot dx =$

$$= 3 \int \frac{x}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} \cdot dx = \frac{3}{4} \int \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} \cdot dx = \frac{3}{4}\ \textbf{arco sen}\ (2x^2) + C$$

b) $\int \frac{6}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot dx =$

> Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma:

$= \int \frac{6}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot dx =$

$$= 6 \int \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot dx = \frac{6}{3} \int \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot dx = 2\ \textbf{arco sen}\ (3x) + C$$

c) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} \cdot dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot dx = \frac{1}{3}\ \textbf{arco sen}\ (x^3) + C$$

d) $\int \frac{4\,\text{sen}\,x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \cdot dx =$

Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma:

$= \int \frac{4\,\text{sen}\,x}{\sqrt{1-(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x})^2}} \cdot dx =$

$$= \mathbf{4}\int \frac{\text{sen}\,x}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} \cdot dx = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{-1}}\int \frac{\mathbf{-1}\cdot \text{sen}\,x}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} \cdot dx = -4\,\mathbf{arco\ sen}\,(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$$

e) $\int \frac{7e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot dx =$

Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma:

$= \int \frac{7e^x}{\sqrt{1-(\boldsymbol{e^x})^2}} \cdot dx =$

$$= \mathbf{7}\int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot dx = 7\,\mathbf{arco\ sen}\,(\boldsymbol{e^x}) + \boldsymbol{C}$$

f) $\int \frac{5}{\sqrt{1-2x^2}} \cdot dx =$

Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma:
¡¡Recuerda esta propiedad!!
$\boldsymbol{a} \leftrightarrow (\sqrt[n]{\boldsymbol{a}})^n$
$\mathbf{2}\boldsymbol{x}^2 = (\sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{x})^2$

$= \int \frac{5}{\sqrt{1-(\sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{x})^2}} \cdot dx =$

$$= \mathbf{5}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{2}x)^2}} \cdot dx = \frac{5}{\sqrt{\mathbf{2}}}\int \frac{\sqrt{\mathbf{2}}\cdot 1}{\sqrt{1-(\sqrt{2}x)^2}} \cdot dx = \frac{5}{\sqrt{2}}\,\mathbf{arco\ sen}\,(\sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$$

g) $\int \frac{9}{\sqrt{4-x^2}} \cdot dx \rightarrow$

Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma:
¡¡Recuerda esta propiedad!!
$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} = \frac{\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{K}}}{\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{K}}} \rightarrow \frac{\frac{9}{2}}{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}} = \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{\frac{4}{4}-\frac{x^2}{4}}} = \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right)^2}}$

$$\int \frac{9}{\sqrt{4-x^2}} \cdot dx = \int \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right)^2}} \cdot dx = \frac{9}{2}\cdot \mathbf{2}\int \frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot 1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot dx = 9\,\mathbf{arco\ sen}\,\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right) + \boldsymbol{C}$$

¡¡Integral Camuflada!!

h) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}\cdot dx =$

Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma:
¡¡Recuerda esta propiedad!!
$\boldsymbol{a \leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^n}$
$\boldsymbol{x = \left(\sqrt{x}\right)^2}$

$= \int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}\right)^2}}\cdot \boldsymbol{dx} =$

$$= \mathbf{2}\int \frac{1}{\mathbf{2}\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\cdot dx = 2\textbf{arco sen}\left(\sqrt{x}\right) + \boldsymbol{C}$$

¡¡Cuidado!! Las integrales con raíces que se resuelven por potencias son fáciles de confundir con las integrales arcoseno. ¡¡Vamos a ver un ejemplo para evitar esa confusión!!

1) $\int \frac{7x}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot dx =$

Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma:

$= \int 7x\cdot\left(\mathbf{1}-\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\right)^{-\mathbf{1}/\mathbf{2}}\cdot dx =$

Resolvemos por potencias

$$= \mathbf{7}\int x\cdot(1-4x^2)^{-1/2}\cdot dx = \frac{7}{\mathbf{-8}}\int \mathbf{-8}x\cdot(1-4x^2)^{-1/2}\cdot dx = \frac{-7}{8}\frac{\left(\mathbf{1}-\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\right)^{-\mathbf{1}/\mathbf{2}+\mathbf{1}}}{-\mathbf{1}/\mathbf{2}+\mathbf{1}} + \boldsymbol{C} =$$

$$= \frac{-7}{8}\frac{(1-4x^2)^{1/2}}{1/2} + C = \frac{-7(1-4x^2)^{1/2}}{4} + C = \frac{-7\sqrt{1-4x^2}}{4} + C$$

2) $\int \frac{7}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot dx =$

Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma:

$= \int 7\cdot\left(1-4x^2\right)^{-1/2}\cdot dx =$

No podemos resolver por potencias

$= \mathbf{7}\int (1-4x^2)^{-1/2}\cdot dx =$

Volvemos al principio para intentar por **arcoseno**

$\int \frac{7}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot dx = \int \frac{7}{\sqrt{1-(\mathbf{2x})^2}}\cdot dx =$

$$= \mathbf{7}\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot dx = \frac{7}{\mathbf{2}}\int \frac{\mathbf{2}\cdot 1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot dx = \frac{7}{2}\textbf{arco sen}\,(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$$

*** Arcos: Arcotangente**

$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} \cdot dx = arco\ tg\ f(x) + C$	*La integral de la derivada de la función entre (uno más la función al cuadrado) es,* ***la arcotangente de la función***

a) $\int \frac{5}{1+x^2} \cdot dx = \mathbf{5} \int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = 5\ \boldsymbol{arco\ tg\ (x) + C}$

b) $\int \frac{8x}{1+x^4} \cdot dx = \int \frac{8x}{1+(x^2)^2} \cdot dx = \mathbf{8} \int \frac{x}{1+(x^2)^2} \cdot dx = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{2} \cdot x}{1+(x^2)^2} \cdot dx =$

$= 4\ \boldsymbol{arco\ tg\ (x^2) + C}$

c) $\int \frac{-7}{1+9x^2} \cdot dx = \int \frac{-7}{1+(3x)^2} \cdot dx = \mathbf{-7} \int \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot dx = \frac{-7}{\mathbf{3}} \int \frac{\mathbf{3} \cdot 1}{1+(3x)^2} \cdot dx =$

$= \frac{-7}{3}\ \boldsymbol{arco\ tg\ (3x) + C}$

d) $\int \frac{-2}{x^2+1} \cdot dx = \mathbf{-2} \int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = -2\ \boldsymbol{arco\ tg\ (x) + C}$

e) $\int \frac{5}{1+4x^2} \cdot dx = \int \frac{5}{1+(2x)^2} \cdot dx = \mathbf{5} \int \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot dx = \frac{5}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{2} \cdot 1}{1+(2x)^2} \cdot dx =$

$= \frac{5}{2}\ \boldsymbol{arco\ tg\ (2x) + C}$

f) $\int \frac{-3x}{1+9x^4} \cdot dx = \int \frac{-3x}{1+(3x^2)^2} \cdot dx = -3 \int \frac{x}{1+(3x^2)^2} \cdot dx = \frac{-3}{\mathbf{6}} \int \frac{\mathbf{6}x}{1+(3x^2)^2} \cdot dx =$

$= \frac{-1}{2}\ \boldsymbol{arco\ tg\ (3x^2) + C}$

¡¡OJO!! Es frecuente encontrar este tipo de integrales "camufladas" y tendremos que transformarlas previamente para verlas. Por ejemplo, cuando no hay 1 en el denominador:

$$\int \frac{5}{9+16x^2}\cdot dx = \boxed{\text{Como paso previo, expresamos la integral de la siguiente forma:}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\int \frac{5}{\frac{9}{\mathbf{9}}+\frac{16x^2}{\mathbf{9}}}\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{5}{1+\left(\frac{\mathbf{4x}}{\mathbf{3}}\right)^2}\cdot dx = \frac{\mathbf{5}}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{4x}{3}\right)^2}\cdot dx = \frac{5}{9}\cdot\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\int \frac{\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\cdot 1}{1+\left(\frac{4x}{3}\right)^2}\cdot dx =$$

$$= \frac{5}{12}\,\boldsymbol{arco\ tg}\left(\frac{\mathbf{4x}}{\mathbf{3}}\right) + \boldsymbol{C}$$

¡¡Cuidado!! Las integrales logarítmicas son fáciles de confundir con las integrales arcotangentes. ¡¡Vamos a ver un ejemplo para evitar esa confusión!!

Resolvemos por logaritmos

1) $$\boxed{\int \frac{5x}{4x^2+1}\cdot dx = \mathbf{5}\int \frac{x}{4x^2+1}\cdot dx} = \frac{5}{\mathbf{8}}\int \frac{8x}{4x^2+1}\cdot dx = \frac{5}{8}\,\mathbf{ln}\left|\mathbf{4x^2+1}\right| + \boldsymbol{C}$$

No podemos resolver por logaritmos

2) $$\boxed{\int \frac{5}{4x^2+1}\cdot dx = \mathbf{5}\int \frac{1}{4x^2+1}\cdot dx}$$

Volvemos al principio para intentar por **arcotangente**

$$= \boxed{\int \frac{5}{4x^2+1}\cdot dx = \int \frac{5}{1+(\mathbf{2x})^2}\cdot dx =}$$

$$= \mathbf{5}\int \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot dx = \frac{5}{\mathbf{2}}\int \frac{\mathbf{2}\cdot 1}{1+(2x)^2}\cdot dx = \frac{5}{2}\,\boldsymbol{arco\ tg}\ (\mathbf{2x}) + \boldsymbol{C}$$

4. Integrales racionales

Cuando nos encontremos con la integral de un cociente de funciones polinómicas, lo primero que haremos será descartar la posibilidad de que se trate de una integral inmediata ya que:

* Si la derivada del denominador está en el numerador, podremos resolverla mediante **integración tipo Ln.**

* Si podemos subir todo el denominador como una potencia distinta de -1 y está su derivada al lado, podremos resolverla mediante **integración tipo potencial.**

* Debemos descartar también que sea **integración tipo arcoseno, arcocoseno, arcotangente.**

Una vez agotadas estas tres posibilidades de integración, estaremos delante de una **integración racional**, que no hubiéramos podido resolver de forma directa.

A continuación, explicaremos las reglas a seguir haciendo diferenciación entre dos métodos de integración en función del grado del polinomio del numerador y el del denominador:

Caso 1: Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador

Caso 2: Si el grado del denominador es mayor que el grado del numerador:

2.1) Si el denominador solo tiene raíces reales simples (no se repiten)

2.2) Si el denominador tiene alguna raíz real múltiple (se repiten)

Caso 1 $\rightarrow$ $\boxed{\int \frac{D(x)}{d(x)}dx \rightarrow \text{si grado numerador} \geq \text{grado denominador}}$

Hacemos la división entre los polinomios $D(x)$ y $d(x)$ por el método "de toda la vida":

$$\begin{array}{l|l} D(x) & d(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array}$$

¿Recuerdas cómo se comprobaba una división? $\rightarrow$ $\boxed{D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)}$

Si dividimos la expresión anterior entre $d(x)$ y aplicamos integración a ambos lados:

$$\frac{D(x)}{d(x)} = \frac{\cancel{d(x)} \cdot C(x)}{\cancel{d(x)}} + \frac{R(x)}{d(x)} \rightarrow \boxed{\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}}$$

$$\boxed{\int \frac{D(x)}{d(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{d(x)}dx}$$

Aplicaremos esta fórmula para resolver

¡¡Vamos a verlo directamente con un ejemplo!!

$$\int \frac{x+2}{x-2}dx$$

Podemos descartar integración inmediata ya que:

* La derivada del denominador no está en el numerador
* No podemos subir todo el denominador como una potencia distinta de -1
* No es del tipo arco

Función racional
Caso 1:
gº N. ≥ gº D.

$$\begin{array}{r|l} x+2 & x-2 \\ \hline -x+2 & 1 \;\; C(x) \\ \hline R(x) \;\; 4 & \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}}$$

$$\boxed{\int \frac{x+2}{x-2}dx = \int 1dx + \int \frac{4}{x-2}dx} = \int 1dx + 4\int \frac{1}{x-2}dx = \boldsymbol{x + 4\ln|x-2| + C}$$

Vamos a resolver unos cuantos ejemplos para afianzar este tipo de integral:

$$a) \int \frac{2x^2-5x+6}{x^2+3}dx \;\; ; \quad b) \int \frac{x^3-5x^2+3x}{x^3}dx \;\; ; \quad c) \int \frac{3x^3+7x^2-2x+9}{x^2+1}dx$$

$$a) \int \frac{2x^2-5x+6}{x^2+3}dx$$

Podemos descartar integración inmediata → **Función racional. Caso 1: gº N. ≥ gº D.**

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-5x+6 & x^2+3 \\ \hline -2x^2 \quad\;\; -6 & 2 \;\; C(x) \\ \hline R(x) \;\; -5x & \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{2x^2-5x+6}{x^2+3} = 2 + \frac{-5x}{x^2+3}}$$

$$\boxed{\int \frac{2x^2-5x+6}{x^2+3}dx = \int 2dx + \int \frac{-5x}{x^2+3}dx} = \int 2dx - \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \boldsymbol{2x - \frac{5}{2}\ln|x^2+3| + C}$$

$$b) \int \frac{x^3-5x^2+3x}{x^3}dx$$

¡¡Fíjate!! Podemos aplicar las propiedades de las fracciones

$$\rightarrow \int \frac{x^3}{x^3}dx - \int \frac{5x^2}{x^3}dx + \int \frac{3x}{x^3}dx =$$

$$\int 1\,dx - 5\int \frac{1}{x}dx + 3\int x^{-2}\,dx = x - 5\ln|x| + 3\frac{x^{-1}}{-1} + C = \boldsymbol{x - 5\ln|x| - \frac{3}{x} + C}$$

c) $\int \frac{3x^3+7x^2-2x+9}{x^2+1}dx$ → **Podemos descartar integración inmediata** → **Función racional. Caso 1: $g^{\underline{o}}\,N. \geq g^{\underline{o}}\,D.$**

$$\begin{array}{rl}
3x^3+7x^2-2x+9 & \underline{\lfloor x^2+1} \\
\underline{-3x^3 \qquad -3x} & 3x+7 \\
7x^2-5x+9 & \quad C(x) \\
\underline{-7x^2 \qquad -7} & \\
-5x+2 & \\
R(x) &
\end{array}$$

→ $$\int \frac{3x^3+7x^2-2x+9}{x^2+1}dx = \int (3x+7)dx + \int \frac{-5x+2}{x^2+1}dx$$

Aplicando propiedades de fracción

$$\int (3x+7)dx + \int \frac{-5x+2}{x^2+1}dx = \int (3x+7)dx + \int \frac{-5x}{x^2+1}dx + \int \frac{2}{x^2+1}dx =$$

$$= \int (3x+7)dx - \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}dx = \mathbf{\frac{3x^2}{2} + 7x - \frac{5}{2}\ln\left|x^2+1\right| + 2\text{arco tg}\, x + C}$$

<u>**Caso 2.1**</u> →

$\int \frac{D(x)}{d(x)}dx$ → si grado denominador > grado numerador

Y el denominador solo tiene raíces reales simples (no se repiten)

Si el grado del denominador es mayor que el del numerador y <u>**solo tiene raíces simples**</u> (no se repiten), podemos expresar el integrando como una suma de fracciones de la siguiente forma:

$$\frac{D(x)}{d(x)} = \frac{\mathrm{A}}{(x-x_1)} + \frac{\mathrm{B}}{(x-x_2)} + \cdots + \frac{\mathrm{N}}{(x-x_n)}$$

Recuerda que todas son raíces simples (no se repiten)

De esta manera, podremos calcular los valores de A, B ... N y aplicar integración a ambos lados de la igualdad para resolver las <u>**integrales inmediatas de forma logarítmica**</u> que obtendremos:

$$\int \frac{D(x)}{d(x)}dx = \int \frac{\mathrm{A}}{(x-x_1)}dx + \int \frac{\mathrm{B}}{(x-x_2)}dx + \cdots + \int \frac{\mathrm{N}}{(x-x_n)}dx$$

Para facilitar la resolución de este tipo de integrales, podemos establecer los siguientes **pasos**:

1. Igualamos a cero el denominador y resolvemos la ecuación (buscamos sus raíces):

$$d(x) = 0 \rightarrow x = x_1\,, x = x_2 \,\ldots.\, x = x_n$$

2. Expresamos el integrando como una suma de fracciones de la siguiente forma:

$$\frac{D(x)}{\boxed{d(x)}} = \frac{D(x)}{(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdots(x - x_n)} = \frac{\mathrm{A}}{(x - x_1)} + \frac{\mathrm{B}}{(x - x_2)} + \cdots + \frac{\mathrm{N}}{(x - x_n)}$$

Suponiendo que el coeficiente del grado líder del denominador es 1

3. Despejamos y calculamos A, B, ... N siguiendo las siguientes pautas:

- Sacamos mínimo común múltiplo de la suma de fracciones y las expresamos como una sola:

$$\frac{D(x)}{(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdots(x - x_n)} = \frac{\mathrm{A}(x - x_2)(x - x_n) + \mathrm{B}(x - x_1)(x - x_n) + \cdots + \mathrm{N}(x - x_1)(x - x_2)}{(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdots(x - x_n)}$$

- Eliminamos denominadores a ambos lados de la igualdad:

$$D(x) = \mathrm{A}(x - x_2)(x - x_n) + \mathrm{B}(x - x_1)(x - x_n) + \cdots + \mathrm{N}(x - x_1)(x - x_2)$$

- Despejamos y calculamos A, B, ... N asignando valores a x. **El <u>truco</u> para ello es el siguiente:**

* Para despejar A, asignamos a x el valor de la raíz x_1 de forma que:

$$D(\boldsymbol{x_1}) = \mathrm{A}(\boldsymbol{x_1} - x_2)(\boldsymbol{x_1} - x_n) + B(\cancel{\boldsymbol{x_1} - x_1})(\boldsymbol{x_1} - x_n) + \cdots + \mathrm{N}(\cancel{\boldsymbol{x_1} - x_1})(\boldsymbol{x_1} - x_2)\,;$$

$$D(x_1) = \mathrm{A}(x_1 - x_2)(x_1 - x_n) \;\rightarrow\; \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{D(x_1)}}{\boldsymbol{(x_1 - x_2)(x_1 - x_n)}}$$

* Para despejar B, asignamos a x el valor de la raíz x_2 de forma que:

$$D(\boldsymbol{x_2}) = \mathrm{A}(\cancel{\boldsymbol{x_2} - x_2})(\boldsymbol{x_2} - x_n) + B(\boldsymbol{x_2} - x_1)(\boldsymbol{x_2} - x_n) + \cdots + \mathrm{N}(\boldsymbol{x_2} - x_1)(\cancel{\boldsymbol{x_2} - x_2})\,;$$

$$D(x_2) = B(x_2 - x_1)(x_2 - x_n) \;\rightarrow\; \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{D(x_2)}}{\boldsymbol{(x_2 - x_1)(x_2 - x_n)}}$$

* Para despejar N, asignamos a x el valor de la raíz x_n de forma que:

$$D(\boldsymbol{x_n}) = \mathrm{A}(\boldsymbol{x_n} - x_2)(\cancel{\boldsymbol{x_n} - x_n}) + B(\boldsymbol{x_n} - x_1)(\cancel{\boldsymbol{x_n} - x_n}) + \cdots + \mathrm{N}(\boldsymbol{x_n} - x_1)(\boldsymbol{x_n} - x_2)\,;$$

$$D(x_n) = \mathrm{N}(x_n - x_1)(x_n - x_2) \;\rightarrow\; \boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{D(x_n)}}{\boldsymbol{(x_n - x_1)(x_n - x_2)}}$$

4. Sustituimos los valores de A, B, ... N y calculamos las integrales inmediatas logarítmicas:

$$\int \frac{D(x)}{d(x)}dx = \int \frac{\mathbf{A}}{(x-x_1)}dx + \int \frac{\mathbf{B}}{(x-x_2)}dx + \cdots + \int \frac{\mathbf{N}}{(x-x_n)}dx\ ;$$

$$\int \frac{\boldsymbol{D(x)}}{\boldsymbol{d(x)}}\boldsymbol{dx} = \mathbf{A}\,\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_1}| + \mathbf{B}\,\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_2}| + \cdots + \mathbf{N}\,\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_n}| + \boldsymbol{C}$$

Parece complicado pero en cuanto lo veamos con un ejemplo ¡¡Verás que no es tan difícil!!

$\int \frac{x+1}{x^2-3x}dx$ — **Podemos descartar <u>integración inmediata</u>** → **Función racional. Caso 2.1: $\mathbf{g^{o}\ D.} > \mathbf{g^{o}\ N.}$**

1. Igualamos a cero el denominador y resolvemos la ecuación (buscamos sus raíces):

$$x^2-3x=0 \to x(x-3)=0\begin{cases} \boldsymbol{x=0} \\ x-3=0 \ \to\ \boldsymbol{x=3} \end{cases}$$

El denominador tiene dos raíces simples: $(\boldsymbol{x}-\mathbf{0})(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})$

2. Expresamos el integrando como una suma de fracciones de la siguiente forma:

$$\frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x^2-3x}} = \frac{x+1}{x(x-3)} = \frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{x}} + \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{x-3}}$$

3. Despejamos y calculamos A, B siguiendo las siguientes pautas:

- Sacamos mínimo común múltiplo de la suma de fracciones y las expresamos como una sola:

$$\frac{x+1}{x^2-3x} = \frac{x+1}{x(x-3)} = \frac{\boldsymbol{A(x-3)+Bx}}{\boldsymbol{x(x-3)}}$$

- Eliminamos denominadores a ambos lados de la igualdad:

$$\boldsymbol{x+1} = \mathbf{A}(\boldsymbol{x}-\mathbf{3}) + \mathbf{B}\boldsymbol{x}$$

* Para despejar A, asignamos a x el valor de la raíz $x=0$

$$(0)+1 = \mathrm{A}\cdot[(0)-3] + \cancel{\mathrm{B}\cdot(0)} \to 1 = -3A + 0 \to\ A = \frac{-1}{3}$$

* Para despejar B, asignamos a x el valor de la raíz $x=3$

$$(3)+1 = \mathrm{A}\cdot[\cancel{(3)-3}] + \mathrm{B}\cdot(3) \to 4 = 0 + 3\mathrm{B} \to\ \mathbf{B} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

4. Sustituimos los valores de A, B y calculamos las integrales inmediatas logarítmicas:

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x}dx = \int \frac{\mathbf{-1/3}}{x}dx + \int \frac{\mathbf{4/3}}{(x-3)}dx = \frac{-1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{(x-3)}dx =$$

$$= \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}| + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}-\mathbf{3}| + \boldsymbol{C}$$

Vamos a resolver unos cuantos ejemplos para afianzar este tipo de integral:

$$a)\int \frac{5x-2}{x^2-5x+6}dx\ ;\ b)\int \frac{3x+4}{2x^3+x^2-2x-1}dx\ ;\ c)\int \frac{2x^2-1}{4x^3-6x-1}dx$$

$$a)\int \frac{5x-2}{x^2-5x+6}dx \longrightarrow$$ **Podemos descartar integración inmediata** $\longrightarrow$ **Función racional. Caso 2.1: $\mathbf{g^{o}\,D. > g^{o}\,N.}$**

1. Igualamos a cero el denominador y resolvemos la ecuación (buscamos sus raíces):

$$x^2-5x+6=0 \to x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}\begin{cases} x=\dfrac{5+1}{2} \to \boldsymbol{x=3} \\ x=\dfrac{5-1}{2} \to \boldsymbol{x=2} \end{cases}$$

El denominador tiene dos raíces simples: $\boldsymbol{(x-3)\cdot(x-2)}$

2. Expresamos el integrando como una suma de fracciones de la siguiente forma:

$$\frac{\mathbf{5x-2}}{\mathbf{x^2-5x+6}}=\frac{5x-2}{(x-3)(x-2)}=\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{(x-3)}}+\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{(x-2)}}$$

3. Despejamos y calculamos A, B siguiendo las siguientes pautas:

- Sacamos mínimo común múltiplo de la suma de fracciones y las expresamos como una sola:

$$\frac{5x-2}{x^2-5x+6}=\frac{5x-2}{(x-3)(x-2)}=\frac{\boldsymbol{A(x-2)+B(x-3)}}{\boldsymbol{(x-3)(x-2)}}$$

- Eliminamos denominadores a ambos lados de la igualdad:

$$\boldsymbol{5x-2=A(x-2)+B(x-3)}$$

* Para despejar A, asignamos a x el valor de la raíz $x=3$

$$5(3)-2=A[(3)-2]+B[\cancel{(3)-3}]\ \to\ 13=A+0\ \to\ \boldsymbol{A=13}$$

* Para despejar B, asignamos a x el valor de la raíz $x=2$

$$5(2)-2=A[\cancel{(2)-2}]+B[(2)-3]\ \to\ 8=0-B\ \to\ \boldsymbol{B=-8}$$

4. Sustituimos los valores de A, B y calculamos las integrales inmediatas logarítmicas:

$$\int \frac{5x-2}{x^2-5x+6}dx=\int \frac{\mathbf{13}}{(x-3)}dx+\int \frac{\mathbf{-8}}{(x-2)}dx=13\int \frac{1}{(x-3)}dx-8\int \frac{1}{(x-2)}dx=$$

$$\boldsymbol{=13\ln|x-3|-8\ln[x-2]+C}$$

$b) \int \frac{3x+4}{2x^3+x^2-2x-1}dx$ —— **Podemos descartar <u>integración inmediata</u>** $\longrightarrow$ **Función racional. Caso 2.1: g^{o} D. > g^{o} N.**

1. Igualamos a cero el denominador y resolvemos la ecuación (buscamos sus raíces):

$2x^3+x^2-2x-1=0 \rightarrow$ Aplicamos Ruffini $\rightarrow$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -2 & -1 \\ +1 & & 2 & 3 & +1 \\ \hline & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

Solución $x=1$

$$2x^2+3x+1=0 \rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm 1}{4}\begin{cases} x=\dfrac{-3+1}{4}\rightarrow \boldsymbol{x=\dfrac{-1}{2}} \\ x=\dfrac{-3-1}{4}\rightarrow \boldsymbol{x=-1}\end{cases}$$

El denominador tiene tres raíces simples: $\boldsymbol{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+1/2)}$

¡¡Importante!! **<u>Hay que multiplicar toda la descomposición por el coeficiente del grado líder.</u>** Hasta ahora hemos factorizado polinomios donde el coeficiente del grado máximo era **uno** y no lo teníamos en cuenta. Pero recuerda que la descomposición factorial de un polinomio es: $\mathrm{A}x^n+\mathrm{B}x^{n-1}+\cdots+\mathrm{N}=\mathrm{A}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$

2. Expresamos el integrando como una suma de fracciones de la siguiente forma:

$$\frac{\boldsymbol{3x+4}}{\boldsymbol{2x^3+x^2-2x-1}}=\frac{3x+4}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+1/2)}=\frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{2(x-1)}}+\frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{(x+1)}}+\frac{\mathbf{C}}{\boldsymbol{(x+1/2)}}$$

El numero 2 lo podemos poner en cualquier denominador

3. Despejamos y calculamos A, B y C siguiendo las siguientes pautas:

- Sacamos mínimo común múltiplo de la suma de fracciones y las expresamos como una sola:

$$\frac{3x+4}{2(x-1)(x+1)(x+1/2)}=\frac{\mathbf{A}\boldsymbol{(x+1)(x+1/2)+2}\mathbf{B}\boldsymbol{(x-1)(x+1/2)+2}\mathbf{C}\boldsymbol{(x-1)(x+1)}}{\boldsymbol{2(x-1)(x+1)(x+1/2)}}$$

- Eliminamos denominadores a ambos lados de la igualdad:

$$\boldsymbol{3x+4=A(x+1)(x+1/2)+2B(x-1)(x+1/2)+2C(x-1)(x+1)}$$

* Para despejar A, asignamos a x el valor de la raíz $x = 1$

$$3(1)+4 = A[(1)+1]\left[(1)+\frac{1}{2}\right] + 2B[\cancel{(1)-1}]\left[(1)+\frac{1}{2}\right] + 2C[\cancel{(1)-1}][(1)+1];$$

$$7 = A\cdot 2\cdot\frac{3}{2}+0+0 \rightarrow 7 = 3A \rightarrow \boldsymbol{A=\frac{7}{3}}$$

* Para despejar B, asignamos a x el valor de la raíz $x = -1$

$$3(-1)+4 = A[\cancel{(-1)+1}]\left[(-1)+\frac{1}{2}\right] + 2B[(-1)-1]\left[(-1)+\frac{1}{2}\right] + 2C[(-1)-1][\cancel{(-1)+1}];$$

$$1 = 0+2B\cdot(-2)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)+0 \rightarrow 1 = 2B \rightarrow \boldsymbol{B=\frac{1}{2}}$$

* Para despejar C, asignamos a x el valor de la raíz $x = -1/2$

$$3\left(-\frac{1}{2}\right)+4 = A\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right]\left[\cancel{\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}\right] + 2B\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right]\left[\cancel{\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}\right] + 2C\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right]\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right];$$

$$\frac{-3}{2}+4 = 0+0+\ 2C\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{1}{2} \rightarrow \frac{5}{2}=\frac{-3}{2}C \rightarrow 5=-3C \rightarrow C=\frac{-5}{3}$$

4. Sustituimos los valores de A, B y C y calculamos las integrales inmediatas logarítmicas:

$$\int\frac{3x+4}{2x^3+x^2-2x-1}dx = \int\frac{7/3}{2(x-1)}dx + \int\frac{1/2}{(x+1)}dx + \int\frac{-5/3}{(x+1/2)}dx =$$

$$=\frac{7}{6}\int\frac{1}{(x-1)}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)}dx-\frac{5}{3}\int\frac{1}{(x+1/2)}dx=$$

$$\boldsymbol{=\frac{7}{6}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{5}{3}\ln|x+1/2|+C}$$

$c)\int\frac{2x^2-1}{4x^3-6x-1}dx$ → ¡¡OJO!! **Podemos hacer <u>integración inmediata</u>** → **Integración logarítmica**

$$\int\frac{2x^2-1}{4x^3-6x-1}dx=\frac{1}{6}\int\frac{6(2x^2-1)}{4x^3-6x-1}dx=\frac{1}{6}\int\frac{12x^2-6}{4x^3-6x-1}dx=\boldsymbol{\frac{1}{6}\ln\left|4x^3-6x-1\right|+C}$$

Caso 2.2 →

$$\int \frac{D(x)}{d(x)}dx \to \text{si grado denominador} > \text{grado numerador}$$

Y el denominador tiene alguna raíz real múltiple (se repiten)

Si el grado del denominador es mayor que el del numerador y tiene <u>alguna raíz múltiple</u> (se repiten), podemos expresar el integrando como una suma de fracciones de la siguiente forma:

$$\frac{D(x)}{d(x)} = \underbrace{\frac{A}{(x-x_1)}}_{\text{Raíz simple}} + \underbrace{\frac{B}{(x-x_2)}}_{\text{Raíz simple}} + \cdots + \underbrace{\frac{N_1}{(x-x_n)^1} + \frac{N_2}{(x-x_n)^2} + \cdots \frac{N_k}{(x-x_n)^k}}_{\text{Raíz múltiple repetida } k \text{ veces}}$$

Seguiremos los mismos pasos que en las integrales anteriores para calcular $A, B \dots N_1, N_2 \dots N_k$ con la salvedad de que tendremos más incógnitas que raíces al sustituir, por lo que tendremos que asignar valores aleatorios a x en la medida que necesitemos.

Finalmente aplicamos integración a ambos lados de la igualdad y resolvemos las **<u>integrales inmediatas logarítmicas y potenciales</u>** que obtendremos.

Como ejemplo, vamos a descomponer la siguiente integral en suma de fracciones e indicar el tipo de resolución inmediata (logarítmica o potencial) que tendría finalmente cada una:

$$\int \frac{x+3}{(x-1)(x+2)^2(x-5)^3}dx$$

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+2)^2(x-5)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x-5)} + \frac{E}{(x-5)^2} + \frac{F}{(x-5)^3}$$

$$\int \frac{A}{(x-1)}dx + \int \frac{B}{(x+2)}dx + \int \frac{C}{(x+2)^2}dx + \int \frac{D}{(x-5)}dx + \int \frac{E}{(x-5)^2}dx + \int \frac{F}{(x-5)^3}dx$$

$$\underbrace{\int \frac{A}{(x-1)}dx + \int \frac{B}{(x+2)}dx + \int \frac{D}{(x-5)}dx}_{\text{Resolución inmediata logarítmica}} + \underbrace{\int \frac{C}{(x+2)^2}dx + \int \frac{E}{(x-5)^2}dx + \int \frac{F}{(x-5)^3}dx}_{\text{Resolución inmediata potencial}}$$

Vamos a resolver unos cuantos ejemplos para afianzar este tipo de integral:

$$a) \int \frac{2x+3}{x^2-2x+1}dx \ ; \ b) \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx \ ; \ c) \int \frac{dx}{(x^2+2x)(x+2)} \ ; \ d) \int \frac{x^2+7x+8}{x^2+6x+9}dx$$

$a) \int \frac{2x+3}{x^2-2x+1}dx$ —— **Podemos descartar <u>integración inmediata</u>** $\longrightarrow$ **Función racional. Caso 2.2: gº D. > gº N.**

1. Igualamos a cero el denominador y resolvemos la ecuación (buscamos sus raíces):

$$x^2-2x+1=0 \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 0}{2}\begin{cases} x=\frac{2+0}{2}\rightarrow \boldsymbol{x=1} \\ x=\frac{2-0}{2}\rightarrow \boldsymbol{x=1}\end{cases}$$

El denominador tiene una raíz doble:
$(x-1)\cdot(x-1)=(x-1)^2$

2. Expresamos el integrando como una suma de fracciones de la siguiente forma:

$$\frac{\mathbf{2x+3}}{\mathbf{x^2-2x+1}}=\frac{2x+3}{(x-1)(x-1)}=\frac{2x+3}{(x-1)^2}=\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{(x-1)}}+\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{(x-1)^2}}$$

3. Despejamos y calculamos A, B siguiendo las siguientes pautas:

- Sacamos mínimo común múltiplo de la suma de fracciones y las expresamos como una sola:

$$\frac{2x+3}{x^2-2x+1}=\frac{2x+3}{(x-1)(x-1)}=\frac{2x+3}{(x-1)^2}=\frac{\boldsymbol{A(x-1)+B}}{\boldsymbol{(x-1)^2}}$$

- Eliminamos denominadores a ambos lados de la igualdad: $\boldsymbol{2x+3=A(x-1)+B}$

* Para despejar B, asignamos a x el valor de la raíz $x=1$

$$2(1)+3=A[\cancel{(1)-1}]+B\rightarrow\ 5=0+B\ \rightarrow\ B=5$$

* ¡¡OJO!! Para despejar A, no podemos volver a asignar a x el valor de la raíz $x=1$ ya que nos daría la ecuación anterior. Tendremos que asignarle el valor que nosotros consideremos fácil para operar. En este caso vamos a elegir $x=0$:

$$2(0)+3=\mathrm{A}(0-1)+\mathrm{B}\ \rightarrow\ 3=-\mathrm{A}+B\ \rightarrow\ 3=-A+5\ \rightarrow\ A=2$$

4. Sustituimos los valores de A, B y calculamos la integral inmediata logarítmica y potencial:

$$\int\frac{2x+3}{x^2-2x+1}dx=\int\frac{\mathbf{2}}{(x-1)}dx+\int\frac{\mathbf{5}}{(x-1)^2}dx=2\int\frac{1}{(x-1)}dx+5\int(x-1)^{-2}\,dx=$$

$$=2\ln|x-1|+\frac{5(x-1)^{-1}}{-1}+C=2\ln|x-1|-\frac{5}{(x-1)^1}+C=\boldsymbol{2\ln|x-1|-\frac{5}{x-1}+C}$$

$b) \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx$ —— **Podemos descartar integración inmediata** $\longrightarrow$ **Función racional. Caso 2.2: $g^{\underline{o}}$ D. > $g^{\underline{o}}$ N.**

1. Igualamos a cero el denominador y resolvemos la ecuación (buscamos sus raíces):

$$x^2(x-1)=0\begin{cases} x^2=0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x=0} & \boxed{\text{Solución doble}} \\ x-1=0 \rightarrow \boldsymbol{x=1} & \boxed{\text{Solución simple}} \end{cases}$$

2. Expresamos el integrando como una suma de fracciones de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-1)}}$$

3. Despejamos y calculamos A, B y C siguiendo las siguientes pautas:

- Sacamos mínimo común múltiplo de la suma de fracciones y las expresamos como una sola:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-1)}=\boldsymbol{\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}}$$

- Eliminamos denominadores a ambos lados de la igualdad:

$$\boldsymbol{x^2+1=\mathrm{A}x(x-1)+\mathrm{B}(x-1)+\mathbb{C}x^2}$$

- Despejamos y calculamos A, B y C asignando los valores a x que nos convengan:

Si $\boldsymbol{x=0} \rightarrow (0)^2+1=\cancel{\mathrm{A}(0)}\cancel{[(0)}-1]+\mathrm{B}[(0)-1]+\cancel{\mathrm{C}(0)^2} \rightarrow \; 1=-\mathrm{B} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\mathrm{B}=-1}$

Si $\boldsymbol{x=1} \rightarrow (1)^2+1=\mathrm{A}(1)[\cancel{(1)-1}]+\mathrm{B}[\cancel{(1)-1}]+\mathrm{C}(1)^2 \rightarrow \; 2=\mathrm{C} \quad\rightarrow\; \boldsymbol{\mathrm{C}=2}$

Si $\boldsymbol{x=-1} \rightarrow (-1)^2+1=\mathrm{A}(-1)[(-1)-1]+\mathrm{B}[(-1)-1]+\mathrm{C}(-1)^2 \;\rightarrow\; 2=2\mathrm{A}-2\mathrm{B}+\mathrm{C}\,;$

$2=2\mathrm{A}-2(\boldsymbol{-1})+(\boldsymbol{2}) \;\rightarrow 2=2\mathrm{A}+4 \;\rightarrow\; \mathrm{A}={}^{-2}/_{2} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\mathrm{A}=-1}$

4. Sustituimos los valores de A, B y C y calculamos la integral inmediata logarítmica y potencial:

$$\int\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx=\int\frac{\boldsymbol{-1}}{x}dx+\int\frac{\boldsymbol{-1}}{x^2}dx+\int\frac{\boldsymbol{2}}{(x-1)}dx=-\int\frac{1}{x}dx-\int x^{-2}\,dx+2\int\frac{1}{(x-1)}dx=$$

$$=-\ln|x|-\frac{x^{-1}}{-1}+2\ln|x-1|+C=\boldsymbol{-\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|+C}$$

$c) \int \frac{dx}{(x^2+2x)(x+2)}$ — **Podemos descartar integración inmediata** → **Función racional. Caso 2.2: g^o D. > g^o N.**

¡¡OJO!! Fíjate que el grado del denominador es tres: $x^2 \cdot x = x^3$

1. Igualamos a cero el denominador y resolvemos la ecuación (buscamos sus raíces):

$(x^2+2x)(x+2) = 0$ (Sacamos factor común al primer paréntesis)

$$x(x+2)(x+2) = x(x+2)^2 = 0 \begin{cases} \boldsymbol{x=0} & \boxed{\text{Solución simple}} \\ x+2=0 \to \boldsymbol{x=-2} & \boxed{\text{Solución doble}} \end{cases}$$

2. Expresamos el integrando como una suma de fracciones de la siguiente forma:

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x(x+2)^2}} = \frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{x}} + \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{(x+2)}} + \frac{\mathbf{C}}{\boldsymbol{(x+2)^2}}$$

3. Despejamos y calculamos A, B y C siguiendo las siguientes pautas:

- Sacamos mínimo común múltiplo de la suma de fracciones y las expresamos como una sola:

$$\frac{1}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx}{x(x+2)^2}$$

- Eliminamos denominadores a ambos lados de la igualdad: $\mathbf{1} = \mathrm{A}(x+2)^2 + \mathbf{B}x(x+2) + \mathbf{C}x$

- Despejamos y calculamos A, B y C asignando los valores a x que nos convengan:

Si $\boldsymbol{x=0} \to 1 = A[(0)+2]^2 + \cancel{B(0)}[(0)+2] + \cancel{C(0)} \to 1 = 4A \to \boldsymbol{A = {}^{1}/_{4}}$

Si $\boldsymbol{x=-2} \to 1 = A[\cancel{(-2)+2}]^2 + B(-2)[\cancel{(-2)+2}] + C(-2) \to 1 = -2C \to \boldsymbol{C = -{}^{1}/_{2}}$

Si $\boldsymbol{x=1} \to 1 = A[(1)+2]^2 + B(1)[(1)+2] + C(1) \to 1 = 9A + 3B + C$;

$$1 = 9\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right) + 3\mathrm{B} + \left(\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}\right) \to 1 = \frac{9}{4} + 3\mathrm{B} - \frac{1}{2} \to 1 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = 3\mathrm{B} \to \frac{-3}{4} = 3\mathrm{B} \to \mathbf{B} = \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{4 \cdot 3}} = {}^{\mathbf{-1}}/_{\mathbf{4}}$$

4. Sustituimos los valores de A, B y C y calculamos la integral inmediata logarítmica y potencial:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x)(x+2)} = \int \frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}}{x} dx + \int \frac{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}}{(x+2)} dx + \int \frac{\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}}{(x+2)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+2)} dx - \frac{1}{2}\int (x+2)^{-2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x+2| - \frac{1}{2}\frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}| - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{ln}|\boldsymbol{x+2}| + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{2(x+2)}} + C$$

$d) \int \frac{x^2+7x+8}{x^2+6x+9}dx$ — **Podemos descartar integración inmediata** → **Función racional. Caso 1: g° N. = g° D.**

$$\begin{array}{r|l} x^2+7x+8 & x^2+6x+9 \\ \hline -x^2-6x-9 & 1 \; C(x) \\ \hline x-1 & \end{array}$$

$R(x)$

→ $\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$ → $\frac{x^2+7x+8}{x^2+6x+9} = 1 + \frac{x-1}{x^2+6x+9}$

$$\int \frac{x^2+7x+8}{x^2+6x+9}dx = \int 1dx + \int \frac{x-1}{x^2+6x+9}dx =$$

La integral a resolver está formada por una integral inmediata y una integral racional donde el g° D. > g° N. (Caso 2.2). **Así que vamos a calcular esta última**

¡¡Fíjate!! Hemos pasado de una integral caso 1 a una integral caso 2... ¡¡Esto es un clásico!!

1. Igualamos a cero el denominador y resolvemos la ecuación (buscamos sus raíces):

$$x^2+6x+9=0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1} = \frac{-6\pm0}{2} \begin{cases} x = \frac{-6+0}{2} \rightarrow x=-3 \\ x = \frac{-6-0}{2} \rightarrow x=-3 \end{cases}$$

El denominador tiene una raíz doble: $(x+3)\cdot(x+3)$

2. Expresamos el integrando como una suma de fracciones de la siguiente forma:

$$\frac{x-1}{x^2+6x+9} = \frac{x-1}{(x+3)^2} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

3. Despejamos y calculamos A, B siguiendo las siguientes pautas:

- Sacamos mínimo común múltiplo de la suma de fracciones y las expresamos como una sola:

$$\frac{x-1}{x^2+6x+9} = \frac{x-1}{(x+3)^2} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+3)^2} = \frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2}$$

- Eliminamos denominadores a ambos lados de la igualdad: $x-1 = A(x+3)+B$

- Despejamos y calculamos A, B asignando los valores a x que nos convengan:

Si $x=-3 \rightarrow (-3)-1 = A[\cancel{(-3)+3}]+B \rightarrow -4=B \rightarrow B=-4$

Si $x=0 \rightarrow (0)-1 = A[(0)+3]+B \rightarrow -1=3A+B \rightarrow -1=3A-4 \rightarrow A={}^3/_3=1$

4. Sustituimos los valores de A, B y calculamos la integral:

$$\int \frac{x-1}{x^2+6x+9}dx = \boxed{\int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})}\boldsymbol{dx} + \int \frac{\mathbf{-4}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})^{\mathbf{2}}}\boldsymbol{dx}}$$

Sustituimos en la integral principal

$$\int \frac{x^2+7x+8}{x^2+6x+9}dx = \int 1dx + \int \frac{x-1}{x^2+6x+9}dx = \int 1dx + \boxed{\int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})}\boldsymbol{dx} + \int \frac{\mathbf{-4}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})^{\mathbf{2}}}\boldsymbol{dx}} =$$

$$= \int 1dx + \int \frac{1}{(x+3)}dx - 4\int (x+3)^{-2}dx = x + \ln|x+3| - 4\frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \boldsymbol{x} + \mathbf{ln}|\boldsymbol{x}+\mathbf{3}| + \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{3}} + \boldsymbol{C}$$