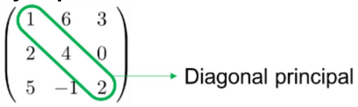
ÁLGEBRA

TEMA 13: INTRODUCCIÓN PARA 2º DE BACH

MATRICES

Una matriz es una “caja” de números ordenados en filas y columnas.

Ejemplo:



Matriz cuadrada de 3 filas x 3 columnas. Las filas se miran en horizontal y las columnas en vertical. Se llama “cuadrada” porque el nº filas = nº columnas

Las que nos importan son las matrices cuadradas 3x3 y 2x2. Más adelante veremos que nos van a servir para solucionar sistemas de ecuaciones de forma rápida y sencilla. En los siguientes apuntes se trabaja siempre sobre FILAS (que suele ser lo más habitual) pero se podría hacer exactamente lo mismo con columnas. Eso sí, o trabajamos siempre con filas o siempre con columnas (no mezclar)

TIPOS DE MATRICES

FILA NULA

Si todos sus elementos son 0 (es decir, es una fila de ceros).

En el ejemplo siguiente la F_2 es nula: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

MATRIZ IDENTIDAD

Matriz cuadrada que tiene todo unos en la diagonal principal y el resto son ceros.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES BÁSICAS

MULTIPLICAR (O DIVIDIR) UNA FILA POR UN Nº

Hay que multiplicar TODOS los elementos de esa fila por ese nº.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\cdot F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

SUMAR (O RESTAR) DOS FILAS

Se suman elemento a elemento. El resultado se escribe en la 1ª fila que indicamos, por ejemplo si hago $F_3 + F_1$, sumo ambas filas y escribo el resultado de la suma en F_3 porque es la que se indicó de primera.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

INTERCAMBIAR FILAS

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

COMBINACIÓN LINEAL DE FILAS

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1-3F_3} \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 3\cdot(-1) & 2\cdot 2 - 3\cdot 2 & 2\cdot(-1) - 3\cdot(-1) \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

El resultado lo escribimos siempre en la fila que se indica primero, en este ejemplo F_1

RANGO DE UNA MATRIZ

Es el número de filas linealmente independientes.

> El rango de una matriz y el rango de la matriz transformada mediante combinaciones lineales es el mismo.

MÉTODO DE GAUSS PARA EL CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

Queremos transformar la matriz original en la matriz identidad, la idea es, mediante combinaciones lineales y permutaciones, llegar a transformarla haciendo unos en la diagonal principal y ceros en el resto.

Paso 1: fijamos la COLUMNA 1, C_1 (columna ¡ojo!, NO fila)

Paso 2: Hacemos 1 en el elemento correspondiente a la diagonal principal

Paso 3: Hacemos 0 en los otros dos elementos de esa columna

Paso 4: repetimos el mismo proceso en las otras columnas

> r(A) = nº de FILAS NO NULAS

SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES (TODAS LAS ECUACIONES DE GRADO 1)

A cualquier sistema de ecuaciones lineales, podemos asociarle dos matrices:

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ La matriz $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right)$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS 3X3 POR MATRICES

- Si r(A) = r(A*) = 3 = nº de incógnitas $\Longrightarrow$ S.C.D. existe una única solución
- Si r(A) = r(A*) = 2 < nº de incógnitas $\Longrightarrow$ S.C.I. existen infinitas soluciones
- Si r(A) $\neq$ r(A*) $\Longrightarrow$ S.I. NO tiene solución

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE GAUSS

1. Dado cualquier sistema lineal le asociamos una matriz y su matriz ampliada (la que se obtiene de añadir la columna de los términos independientes)
2. Por el método de Gauss intentamos diagonalizar la matriz, **incluyendo en las operaciones la columna de la ampliada.**
3. Por el número de filas nulas sabemos el rango de la matriz y podemos discutir el sistema.
4. En el caso de S.C.D. la solución se obtiene como la última columna (la del término independiente de la ampliada) una vez hayamos diagonalizado la matriz.

Ejemplo

Estudiar el sistema $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ y encontrar su solución, si la tiene

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 5F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$r(A)=r(A^*)=3=nº\ de\ incógnitas, Sistema\ Compatible\ y\ Determinado$$

$$la\ solución\ es \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En lugar de diagonalizar la matriz, el método se puede abreviar y triangularizar (haciendo ceros debajo de la diagonal principal)

FICHA SISTEMAS LINEALES POR GAUSS

1. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+2z=1 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases}$ $solución\ x=-9, y=4, z=7$

2. $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+y+2z=0 \\ x-y+2z=1 \end{cases}$ $solución\ x=1, y=-1, z=-\frac{1}{2}$

3. $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ $solución: No\ tiene\ solución, S.I.$

4. $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+3z=2 \\ 2x+2y+6z=3 \end{cases}$ $solución: SCI\ (infinitas\ soluciones)\quad x=2-3\lambda, y=-\frac{1}{2}, z=\lambda, con\ \lambda\in\mathbb{R}$

5. $\begin{cases} y+z=1 \\ 2x+2y+2z=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ $solución: S.I., no\ tiene\ solución$

6. $\begin{cases} y+z=1 \\ -x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ $solución: x=1, y=1, z=0$

7. $\begin{cases} y+z=1 \\ 2y+2z=2 \\ x+z=0 \end{cases}$ $SCI\ (infinitas\ soluciones) x=-\lambda, y=1-\lambda, z=\lambda, con\ \lambda\in\mathbb{R}$

8. $\begin{cases} 3x+y+2z=15 \\ 2x+4y+z=20 \\ x+7y=25 \end{cases}$ $solución: S.C.I.\, x=-5-\lambda, y=30+\lambda, z=\lambda, con\ \lambda\epsilon\mathbb{R}$

9. $\begin{cases} x+y+z=26 \\ 1{,}4x+1{,}25y+1{,}5z=35{,}2 \\ 1{,}25y+z=1{,}5z+y \end{cases}$ $solución: SCD, x=8, y=12, z=6$

10. $\begin{cases} 3x-6y=1 \\ 2x-y-6z=1 \\ x-3y+2z=1 \end{cases}$ $solución: S.I.\, no\ tiene\ solución$