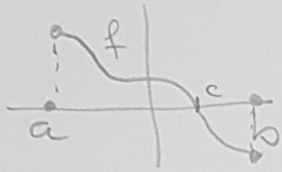
2022 Castilla-Mancha EXT 6b $\boxed{\text{Fácil}}$ Bolzano ①

Th Bolzano

$$\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ f \text{ cont } [a,b] \\ f(a)f(b)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\in(a,b)\ /\ f(c)=0$$

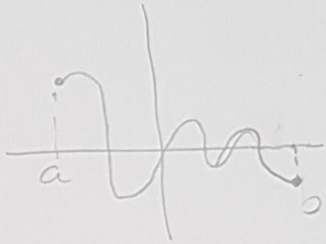
INT. Geométrica



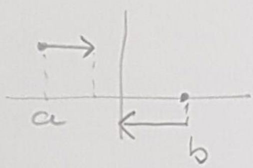
si la función es continua en un intervalo y en él cambia de signo ⇒ necesariamente corta al eje de las X AL MENOS en un pto.

Observaciones

- El pto <u>no</u> tiene por qué ser único

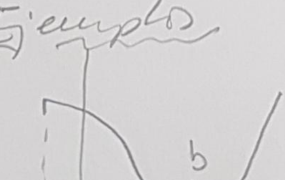


- Si la función NO es continua
  ⇒ no tiene p.q. cumplirse el th.
  (la continuidad <u>es</u> <u>condición</u> NECESARIA)

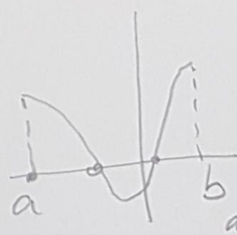


- $\not\Leftarrow$ puede ocurrir que $\exists\, c\in(a,b)$ tq $f(c)=0$ pero eso <u>no</u> implica ni que la función sea continua ni que cambie de signo entre a y b

Ejemplos



Esta función tiene un pto de corte pero NO es continua



Esta función es cont. y tiene 2 ptos de corte sin embargo $f(a)f(b)>0$

6b $f(x)=\dfrac{2e^x-8x-3}{x^2+2}$ buscamos justificar que $\exists c\in Dom f$ tq $f(c)=0$

f cont por ser cociente de dos funciones continuas y el denominador $x^2+2>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

tenemos que buscar un intervalo en el que haya un cambio de signo

Como $x^2+2>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, sólo tenemos q. fijarnos en el signo del numerador $\underbrace{2e^x}_{\text{exponencial}}\underbrace{-8x-3}_{\text{recta}}$

exponencial crece muy rápida; recta decrece a velocidad constante -8

pruebo $x=0\rightarrow 2e^0-8\cdot 0+(-3)<0$

$x=1\Rightarrow 2e-8-3<0$

$\left.\begin{array}{l} x=2\Rightarrow 2e^2-8\cdot 2-3<0 \\ x=3\Rightarrow 3e^3-8\cdot 2-3>0\end{array}\right\}$ cambia el signo

Podemos tomar el intervalo $[2,3]$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont en } [2,3] \\ f(2)\,f(3)<0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(2,3)$ t.q $f(c)=0$

Así hemos garantizado que la ecuación $2e^x-8x-3=0$ tiene al menos una solución en $[2,3]$

Con geogebra se puede seguir aproximando hasta las milésimas o hasta donde se quiera

$c\in(2'410,\ 2'412)$

2 2022 Castilla-Mancha Ext 6b **Muy Fácil** obvio

$f(x)=x+\operatorname{sen}x-2$ ¿$\exists c\in(0,\frac{\pi}{2})\,/\,f(c)=0$?

(ya nos dan ellos el intervalo, no hay que buscar a nib

$f(0)=0+\operatorname{sen}0-2=-2<0$

$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-2=\frac{\pi}{2}-1>0$

f es suma de la función seno y un polinomio $\Rightarrow$ f es cont. en $\mathbb{R}$, en particular lo es en $[0,\frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow$ por th Bolzano $\exists c\in(0,\frac{\pi}{2})$ t.q $f(c)=0$

2022 Castilla-León Ext ej. 8a   Bolzano (3)

{interesante} $f(x)=x^3-4x^2+3x$ en $[0,2]$

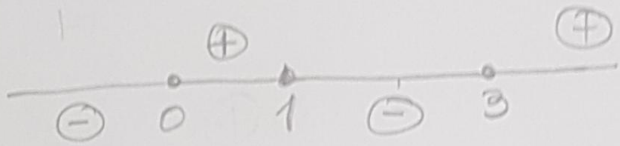
Estudiar el signo de f en ese intervalo

Primero busco sus raíces (es un polinomio, así que es fácil) $x^3-4x^2+3x = x(x^2-4x+3) \to \boxed{x=0}$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \begin{cases}\boxed{3}\\ \boxed{1}\end{cases}$$

El polinomio es de grado 3 $\Rightarrow$ tiene exactamente 3 raíces que son: 0, 1, y 3 (ni una más ni una menos)

Estudiamos el signo de f



Si $x<0$ $\Rightarrow$ p. ej. $-1 \to -1-4-3<0$

Entre -1 y 0 no hay más raíces así que el signo de f en $(-\infty,0)$ tiene que ser ⊖ (de lo contrario si $\exists\, a \in (-\infty,0)$ tq $f(a)>0 \Rightarrow$ por el th. de Bolzano encontraríamos otra raíz a la izqda del 0, lo que no es posible (sólo lo son 0, 1 y 3) $\Rightarrow f(x)< \ \forall x\in(-\infty,0)$

Si $x\in(0,1)$

p. ejemplo $x=\frac{1}{2} \to f(\frac{1}{2}) = ⊕ \Rightarrow f(x)>0\ \forall x\in(0,1)$ en caso contrario por Bolzano tendría que existir otra raíz, lo que es imposible

Si $x\in(1,3)$, $f(2)<0$

Por el mismo razonamiento se puede concluir que $f(x)<0\ \forall x\in(1,3)$

Si $x>3$ p ej. $f(4)>0 \Rightarrow$ aplicando el mismo razonamiento $f(x)>0\ \forall x>4$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ comprobar cumple Bolzano en $[-1,1]$

f es cociente de funciones polinómicas (continuas)

$\Rightarrow$ f será continua donde esté bien definida, i.e. donde $x^2+1 \neq 0$; como $x^2+1>0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ no hay problema, está bien definida $\forall x \in \mathbb{R}$ y por tanto f CONT en $\mathbb{R}$, en particular f es continua en $[-1,1]$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} < 0 \\ f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1)\cdot f(1) < 0$$

$\Rightarrow$ por el th. Bolzano $\exists c \in (-1,1)$ tq $f(c)=0$

---

22 Navarra - Ext 7 Difícil

$f(x) = Ln\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{6}x - \cos\frac{\pi}{6}x\right)$ para $x \in [2,4]$

las funciones seno y coseno son cont. en $\mathbb{R}$

la función $Ln\,x$ es continua EN SU DOMINIO $(0,+\infty)$

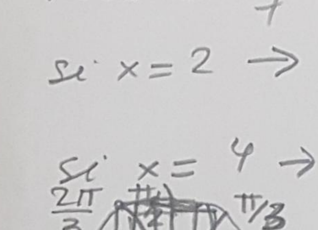
por tanto para que f continua en $x \in [2,4]$ t.q.d. que $\text{sen}\,\frac{\pi}{6}x - \cos\frac{\pi}{6}x > 0$

$x \in [2,4]$

Veamos quién es en realidad $\text{sen}\,\frac{\pi}{6}x - \cos\frac{\pi}{6}x$ en $[2,4]$

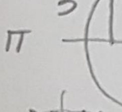
si $x=2 \rightarrow \frac{\pi}{6}2 = \frac{\pi}{3}\ (60°) \rightarrow \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

si $x=4 \rightarrow \frac{\pi}{6}4 = \frac{2\pi}{3}\ (120°) \rightarrow \cos\frac{2\pi}{6} = -\frac{1}{2}$



Además si $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow$ $\text{sen}\,\alpha > \left|\cos\frac{2\pi}{3}\right|$

El dibujo es importante!



$\rightarrow$ en todos estos ángulos la vertical mide más que la horizontal

Continuación Madrid OR B2

por $\operatorname{sen}\alpha > \left|\cos\frac{2\pi}{3}\right|$ con $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha > 0 \Rightarrow \exists \, Ln(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha) \in \mathbb{R}$

La función estará bien definida en ese intervalo y por tanto f continua en $[2,4]$

$f(2) = Ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = Ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) =$

$= Ln(0'366\ldots) \simeq -1'005 < 0$

$f(4) = Ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \simeq Ln(1'366) > 0$

$\Rightarrow f(2) \cdot f(4) < 0 \Rightarrow$ Por el th. de Bolzano

$\exists \, c \in [2,4]$ tq $f(c) = 0$