1.3 CONTINUIDADE

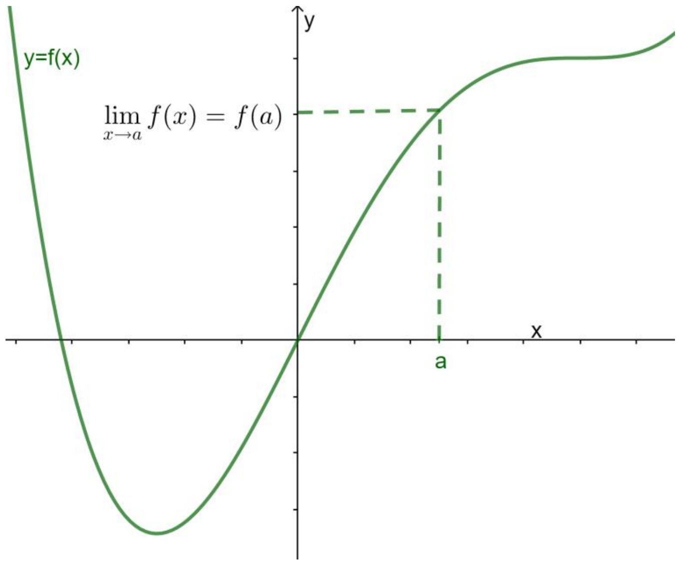
CONTINUIDADE

Definición: Unha función y=f(x) é continua en x=a se:

a) Existe f(a)

b) Existe $\lim_{x\to a} f(x)$ e é finito

c) $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$



Exercicio:

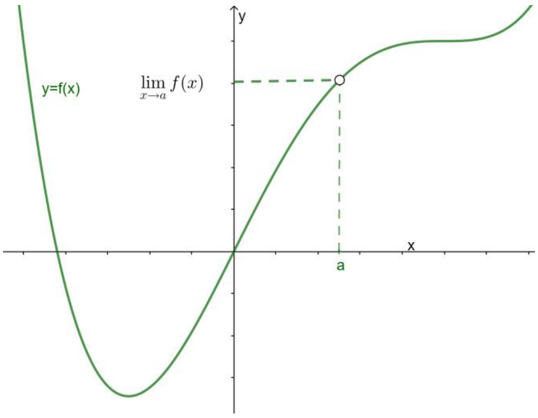
7. Demostrar que a seguinte función é continua en x=2 pero non é continua en x=0, nin en x=1: $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - x}$.

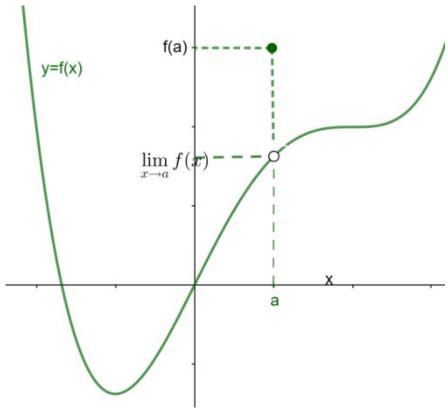
8. Demostrar que a seguinte función é continua en x=3 pero non é continua en x=1: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ 2x - 3 & \text{se } 1 \le x < 3 \\ x^2 - 6 & \text{se } x \ge 3 \end{cases}$

TIPOS DE DESCONTINUIDADES

EVITABLE

Unha función É descontinua evitable en x=a cando existe e é finito $\lim_{x \to a} f(x)$, pero non existe f(a) , ou existe pero non coincide co valor do límite anterior.



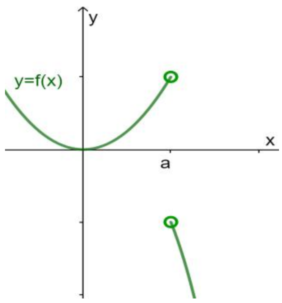


$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \text{ pero non existe f(a)} \qquad \text{ou} \quad \exists f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$$

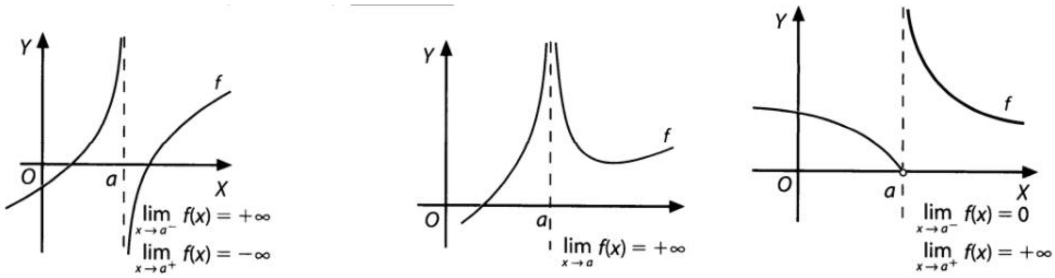
INEVITABLE

Unha función é descontinua inevitable en x = a cando non existe $\lim_{x \to a} f(x)$. Podemos distinguir varios casos:

Inevitable de salto finito, cando existen e son finitos os límites laterais pero son distintos (polo tanto non existe $\lim_{x \to a} f(x)$).



Inevitable de salto infinito, cando algún dos límites laterais é ∞ ou $-\infty$.



CONTINUIDADE NUN INTERVALO

Definición:

Unha función $y = f(x)$ é continua nun intervalo pechado $[a,b]$ se, se cumpren as seguintes condicións:

a) A función é continua no intervalo aberto (a, b).

b) A función é continua pola dereita en x = a.

c) A función é continua pola esquerda en x = b.

PROPIEDADES

Dadas y =f(x), y= g(x) funcións continuas en x = a, entón:

a) A función $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ é continua en x = a.

b) A función $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ é continua en x = a.

c) A función $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ continua en x=a sempre que $g(a) \neq 0$.

As funcións elementais son continuas no seu dominio.

Exercicios:

9.Estuda a continuidade das seguintes funcións:

$$a) f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & ,x<1 \\ 3x^2-12x+9 & ,1<x\leq 3 \\ -2x^2+16x-30 & ,x>3 \end{cases} \qquad b)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & ,x\neq 5 \\ 0 & ,x=5 \end{cases}.$$

10. Estuda a continuidade e representa:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} 2x^2-4x & ,x\neq 1 \\ 2 & ,x=1 \end{cases} \qquad b)\ f(x)=\begin{cases} 2x^2-4x & ,x\leq 1 \\ x & ,x>1 \end{cases}$$

$$c) f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & ,x<-1 \\ \dfrac{1}{2}x+1 & ,x\geq -1 \end{cases}$$

11. Calcular a e b para que a seguinte función sexa continua en todo R:

$$a) f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{se } x\leq -1 \\ b & \text{se } -1<x<3 \\ 2x+4 & \text{se } x\geq 3 \end{cases}$$

12. Indica o valor ou valores de a, se é que existen, para que a función: $f(x)=\begin{cases} ax+a & ,x\leq -2 \\ \dfrac{x}{x+4} & ,x>-2 \end{cases}$

a) Sexa continua en x= - 2.

b)Presente unha descontinuidade inevitable en x = -2 de salto finito.

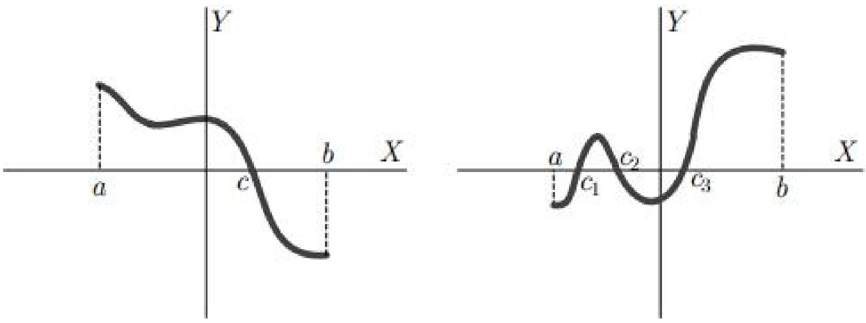
TEOREMA DE BOLZANO

Teorema de Bolzano: Se y= f(x) é unha función continua nun intervalo pechado $[a,b]$, e toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo entón existe polo menos un valor c comprendido entre a e b, tal que f(c)=0.

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \text{ continua en } [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) / \mathrm{f(c)} = 0$$

Interpretación xeométrica:

O teorema de Bolzano afirma que toda función nun intervalo pechado $[a,b]$ corta ao eixe de abscisas polo menos unha vez no intervalo aberto (a,b).

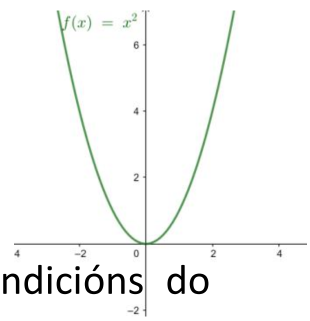


f(c)=0 $\qquad$ $f(c_1)= f(c_2) = f(c_3) = 0$

Observacións:

a)O punto non ten por que ser único.

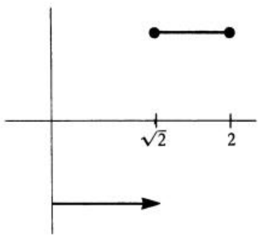
b)A condición é suficiente non necesaria.Exemplo:



A función anúlase no cero e non cumpre as condicións do teorema.

d) Se a función non é continua, entón non cumpre unha das hipóteses do teorema polo tanto non ten por que cumprirse: Exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ 1, & \sqrt{2} \leq x \leq 2. \end{cases}$$



Consecuencias: Utilizaremos este teorema para calcular os puntos de corte no eixe X de funcións, para acotar solucións de ecuacións.

Exercicios:

13. Comproba que as seguintes funcións cortan ao eixe X, e en cada caso, establece un intervalo aberto onde estea incluído o punto de corte:

$a) f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7 \qquad b) f(x) = 2x - \cos x$

<u>Exercicios do libro de Continuidade e Bolzano</u>

<u>Traballo de clase do xoves 15 de outubro:</u>

Páxina 234 números 16, 17a), 18.

Páxina 235 números 25, 26, 27.

<u>Deberes para o venres 16 de outubro:</u>

Páxina 235 números 32, 35, 40, 44.

<u>A profesora na clase do venres explicará:</u>

Páxina 235 números 33, 39.

Páxina 236 números 42, 43, 48.