

Resuelve

Página 327

Obtención de la primitiva de algunas funciones

■ NÚMEROS Y POTENCIAS SENCILLAS

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int 1 \, dx = x & \text{b) } \int 2 \, dx = 2x & \text{c) } \int \sqrt{2} \, dx = \sqrt{2}x \\ \text{d) } \int 2x \, dx = x^2 & \text{e) } \int x \, dx = \frac{x^2}{2} & \text{f) } \int 3x \, dx = \frac{3x^2}{2} \\ \text{g) } \int 7x \, dx = \frac{7x^2}{2} & \text{h) } \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} & \text{i) } \int \frac{1}{2} x^2 \, dx = \frac{x^3}{6} \end{array}$$

■ POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int (-1)x^{-2} \, dx = x^{-1} = \frac{1}{x} & \text{b) } \int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} \\ \text{c) } \int \frac{5}{x^2} \, dx = \frac{-5}{x} & \text{d) } \int \frac{1}{x^3} \, dx = \int x^{-3} \, dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2} \\ \text{e) } \int \frac{2}{x^3} \, dx = 2 \int \frac{1}{x^3} \, dx = \frac{-2}{2x^2} = -\frac{1}{x^2} & \text{f) } \int \frac{5}{(x-3)^3} \, dx = \frac{-5}{2(x-3)^2} \end{array}$$

■ LAS RAÍCES TAMBIÉN SON POTENCIAS

$$\begin{array}{l} \text{a) } \int \frac{3}{2} x^{1/2} \, dx = x^{3/2} = \sqrt{x^3} \\ \text{b) } \int \frac{3}{2} \sqrt{x} \, dx = \int \frac{3}{2} x^{1/2} \, dx = x^{3/2} = \sqrt{x^3} \\ \text{c) } \int 7\sqrt{x} \, dx = 7 \int \sqrt{x} \, dx = \frac{14}{3} \sqrt{x^3} \\ \text{d) } \int \frac{1}{2} x^{-1/2} \, dx = x^{1/2} = \sqrt{x} \\ \text{e) } \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{x} \\ \text{f) } \int 5\sqrt{x^3} \, dx = 5 \int x^{3/2} \, dx = 5 \frac{x^{5/2}}{5/2} = 2\sqrt{x^5} \end{array}$$

■ ¿RECUERDAS QUE $D(\ln x) = \frac{1}{x}$?

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| & \text{b) } \int \frac{1}{5x} \, dx = \frac{1}{5} \int \frac{5}{5x} \, dx = \frac{1}{5} \ln |5x| \\ \text{c) } \int \frac{1}{x+5} \, dx = \ln |x+5| & \text{d) } \int \frac{3}{2x+6} \, dx = \frac{3}{2} \int \frac{2}{2x+6} \, dx = \frac{3}{2} \ln |2x+6| \end{array}$$

■ ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

a) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$

b) $\int 2\cos x \, dx = 2\operatorname{sen} x$

c) $\int \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

d) $\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int 2\cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$

e) $\int (-\operatorname{sen} x) \, dx = \cos x$

f) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$

g) $\int \operatorname{sen}(x - \pi) \, dx = -\cos(x - \pi)$

h) $\int \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{1}{2} \int 2\operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{-1}{2} \cos 2x$

i) $\int (1 + \operatorname{tg}^2 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int 2(1 + \operatorname{tg}^2 2x) \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$

j) $\int \operatorname{tg}^2 2x \, dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 2x - 1) \, dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 2x) \, dx - \int 1 \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x - x$

■ ALGUNAS EXPONENCIALES

a) $\int e^{x-1} \, dx = e^{x-1}$

b) $\int e^{2x+1} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x+1}$

1 Primitivas. Reglas básicas para su cálculo

Página 329

1 Halla:

a) $\int x^4 dx$

b) $\int (5x^3 - 8x^2 + 2x - 3) dx$

c) $\int \sqrt[3]{x} dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} dx$

f) $\int \frac{3}{x^2} dx$

g) $\int \frac{5}{6x^4} dx$

h) $\int \frac{\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{3x}} dx$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x} dx$

j) $\int (\sqrt{5x} - 3)^4 dx$

k) $\int \sqrt[3]{(7x - 6)^2} dx$

l) $\int \frac{5x^3 + 6x^2 - \sqrt{2x} + \sqrt{3}}{x} dx$

m) $\int \frac{2x^4 - 6x^3 + 5x}{x + 2} dx$

n) $\int \frac{5dx}{6 - 4x}$

ñ) $\int \frac{2x^4 + 6x - 3}{x - 2} dx$

o) $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2} dx$

a) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + k$

b) $\int (5x^3 - 8x^2 + 2x - 3) dx = 5 \int x^3 dx - 8 \int x^2 dx + 2 \int x dx - 3 \int dx = \frac{5x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + x^2 - 3x + k$

c) $\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/3} dx = \frac{x^{(1/3)+1}}{\frac{1}{3}+1} + k = \frac{3}{4} x^{4/3} = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + k$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{-(1/2)+1}}{-\frac{1}{2}+1} + k = 2x^{1/2} + k = 2\sqrt{x} + k$

e) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} dx = \int x^{-2/5} dx = \frac{x^{-(2/5)+1}}{-\frac{2}{5}+1} + k = \frac{5}{3} x^{3/5} + k = \frac{5\sqrt[5]{x^3}}{3} + k$

f) $\int \frac{3}{x^2} dx = 3 \int x^{-2} dx = 3 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + k = -\frac{3}{x} + k$

g) $\int \frac{5}{6x^4} dx = \frac{5}{6} \int x^{-4} dx = \frac{5}{6} \cdot \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + k = -\frac{5}{18x^3} + k$

h) $\int \frac{\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{3x}} dx = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} \int \frac{x^{1/3}}{x^{1/2}} dx = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} \int x^{-1/6} dx = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x^{-(1/6)+1}}{-\frac{1}{6}+1} + k = \frac{6\sqrt[3]{2}}{5\sqrt{3}} \sqrt[6]{x^5} + k$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x} dx = \int \frac{x^{1/3}}{3x} dx + \int \frac{\sqrt{5}x^{3/2}}{3x} dx = \frac{1}{3} \int x^{-2/3} dx + \frac{\sqrt{5}}{3} \int x^{1/2} dx =$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k = \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt{5}x^{3/2}}{9} + k$

$$j) \int (\sqrt{5}x - 3)^4 dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{5}x - 3)^{4+1}}{4+1} + k = \frac{(\sqrt{5}x - 3)^5}{5\sqrt{5}} + k$$

$$k) \int \sqrt[3]{(7x-6)^2} dx = \int (7x-6)^{2/3} dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{(7x-6)^{(2/3)+1}}{\frac{2}{3}+1} + k = \frac{3}{35} (7x-6)^{5/3} + k = \frac{3(7x-6)\sqrt[3]{(7x-6)^2}}{35} + k$$

$$l) \int \frac{5x^3 + 6x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{3}}{x} dx = \int \left(5x^2 + 6x - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{x} \right) dx = \frac{5x^3}{3} + 3x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{3} \ln|x| + k$$

$$m) \int \frac{2x^4 - 6x^3 + 5x}{x+2} dx = \int \left(2x^3 - 10x^2 + 20x - 35 + \frac{70}{x+2} \right) dx = \frac{x^4}{2} - \frac{10x^3}{3} + 10x^2 - 35x + 70 \ln|x+2| + k$$

$$n) \int \frac{5}{6-4x} dx = -\frac{5}{4} \ln|6-4x| + k$$

$$ñ) \int \frac{2x^4 + 6x - 3}{x-2} dx = \int \left(2x^3 + 4x^2 + 8x + 22 + \frac{41}{x-2} \right) dx = \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{3} + 4x^2 + 22x + 41 \ln|x-2| + k$$

$$o) \int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2} dx = \int \left(\frac{7x^4}{x^2} \right) dx - \int \left(\frac{5x^2}{x^2} \right) dx + \int \left(\frac{3x}{x^2} \right) dx - \int \left(\frac{4}{x^2} \right) dx =$$

$$= \int 7x^2 dx - \int 5 dx + \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{4}{x^2} dx = \frac{7x^3}{3} - 5x + 3 \ln|x| + \frac{4}{x} + k$$

Página 330

2 a) $\int (3x - 5 \operatorname{tg} x) dx$ b) $\int (5 \cos x + 3^x) dx$ c) $\int (3 \operatorname{tg} x - 5 \cos x) dx$ d) $\int (10^x - 5^x) dx$

$$a) \int (3x - 5 \operatorname{tg} x) dx = 3 \int x dx - 5 \int \operatorname{tg} x dx = \frac{3x^2}{2} - 5(-\ln|\cos x|) + k = \frac{3x^2}{2} + 5 \ln|\cos x| + k$$

$$b) \int (5 \cos x + 3^x) dx = 5 \int \cos x dx + \int 3^x dx = 5 \operatorname{sen} x + \frac{3^x}{\ln 3} + k$$

$$c) \int (3 \operatorname{tg} x - 5 \cos x) dx = 3 \int \operatorname{tg} x dx - 5 \int \cos x dx = 3(-\ln|\cos x|) - 5 \operatorname{sen} x + k = -3 \ln|\cos x| - 5 \operatorname{sen} x + k$$

$$d) \int (10^x - 5^x) dx = \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{5^x}{\ln 5} + k$$

3 a) $\int \frac{3}{x^2+1} dx$ b) $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$ c) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$ d) $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$

$$a) \int \frac{3}{x^2+1} dx = 3 \operatorname{arctg} x + k$$

$$b) \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln|x^2+1| + k$$

$$c) \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 + \frac{-2}{x^2+1} \right) dx = x - 2 \operatorname{arctg} x + k$$

$$d) \int \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} dx = \int \left(1 + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = x + \ln|x^2+1| + k$$

Página 331

- 4 a) $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$ b) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$ c) $\int \frac{dx}{1+8x^2}$
 d) $\int \frac{dx}{25+9x^2}$ e) $\int \frac{dx}{3+2x^2}$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$
 g) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-8x^2}}$ h) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$ i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$
 j) $\int e^{5x-2} \, dx$

a) Restando las ecuaciones del ejercicio resuelto 2.a) de esta página, obtenemos que $1 - \cos 2x = 2\operatorname{sen}^2 x$.

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + k = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + k$$

$$b) \int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} 3x + k$$

$$c) \int \frac{dx}{1+8x^2} = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{8}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{8}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{8}x + k$$

$$d) \int \frac{dx}{25+9x^2} = \frac{1}{25} \int \frac{dx}{1+\frac{9}{25}x^2} = \frac{1}{25} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{3}{5}x\right)^2} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{\frac{3}{5}} \operatorname{arc\,tg} \frac{3x}{5} + k = \frac{1}{15} \operatorname{arc\,tg} \frac{3x}{5} + k$$

$$e) \int \frac{dx}{3+2x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1+\frac{2}{3}x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{2}{3}}x + k = \frac{\sqrt{6}}{6} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{2}{3}}x + k$$

$$f) \int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,sen} 3x + k$$

$$g) \int \frac{dx}{\sqrt{1-8x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\sqrt{8}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \operatorname{arc\,sen} \sqrt{8}x + k$$

$$h) \int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{9}{25}x^2}} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}x\right)^2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\frac{3}{5}} \operatorname{arc\,sen} \frac{3x}{5} + k = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,sen} \frac{3x}{5} + k$$

$$i) \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{2}{3}x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{2}{3}}x + k = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{2}{3}}x + k$$

$$j) \int e^{5x-2} \, dx = \frac{1}{5} e^{5x-2} + k$$

2 Expresión compuesta de integrales inmediatas

Página 333

- 1 a) $\int \cos^5 x (-\operatorname{sen} x) dx$ b) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} (-\operatorname{sen} x) dx$ c) $\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x dx$
 d) $\int e^{x^3+x^2} (3x^2+2x) dx$ e) $\int \operatorname{tg} x^2 \cdot 2x dx$ f) $\int \frac{3x^2}{1+x^6} dx$
 g) $\int \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} dx$ h) $\int \ln(x^2+1) 2x dx$ i) $\int \sqrt[3]{(x^4+5x)^2} (4x^3+5) dx$

a) $\int \cos^5 x (-\operatorname{sen} x) dx = \int (\cos x)^5 (-\operatorname{sen} x) dx = \frac{\cos^6 x}{6} + k$, ya que $D[\cos x] = -\operatorname{sen} x$.

b) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} (-\operatorname{sen} x) dx = \int (\cos x)^{2/3} (-\operatorname{sen} x) dx = \frac{(\cos x)^{2/3+1}}{\frac{2}{3}+1} + k = \frac{3}{5} \sqrt[3]{\cos^5 x}$, porque $D[\cos x] = -\operatorname{sen} x$.

c) $\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x dx = -\int e^{\cos x} (-\operatorname{sen} x) dx = -e^{\cos x} + k$, puesto que $D[\cos x] = -\operatorname{sen} x$.

d) $\int e^{x^3+x^2} (3x^2+2x) dx = e^{x^3+x^2} + k$, ya que $D[x^3+x^2] = 3x^2+2x$.

e) $\int \operatorname{tg} x^2 \cdot 2x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x^2}{\cos x^2} \cdot 2x dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x^2 \cdot 2x}{\cos x^2} dx = -\ln |\cos x^2| + k$, porque $D[\cos^2 x] = -\operatorname{sen} x^2 \cdot 2x$.

f) $\int \frac{3x^2}{1+x^6} dx = \int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^3 + k$, puesto que $D[x^3] = 3x^2$.

g) $\int \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} dx = \int \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} e^{-x}$, ya que $D[e^{-x}] = -e^{-x}$.

h) $\int \ln(x^2+1) 2x dx = (x^2+1) \ln(x^2+1) - (x^2+1) + k$, porque $D[x^2+1] = 2x$.

i) $\int \sqrt[3]{(x^4+5x)^2} (4x^3+5) dx = \int (x^4+5x)^{2/3} (4x^3+5) dx = \frac{(x^4+5x)^{(2/3)+1}}{\frac{2}{3}+1} + k = \frac{3}{5} \sqrt[3]{(x^4+5x)^5} + k$,

ya que $D[x^4+5x] = 4x^3+5$.

Página 334

- 2 a) $\int \sqrt{x^3-3x^2+5} \cdot (x^2-2x) dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2\sqrt{x}}}} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ c) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\operatorname{sen}^4 x}$
 d) $\int (x^2+1) \ln(x^3+3x) dx$ e) $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1+\operatorname{sen}^4 x} dx$ f) $\int e^{x+\sqrt{x}} \left(\frac{6x+3\sqrt{x}}{x} \right) dx$

a) Llamamos $u = x^3 - 3x^2 + 5 \rightarrow du = 3(x^2 - 2x) dx \rightarrow \frac{du}{3} = (x^2 - 2x) dx$

$$\int \sqrt{x^3-3x^2+5} (x^2-2x) dx = \int \sqrt{u} \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^{1/2} du = \frac{2}{6} u^{3/2} + k = \frac{2}{9} (x^3-3x^2+5)^{3/2} + k = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3-3x^2+5)^3} + k$$

$$b) \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2\sqrt{x}}}} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(e^{\sqrt{x}})^2}} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = I$$

Hacemos $u = e^{\sqrt{x}} \rightarrow du = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx \rightarrow 2 du = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} 2 du = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} u + k = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} e^{\sqrt{x}} + k$$

$$c) \int \frac{\cos^3 x dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^4 x} dx = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x) \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^4 x} dx = I$$

Llamamos $u = \operatorname{sen} x \rightarrow du = \cos x dx$

$$I = \int \frac{1-u^2}{u^4} du = \int \frac{du}{u^4} - \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-4} du - \int u^{-2} du = -\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{u} + k = -\frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x} + k$$

$$d) \int (x^2+1) \ln(x^3+3x) dx = I$$

Si $u = x^3+3x \rightarrow du = (3x^2+3) dx \rightarrow \frac{du}{3} = (x^2+1) dx$

$$I = \int \ln u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} u \cdot \ln u - \frac{1}{3} u + k = \frac{1}{3} (x^3+3x) \ln(x^3+3x) - \frac{1}{3} (x^3+3x) + k$$

$$e) \int \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1+\operatorname{sen}^4 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1+(\operatorname{sen}^2 x)^2} dx = I$$

Llamamos $u = \operatorname{sen}^2 x \rightarrow du = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x dx \rightarrow \frac{du}{2} = \operatorname{sen} x \cdot \cos x dx$

$$I = \int \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} u + k = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sen}^2 x) + k$$

$$f) \int e^{x+\sqrt{x}} \left(\frac{6x+3\sqrt{x}}{x} \right) dx = \int e^{x+\sqrt{x}} \left(6 + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = I$$

Como $D[x+\sqrt{x}] = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, hacemos $u = x+\sqrt{x} \rightarrow du = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx \rightarrow 6 du = \left(6 + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$

$$I = \int e^u 6 du = 6e^u + k = 6e^{x+\sqrt{x}} + k$$

Página 335

3 $\int \sqrt{x-4} (x+5) dx$

Para eliminar la raíz hacemos $x-4 = t^2 \rightarrow dx = 2t dt \quad (x = t^2 + 4)$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x-4} (x+5) dx &= \int \sqrt{t^2} (t^2+4+5) 2t dt = 2 \int t^2 (t^2+9) dt = 2 \int (t^4+9t^2) dt = \\ &= \frac{2t^5}{5} + 6t^3 + k = \frac{2\sqrt{(x-4)}^5}{5} + 6\sqrt{(x-4)}^3 + k \end{aligned}$$

$$4 \int \frac{\sqrt[3]{x-1} + x-1}{\sqrt{(x-1)^3}} dx$$

Para eliminar las raíces hacemos $x-1 = t^6 \rightarrow dx = 6t^5 dt$ ($x = 1 + t^6$)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x-1} + x-1}{\sqrt{(x-1)^3}} dx &= \int \frac{\sqrt[3]{t^6} + t^6}{\sqrt{(t^6)^3}} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^2 + t^6}{t^9} t^5 dt = 6 \int \left(\frac{1}{t^2} + t^2 \right) dt = \\ &= 6 \int (t^{-2} + t^2) dt = -\frac{6}{t} + 2t^3 + k = -\frac{6}{\sqrt[6]{x-1}} + 2\sqrt[6]{(x-1)^3} + k \end{aligned}$$

$$5 \int \sqrt{4-x^2} dx$$

Hacemos el cambio $x = 2\operatorname{sen} \alpha \rightarrow dx = 2\cos \alpha d\alpha$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4-x^2} dx &= \int \sqrt{4-(2\operatorname{sen} \alpha)^2} 2\cos \alpha d\alpha = \int \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 \alpha} 2\cos \alpha d\alpha = \\ &= \int 2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \alpha} 2\cos \alpha d\alpha = 4 \int \cos^2 \alpha d\alpha = 4 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{4} \right) + k = \\ &= 2\operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) + \operatorname{sen} \left[2\operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) \right] + k \end{aligned}$$

3 Integración "por partes"

Página 336

1 Calcula:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx$$

Llamamos $I = \int x \cdot \operatorname{sen} x \, dx$

$$\left. \begin{array}{l} u = x, \, du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx, \, v = -\cos x \end{array} \right\} I = -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x + k$$

2 Calcula:

$$\int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$$

Llamamos $I = \int x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$

$$\left. \begin{array}{l} u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, \, du = \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ dv = x \, dx, \, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \int \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} [x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x] + k = \frac{x^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + k = \\ &= \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} x + k \end{aligned}$$

Página 337

3 Calcula:

$$\int x^4 e^x \, dx$$

Resolvámosla integrando por partes:

$$\left. \begin{array}{l} u = x^4 \rightarrow du = 4x^3 \, dx \\ dv = e^x \, dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right\}$$

$$I = x^4 \cdot e^x - \int e^x \cdot 4x^3 \, dx = x^4 \cdot e^x - 4 \int x^3 \cdot e^x \, dx$$

$$I_1 = \int x^3 \cdot e^x \, dx = x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - 6e^x$$

(Visto en el ejercicio resuelto 2 de la página 337)

$$I = x^4 \cdot e^x - 4[x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - 6e^x] + k = x^4 \cdot e^x - 4x^3 \cdot e^x + 12x^2 \cdot e^x - 24x \cdot e^x + 24e^x + k$$

4 Calcula:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

Resolvámosla integrando por partes:

$$\left. \begin{array}{l} u = \operatorname{sen} x \rightarrow du = \cos x \, dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= -\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \int (-\cos x) \cos x \, dx = -\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \int \cos^2 x \, dx = \\ &= -\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx = -\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \int dx - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \\ &= -\operatorname{sen} x \cdot \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx \end{aligned}$$

Es decir:

$$I = -\operatorname{sen} x \cdot \cos x + x - I \rightarrow 2I = -\operatorname{sen} x \cdot \cos x + x \rightarrow I = \frac{x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{2} + k$$

4 Integración de funciones racionales

Página 338

1 Calcula:

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 4} dx$$

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 4} dx = \int \left(3x + 7 + \frac{29}{x - 4} \right) dx = \frac{3x^2}{2} + 7x + 29 \ln|x - 4| + k$$

2 Calcula:

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1} dx &= \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{13}{4} + \frac{17/4}{2x + 1} \right) dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{13}{4}x - \frac{17}{8} \ln|2x + 1| + k = \\ &= \frac{3x^2}{4} - \frac{13}{4}x - \frac{17}{8} \ln|2x + 1| + k \end{aligned}$$

Página 341

3 Calcula:

a) $\int \frac{5x - 3}{x^3 - x} dx$

b) $\int \frac{x^2 - 2x + 6}{(x - 1)^3} dx$

a) Descomponemos la fracción:

$$\frac{5x - 3}{x^3 - x} = \frac{5x - 3}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}$$

$$\frac{5x - 3}{x^3 - x} = \frac{A(x - 1)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)}{x(x - 1)(x + 1)}$$

$$5x - 3 = A(x - 1)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)$$

Hallamos A , B y C dando a x los valores 0, 1 y -1 :

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \quad \rightarrow \quad -3 = -A \quad \rightarrow \quad A = 3 \\ x = 1 \quad \rightarrow \quad 2 = 2B \quad \rightarrow \quad B = 1 \\ x = -1 \quad \rightarrow \quad -8 = 2C \quad \rightarrow \quad C = -4 \end{array} \right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{5x - 3}{x^3 - x} dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x - 1} - \frac{4}{x + 1} \right) dx = 3 \ln|x| + \ln|x - 1| - 4 \ln|x + 1| + k$$

b) Descomponemos la fracción:

$$\frac{x^2 - 2x + 6}{(x - 1)^3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3} = \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 1) + C}{(x - 1)^3}$$

$$x^2 - 2x + 6 = A(x - 1)^2 + B(x - 1) + C$$

Dando a x los valores 1, 0 y 2, queda:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \quad \rightarrow \quad 5 = C \quad \rightarrow \quad A = 1 \\ x = 0 \quad \rightarrow \quad 6 = A - B + C \quad \rightarrow \quad B = 0 \\ x = 2 \quad \rightarrow \quad 6 = A + B + C \quad \rightarrow \quad C = 5 \end{array} \right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2 - 2x + 6}{(x - 1)^3} dx = \int \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{5}{(x - 1)^3} \right) dx = \ln|x - 1| - \frac{5}{2(x - 1)^2} + k$$

4 Calcula:

a) $\int \frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^4 - 4x^2} dx$

b) $\int \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x} dx$

a) $x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^2(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 2} + \frac{D}{x + 2}$$

$$\frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^2(x - 2)(x + 2)} = \frac{Ax(x - 2)(x + 2) + B(x - 2)(x + 2) + Cx^2(x + 2) + Dx^2(x - 2)}{x^2(x - 2)(x + 2)}$$

$$x^3 + 22x^2 - 12x + 8 = Ax(x - 2)(x + 2) + B(x - 2)(x + 2) + Cx^2(x + 2) + Dx^2(x - 2)$$

Hallamos A , B , C y D dando a x los valores 0, 2, -2 y 1:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow 8 = -4B \rightarrow B = -2 \\ x = 2 \rightarrow 80 = 16C \rightarrow C = 5 \\ x = -2 \rightarrow 112 = -16D \rightarrow D = -7 \\ x = 1 \rightarrow 19 = -3A - 3B + 3C - D \rightarrow -3A = -9 \rightarrow A = 3 \end{array} \right\}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^4 - 4x^2} dx &= \int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x - 2} - \frac{7}{x + 2} \right) dx = \\ &= 3 \ln|x| + \frac{2}{x} + 5 \ln|x - 2| - 7 \ln|x + 2| + k \end{aligned}$$

b) La fracción se puede simplificar:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x} = \frac{x(x - 2)^2}{x(x - 2)^2(x + 2)} = \frac{1}{x + 2}$$

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x} dx = \int \frac{1}{x + 2} dx = \ln|x + 2| + k$$

Página 342

5 a) $\int \frac{dx}{3x^2 + 3}$

b) $\int \frac{dx}{9x^2 + 3}$

c) $\int \frac{dx}{6x^2 + 3}$

d) $\int \frac{dx}{7x^2 + 11}$

a) $\int \frac{dx}{3x^2 + 3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + k$

b) $\int \frac{dx}{9x^2 + 3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{3x^2 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{3}x + k = \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{3}x + k$

c) $\int \frac{dx}{6x^2 + 3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{2x^2 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(\sqrt{2}x)^2 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2}x + k = \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2}x + k$

d) $\int \frac{dx}{7x^2 + 11} = \frac{1}{11} \int \frac{dx}{\frac{7}{11}x^2 + 1} = \frac{1}{11} \int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{7}{11}}x\right)^2 + 1} = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{11}}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{7}{11}}x + k =$
 $= \frac{1}{\sqrt{77}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{7}{11}}x + k$

6 a) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$ b) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 10}$ c) $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 8}$ d) $\int \frac{dx}{2x^2 - 12x + 26}$

a) Como el polinomio $x^2 - 4x + 5$ no tiene raíces reales,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4 + 1} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 1} = \text{arc tg}(x-2) + k$$

b) Al igual que en el apartado anterior, el polinomio $x^2 - 4x + 10$ no tiene raíces reales,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 10} &= \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4 + 6} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 6} = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{6}}} \text{arc tg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + k = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{arc tg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + k \end{aligned}$$

c) Como el polinomio $x^2 + 3x + 8$ no tiene raíces,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 8} &= \int \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 8} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}} = \frac{1}{\frac{23}{4}} \int \frac{dx}{\left(\frac{x + \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{23}}{2}}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\frac{23}{4}} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{23}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{23}{4}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{23}}} \text{arc tg}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{23}}\right) + k = \frac{2\sqrt{23}}{23} \text{arc tg}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{23}}\right) + k \end{aligned}$$

d) Una vez comprobado que el polinomio $x^2 - 6x + 13$ no tiene raíces,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x^2 - 12x + 26} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot 3x + 9 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 4} = \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \text{arc tg}\left(\frac{x-3}{2}\right) + k = \frac{1}{4} \text{arc tg}\left(\frac{x-3}{2}\right) + k \end{aligned}$$

Página 343

7 a) $\int \frac{x-2}{x^2 - 4x + 10} dx$ b) $\int \frac{x-11}{x^2 - 4x + 10} dx$ c) $\int \frac{7x-11}{x^2 - 4x + 10} dx$ d) $\int \frac{5x+12}{x^2 + 3x + 10} dx$

a) $\int \frac{x-2}{x^2 - 4x + 10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x-2)}{x^2 - 4x + 10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 10} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 10) + k$

b) $\int \frac{x-11}{x^2 - 4x + 10} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4) + \frac{1}{2} \cdot 4 - 11}{x^2 - 4x + 10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 10} dx - 9 \int \frac{1}{x^2 - 4x + 10} dx = \frac{1}{2} I_1 - 9I_2$

$$I_1 = \int \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 10} dx = \ln(x^2 - 4x + 10) + k$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{x^2 - 4x + 10} dx = \int \frac{1}{x^2 - 4x + 4 + 6} dx = \int \frac{1}{(x-2)^2 + 6} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{6}}} \text{arc tg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + k = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{arc tg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + k \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x-11}{x^2-4x+10} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-4x+10) - \frac{3\sqrt{6}}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + k$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \frac{7x-11}{x^2-4x+10} dx &= \int \frac{\frac{7}{2}(2x-4) + \frac{7}{2} \cdot 4 - 11}{x^2-4x+10} dx = \frac{7}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+10} dx + 3 \int \frac{1}{x^2-4x+10} dx = \\ &= \frac{7}{2} \ln(x^2-4x+10) + \frac{\sqrt{6}}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + k \end{aligned}$$

(Las dos últimas integrales están resueltas en los apartados anteriores).

$$\text{d) } \int \frac{5x+12}{x^2+3x+10} dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+3) - \frac{5}{2} \cdot 3 + 12}{x^2+3x+10} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x+3}{x^2+3x+10} dx + \frac{9}{2} \int \frac{dx}{x^2+3x+10} = \frac{5}{2} I_1 + \frac{9}{2} I_2$$

$$I_1 = \int \frac{2x+3}{x^2+3x+10} dx = \ln(x^2+3x+10) + k$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 10} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{31}{4}} = \frac{1}{\frac{31}{4}} \int \frac{dx}{\left(\frac{x + \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{31}}{2}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{31}{4}} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{31}{4}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{31}}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right) + k = \frac{2}{\sqrt{31}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right) + k$$

Por tanto:

$$\int \frac{5x+12}{x^2+3x+10} dx = \frac{5}{2} \ln(x^2+3x+10) + \frac{9}{\sqrt{31}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right) + k$$

Página 344

8 Calcula $\int \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x^3 + 2x^2 + 3x} dx$.

Comenzamos efectuando la división:

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x^3 + 2x^2 + 3x} = x + \frac{3x + 3}{x^3 + 2x^2 + 3x}$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x^3 + 2x^2 + 3x} dx = \int \left(x + \frac{3x + 3}{x^3 + 2x^2 + 3x}\right) dx = \int x dx + \int \frac{3x + 3}{x^3 + 2x^2 + 3x} dx$$

Descomponemos el cociente en fracciones simples:

$$x^3 + 2x^2 + 3x = x(x^2 + 2x + 3)$$

$$\frac{3x + 3}{x^3 + 2x^2 + 3x} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 3} \rightarrow A = 1, M = -1, N = 1$$

$$\frac{3x + 3}{x^3 + 2x^2 + 3x} = \frac{1}{x} + \frac{-x + 1}{x^2 + 2x + 3}$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x^3 + 2x^2 + 3x} dx = \int x dx + \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-x + 1}{x^2 + 2x + 3} dx = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + k$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + k$$

$$I_3 = \int \frac{-x+1}{x^2+2x+3} \, dx = \int \frac{\frac{-1}{2}(2x+2) - \frac{-1}{2} \cdot 2+1}{x^2+2x+3} \, dx = \frac{-1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} \, dx + 2 \int \frac{1}{x^2+2x+3} \, dx$$

Calculamos esta segunda integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+2x+3} \, dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+1+2} \, dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + k = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + k \end{aligned}$$

De donde $I_3 = \frac{-1}{2} \ln(x^2+2x+3) + \sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + k$

Finalmente, obtenemos el resultado:

$$\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{x^3+2x^2+3x} \, dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + \sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + k$$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 345

1. Integrales inmediatas de funciones compuestas

Hazlo tú. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{\operatorname{sen} 3x + \cos 3x}{\operatorname{sen} 3x - \cos 3x} dx \qquad \text{b) } \int \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 2}} dx$$

$$\text{c) } \int \frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen} 2x} dx \qquad \text{d) } \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$$

a) Observamos que $D[\operatorname{sen} 3x - \cos 3x] = 3(\cos 3x + \operatorname{sen} 3x)$. Por tanto:

$$\int \frac{\operatorname{sen} 3x + \cos 3x}{\operatorname{sen} 3x - \cos 3x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3(\cos 3x + \operatorname{sen} 3x)}{\operatorname{sen} 3x - \cos 3x} dx = \frac{1}{3} \ln |\operatorname{sen} 3x - \cos 3x| + k$$

$$\text{b) } \int \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 2}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 2}} dx = \frac{3}{2} \int (x^2 - 2)^{-1/2} 2x dx = \frac{3}{2} \frac{(x^2 - 2)^{(-1/2)+1}}{-\frac{1}{2} + 1} + k = 3\sqrt{x^2 - 2} + k$$

$$\text{c) } \int \frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen} 2x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen} x \cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\frac{1}{2} \ln |\cos x| + k$$

$$\text{d) } \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + k$$

Página 346

2. Método de sustitución

Hazlo tú. Aplicar el método de sustitución para resolver estas integrales:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln x}} \qquad \text{b) } \int \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx$$

a) Hacemos el cambio $1 - \ln x = t^2 \rightarrow -\frac{1}{x} dx = 2t dt \rightarrow \frac{dx}{x} = -2t dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln x}} = \int \frac{-2t dt}{\sqrt{t^2}} = \int (-2) dt = -2t + k = -2\sqrt{1 - \ln x} + k$$

b) Usando el cambio $x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx &= \int \frac{t^2}{1 + \sqrt{t^2}} 2t dt = 2 \int \frac{t^3}{1 + t} dt = 2 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t + 1} \right) dt = \\ &= 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln |t + 1| \right) + k = 2 \left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \ln |\sqrt{x} + 1| \right) + k \end{aligned}$$

3. Integración por partes

Hazlo tú.

a) $\int \arcsen \frac{x}{2} dx$

b) $\int \frac{1}{x^2} \ln x dx$

a) Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \arcsen \frac{x}{2} \rightarrow du = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= x \cdot \arcsen \frac{x}{2} - \int \frac{x}{2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} dx = x \cdot \arcsen \frac{x}{2} + \int \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-(1/2)} \left(-\frac{x}{2}\right) dx = \\ &= x \cdot \arcsen \frac{x}{2} + \frac{\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-(1/2)+1}}{-\frac{1}{2} + 1} + k = x \cdot \arcsen \frac{x}{2} + 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + k = x \cdot \arcsen \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2} + k \end{aligned}$$

b) Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$I = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + k$$

Página 347

4. Integración por partes

Hazlo tú. Calcular:

a) $I = \int 2x^2 \cos 2x dx$

b) $I = \int e^{-x} \cos 2x dx$

a) Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = 2x^2 \rightarrow du = 4x dx \\ dv = \cos 2x dx \rightarrow v = \frac{\sen 2x}{2} \end{cases}$$

$$I = 2x^2 \cdot \frac{\sen 2x}{2} - \int \frac{\sen 2x}{2} \cdot 4x dx = x^2 \sen 2x - 2 \int x \cdot \sen 2x dx = x^2 \cdot \sen 2x - 2I_1$$

$$I_1 = \int x \cdot \sen 2x dx$$

Aplicamos de nuevo la integración por partes:

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sen 2x dx \rightarrow v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{cases}$$

$$I_1 = -x \frac{\cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} dx = -x \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -x \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4} \sen 2x + k$$

Finalmente:

$$I = x^2 \cdot \sen 2x - 2I_1 = x^2 \cdot \sen 2x + x \cdot \cos 2x - \frac{1}{2} \sen 2x + k$$

$$b) I = \int e^{-x} \cdot \cos 2x \, dx = -\frac{1}{5} e^{-x} (\cos 2x - 2 \operatorname{sen} 2x)$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = e^{-x} \rightarrow du = -e^{-x} dx \\ dv = \cos 2x \, dx \rightarrow v = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \end{cases}$$

$$I = e^{-x} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx = e^{-x} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{1}{2} I_1$$

$$I_1 = \int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx$$

Integramos de nuevo por partes:

$$\begin{cases} u = e^{-x} \rightarrow du = -e^{-x} dx \\ dv = \operatorname{sen} 2x \, dx \rightarrow v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{cases}$$

$$I_1 = -e^{-x} \cdot \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2} \int e^{-x} \cdot \cos 2x \, dx$$

Sustituimos I_1 en I y se obtiene:

$$\int e^{-x} \cdot \cos 2x \, dx = e^{-x} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - e^{-x} \cdot \frac{\cos 2x}{4} - \frac{1}{4} \int e^{-x} \cdot \cos 2x \, dx$$

Pasamos el último término al primer miembro y despejamos:

$$\frac{5}{4} \int e^{-x} \cdot \cos 2x \, dx = e^{-x} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - e^{-x} \cdot \frac{\cos 2x}{4} \rightarrow \int e^{-x} \cdot \cos 2x \, dx = \frac{2}{5} e^{-x} \cdot \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{5} e^{-x} \cdot \cos 2x + k$$

5. Integración de funciones racionales

Hazlo tú.

$$a) \int \frac{x+2}{x^4 - 2x^2 + 1} \, dx$$

$$b) \int \frac{2}{3x^2 + 4} \, dx$$

$$a) \int \frac{x+2}{x^4 - 2x^2 + 1} \, dx = \int \frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)^2} \, dx$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} \rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = \frac{3}{4}, C = \frac{1}{2}, D = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^4 - 2x^2 + 1} \, dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} \, dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{(x-1)^2} \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} \, dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x+1)^2} \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4(x+1)} + k \end{aligned}$$

$$b) \int \frac{2}{3x^2 + 4} \, dx = \frac{2}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{3}x}{2} \right) + k = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{3}x}{2} \right) + k$$

Página 348

6. Integrales racionales con raíces reales y complejas

Hazlo tú.

Calcula $\int \frac{x+2}{x^3-1} dx$.

$$\int \frac{x+2}{x^3-1} dx = \int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} \rightarrow A=1, M=-1, N=-1$$

$$I = \int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx = \ln|x-1| - I_1$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2} + 1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{x^2+2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{1}{\frac{3}{4}} \int \frac{1}{\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{1}{\frac{3}{4}} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k \end{aligned}$$

Sustituimos en I_1 :

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

Sustituimos en I :

$$I = \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

7. Integrales de diversos tipos

Hazlo tú.

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

b) $\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)} dx$

c) $\int [\cos(2x) + \operatorname{sen} x \cos x] dx$

a) Llamamos $u = \sqrt{x} \rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \rightarrow 2u du = dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{u}{1+u} 2u du = 2 \int \frac{u^2}{1+u} du = 2 \int \left(u - 1 + \frac{1}{u+1}\right) du = \\ &= 2 \left(\frac{u^2}{2} - u + \ln|u+1|\right) + k = 2 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}+1)\right) + k \end{aligned}$$

b) Llamamos $u = e^x \rightarrow du = e^x dx$

$$I = \int \frac{du}{(u^2 - 1)(u + 1)} = \int \frac{du}{(u - 1)(u + 1)^2}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(u - 1)(u + 1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{u - 1} + \frac{-\frac{1}{4}}{u + 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{(u + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{u - 1} du - \frac{1}{4} \int \frac{1}{u + 1} du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(u + 1)^2} du = \frac{1}{4} \ln |u - 1| - \frac{1}{4} \ln |u + 1| + \frac{1}{2} \frac{1}{u + 1} + k = \\ &= \frac{1}{4} \ln |e^x - 1| - \frac{1}{4} \ln (e^x + 1) + \frac{1}{2(e^x + 1)} + k \end{aligned}$$

$$c) \int (\cos 2x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x) dx = \int \cos 2x dx + \int \operatorname{sen} x \cdot \cos x dx = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + k$$

En la segunda integral se ha tenido en cuenta que $D[\operatorname{sen} x] = \cos x$.

8. Primitiva que cumple una condición

Hazlo tú. Halla $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ y $f''(x) = 3x$.

$$f'(x) = \int 3x dx = \frac{3x^2}{2} + k_1$$

$$f'(0) = 2 \rightarrow k_1 = 2$$

$$f(x) = \int \left(\frac{3x^2}{2} + 2 \right) dx = \frac{x^3}{2} + 2x + k_2$$

$$f(0) = 1 \rightarrow k_2 = 1$$

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + 1$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 349

1. Curva de la que se conocen las pendientes de las rectas tangentes

Hallar la curva en la que las pendientes de las rectas tangentes en cualquier punto vienen dadas por la función $f(x) = xe^{2x}$. Se sabe también que la curva pasa por el punto $A(0, 2)$.

Si llamamos $F(x)$ a la función buscada, esta cumple dos condiciones:

$$F'(x) = x \cdot e^{2x}$$

$$F(0) = 2 \text{ para que pase por el punto } A.$$

Por tanto,

$$F(x) = \int x \cdot e^{2x} dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$F(x) = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + k$$

$$F(0) = 2 \rightarrow -\frac{1}{4} + k = 2 \rightarrow k = \frac{9}{4}$$

$$\text{Así, } F(x) = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{9}{4}.$$

2. Función derivable

Hallar una función $f(x)$ derivable en \mathbb{R} , que pase por el punto $P(-1, 3)$ y cuya derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calculamos las primitivas de los dos tramos:

$$f_1(x) = \int (2x - 1) dx = x^2 - x + k_1 \quad f_2(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + k_2, \text{ ya que } x > 1.$$

Como pasa por el punto P :

$$f_1(-1) = 3 \rightarrow 2 + k_1 = 3 \rightarrow k_1 = 1$$

Así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x + k_2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como $f(x)$ es derivable en \mathbb{R} , debe ser continua en \mathbb{R} y, en particular, en $x = 1$.

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x + k_2) = k_2 \end{cases} \rightarrow k_2 = 1$$

Con el valor de k_2 obtenido se cumplen todas las condiciones y la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Integración de un valor absoluto

Dada la función $f(x) = \frac{x}{2} - 2$, calcular $\int |f(x)| dx$.

Definimos la función por intervalos:

$$\frac{x}{2} - 2 = 0 \rightarrow x = 4$$

$$|f(x)| = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 2 & \text{si } x < 4 \\ \frac{x}{2} - 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Integramos cada tramo:

$$\int \left(-\frac{x}{2} + 2\right) dx = -\frac{x^2}{4} + 2x + k_1$$

$$\int \left(\frac{x}{2} - 2\right) dx = \frac{x^2}{4} - 2x + k_2$$

$$F(x) = \int |f(x)| dx = \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + 2x + k_1 & \text{si } x < 4 \\ \frac{x^2}{4} - 2x + k_2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Como la función debe ser continua en $x = 4$:

$$F(4) = \frac{4^2}{4} - 2 \cdot 4 + k_2 = -4 + k_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} F(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(-\frac{x^2}{4} + 2x + k_1\right) = 4 + k_1 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{x^2}{4} - 2x + k_2\right) = -4 + k_2 \end{cases} \rightarrow 4 + k_1 = -4 + k_2 \rightarrow k_2 = 8 + k_1$$

Es decir:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + 2x + k & \text{si } x < 4 \\ \frac{x^2}{4} - 2x + 8 + k & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

4. Gráficas de primitivas

Hallar una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 2x - 4$ tal que su gráfica corte al eje X en un único punto.

$$F(x) = \int (2x - 4) dx = x^2 - 4x + k$$

Para que $F(x)$ corte al eje X en un único punto, la expresión de $F(x)$ debe ser un cuadrado perfecto. Por tanto:

$$F(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

y el único punto de corte con el eje X es el punto $(2, 0)$.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 350

Para practicar

Integrales casi inmediatas

1 Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{4x^2 - 5x + 7}{2} dx$

b) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x}}$

c) $\int \frac{1}{2x + 7} dx$

d) $\int (x - \operatorname{sen} x) dx$

a) $\int \frac{4x^2 - 5x + 7}{2} dx = \int \left(2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2} \right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{4} + \frac{7}{2}x + k$

b) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{x dx}{x^{1/3}} = \int x^{2/3} dx = \frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + k$

c) $\int \frac{1}{2x + 7} dx = \frac{1}{2} \ln |2x + 7| + k$

d) $\int (x - \operatorname{sen} x) dx = \frac{x^2}{2} + \cos x + k$

2 Resuelve estas integrales:

a) $\int (x^2 + 1)^2 dx$

b) $\int (x - 5)^3 dx$

c) $\int \sqrt{3x + 5} dx$

d) $\int (\cos x + e^x) dx$

a) $\int (x^2 + 1)^2 dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + k$

b) $\int (x - 5)^3 dx = \frac{(x - 5)^4}{4} + k$

c) $\int \sqrt{3x + 5} dx = \frac{1}{3} \int (3x + 5)^{1/2} 3 dx = \frac{1}{3} \frac{(3x + 5)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2}{9} \sqrt{(3x + 5)^3} + k$

d) $\int (\cos x + e^x) dx = \int \cos x dx + \int e^x dx = \operatorname{sen} x + e^x + k$

3 Calcula:

a) $\int \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} dx$

b) $\int \frac{7}{\cos^2 x} dx$

c) $\int \operatorname{sen}(x - 4) dx$

d) $\int (e^{2x} + 3e^{-x}) dx$

a) $\int \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int x^{2/3} dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3}{5\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{x^5} + k$

b) $\int \frac{7}{\cos^2 x} dx = 7 \operatorname{tg} x + k$

c) $\int \operatorname{sen}(x - 4) dx = -\cos(x - 4) + k$

d) $\int (e^{2x} + 3e^{-x}) dx = \int e^{2x} dx + \int 3e^{-x} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} 2 dx - 3 \int e^{-x} (-1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - 3e^{-x} + k$

4 Halla las siguientes integrales:

a) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx$

b) $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$

c) $\int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2} dx$

d) $\int \frac{-8}{1+x^2} dx$

e) $\int \frac{3x}{1+x^2} dx$

f) $\int \frac{x^2}{2-x^3} dx$

a) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx = 2 \int \frac{1}{x} dx + 2 \int x^{-2} dx = 2 \ln|x| - \frac{2}{x} + k$

b) $\int \frac{dx}{(x-1)^3} = \int (x-1)^{-3} dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} + k$

c) $\int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-3/2} \right) dx = \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + k$

d) $\int \frac{-8}{1+x^2} dx = -8 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + k$

e) $\int \frac{3x}{1+x^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{3}{2} \ln(1+x^2) + k$

f) $\int \frac{x^2}{2-x^3} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{-3x^2}{2-x^3} dx = -\frac{1}{3} \ln|2-x^3| + k$

5 Resuelve las integrales siguientes:

a) $\int \frac{dx}{3x-4}$

b) $\int \frac{dx}{(3x-4)^2}$

c) $\int \sqrt{3x-4} dx$

d) $\int \sqrt[5]{\frac{1}{(3x-4)^3}} dx$

a) $\int \frac{dx}{3x-4} = \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{3x-4} = \frac{1}{3} \ln|3x-4| + k$

b) $\int \frac{dx}{(3x-4)^2} = \frac{1}{3} \int (3x-4)^{-2} 3 dx = -\frac{1}{3(3x-4)} + k$

c) $\int \sqrt{3x-4} dx = \frac{1}{3} \int (3x-4)^{1/2} 3 dx = \frac{1}{3} \frac{(3x-4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{9} \sqrt{(3x-4)^3} + k$

d) $\int \sqrt[5]{\frac{1}{(3x-4)^3}} dx = \frac{1}{3} \int (3x-4)^{-3/5} 3 dx = \frac{1}{3} \frac{(3x-4)^{2/5}}{\frac{2}{5}} + k = \frac{5}{6} \sqrt[5]{(3x-4)^2} + k$

6 Halla las siguientes integrales del tipo exponencial:

a) $\int e^{x-4} dx$

b) $\int e^{-2x+9} dx$

c) $\int e^{5x} dx$

d) $\int (3^x - x^3) dx$

a) $\int e^{x-4} dx = e^{x-4} + k$

b) $\int e^{-2x+9} dx = \frac{-1}{2} \int -2e^{-2x+9} dx = \frac{-1}{2} e^{-2x+9} + k$

c) $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int 5e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + k$

d) $\int (3^x - x^3) dx = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x^4}{4} + k$

7 Resuelve las siguientes integrales del tipo arco tangente:

a) $\int \frac{2 dx}{1+25x^2}$ b) $\int \frac{5 dx}{100x^2+1}$ c) $\int \frac{4 dx}{3+3x^2}$ d) $\int \frac{dx}{4+x^2}$
 e) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$ f) $\int \frac{dx}{9+x^2}$ g) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$ h) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

a) $\int \frac{2 dx}{1+25x^2} = \int \frac{2 dx}{1+(5x)^2} = \frac{2}{5} \operatorname{arc\,tg} 5x + k$

b) $\int \frac{5 dx}{100x^2+1} = \int \frac{5 dx}{(10x)^2+1} = \frac{5}{10} \operatorname{arc\,tg} 10x + k = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} 10x + k$

c) $\int \frac{4 dx}{3+3x^2} = \int \frac{4 dx}{3(1+x^2)} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{4}{3} \operatorname{arc\,tg} x + k$

d) $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{1/4}{1+(\frac{x}{2})^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1/2}{1+(\frac{x}{2})^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x}{2}\right) + k$

e) $\int \frac{dx}{4+9x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+(\frac{3x}{2})^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{3x}{2}\right) + k = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{3x}{2}\right) + k$

f) $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{1+(\frac{x}{3})^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x}{3}\right) + k = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x}{3}\right) + k$

g) $\int \frac{dx}{2+4x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+(\frac{2x}{\sqrt{2}})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) + k = \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc\,tg} (\sqrt{2} x) + k$

h) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx = \operatorname{arc\,tg} (e^x) + k$

8 Expresa el cociente de la forma $\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$ y resuelve:

a) $\int \frac{x^2}{x-3} dx$ b) $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1} dx$
 c) $\int \frac{x^2-1}{x+2} dx$ d) $\int \frac{2x^2+2x+4}{x+2} dx$
 e) $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx$ f) $\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2} dx$

a) $\int \frac{x^2}{x-3} dx = \int \left(x+3+\frac{9}{x-3}\right) dx = \int x dx + \int 3 dx + \int \frac{9}{x-3} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 9 \ln|x-3| + k$

b) $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1} dx = \int \left(x-6+\frac{10}{x+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 6x + 10 \ln|x+1| + k$

c) $\int \frac{x^2-1}{x+2} dx = \int \left(x-2+\frac{3}{x+2}\right) dx = \int x dx - \int 2 dx + \int \frac{3}{x+2} dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 3 \ln|x+2| + k$

d) $\int \frac{2x^2+2x+4}{x+2} dx = \int \left(2x-2+\frac{8}{x+2}\right) dx = \int 2x dx - \int 2 dx + \int \frac{8}{x+2} dx = x^2 - 2x + 8 \ln|x+2| + k$

e) $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx = \int \left(x+\frac{x}{x^2-1}\right) dx = \int x dx + \int \frac{x}{x^2-1} dx = \int x dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + k$

f) $\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2} dx = \int \left(x^2-x-1-\frac{3}{x-2}\right) dx = \int x^2 dx - \int x dx - \int dx - \int \frac{3}{x-2} dx =$
 $= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - 3 \ln|x-2| + k$

9 Halla estas integrales sabiendo que son del tipo arco seno:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-100x^2}} dx$ d) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1-(\ln x)^2}}$

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen}(2x) + k$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{1/2 dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right) + k$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-100x^2}} dx = \frac{1}{10} \int \frac{10}{\sqrt{1-(10x)^2}} dx = \frac{1}{10} \operatorname{arc\,sen} 10x + k$

d) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1-(\ln x)^2}} = \operatorname{arc\,sen} \ln x + k$, ya que $D[\ln x] = \frac{1}{x}$.

10 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \operatorname{sen} x \cos x dx$ b) $\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos^5 x}$ c) $\int \frac{2x dx}{\sqrt{9-x^2}}$ d) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+5}}$

a) $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + k$

b) $\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos^5 x} = -\int (-\operatorname{sen} x) \cdot \cos^{-5} x dx = \frac{-\cos^{-4} x}{-4} + k = \frac{1}{4\cos^4 x} + k$

c) $\int \frac{2x dx}{\sqrt{9-x^2}} = -\int -2x(9-x^2)^{-1/2} dx = -\frac{(9-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + k = -2\sqrt{9-x^2} + k$

d) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{2} \int 2x(x^2+5)^{-1/2} dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2+5)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+5} + k$

11 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \sqrt{x^2-2x}(x-1) dx$ b) $\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ c) $\int \sqrt{(1+\cos x)^3} \operatorname{sen} x dx$

d) $\int \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx$ e) $\int \frac{2x^2}{(2-x^3)^2} dx$ f) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$

a) $\int \sqrt{x^2-2x}(x-1) dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2-2x}(2x-2) dx = \frac{1}{2} \int (x^2-2x)^{1/2} (2x-2) dx =$
 $= \frac{1}{2} \frac{(x^2-2x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{\sqrt{(x^2-2x)^3}}{3} + k$

b) $\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc\,sen} x dx = \frac{\operatorname{arc\,sen}^2 x}{2} + k$

c) $\int \sqrt{(1+\cos x)^3} \operatorname{sen} x dx = -\int (1+\cos x)^{3/2} (-\operatorname{sen} x) dx = -\frac{(1+\cos x)^{5/2}}{\frac{5}{2}} + k = \frac{-2\sqrt{(1+\cos x)^5}}{5} + k$

d) $\int \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx = \int (1+\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{(1+\ln x)^3}{3} + k$

e) $\int \frac{2x^2}{(2-x^3)^2} dx = \frac{2}{3} \int \frac{3x^2}{(2-x^3)^2} dx = \frac{2}{3} \int (2-x^3)^{-2} 3x^2 dx = -\frac{2}{3(2-x^3)} + k$

f) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx = \int (1+e^x)^{-1/2} e^x dx = \frac{(1+e^x)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + k = 2\sqrt{e^x+1} + k$

■ Integración por partes

12 Aplica la integración por partes para resolver las siguientes integrales:

a) $\int x e^{2x} dx$

b) $\int x^2 \ln x dx$

c) $\int 3x \cos x dx$

d) $\int \ln(2x - 1) dx$

e) $\int \frac{x}{e^x} dx$

f) $\int \arccos x dx$

a) $\int x e^{2x} dx$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\int x e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + k$$

b) $\int x^2 \ln x dx$

$$\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + k$$

c) $\int 3x \cos x dx = 3 \int x \cos x dx$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$3 \int x \cos x dx = 3 \left[x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx \right] = 3 [x \operatorname{sen} x + \cos x] + k = 3x \operatorname{sen} x + 3 \cos x + k$$

d) $\int \ln(2x - 1) dx$

$$\begin{cases} u = \ln 2x - 1 \rightarrow du = \frac{2}{2x - 1} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \ln(2x - 1) dx &= x \ln(2x - 1) - \int \frac{2x}{2x - 1} dx = x \ln(2x - 1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x - 1} \right) dx = \\ &= x \ln(2x - 1) - x - \frac{1}{2} \ln(2x - 1) + k \end{aligned}$$

e) $\int \frac{x}{e^x} dx$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{e^x} dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + k$$

f) $\int \arccos x dx$

$$\begin{cases} u = \arccos x \rightarrow du = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int \arccos x dx = x \cdot \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + k$$

13 Resuelve las siguientes integrales aplicando dos veces la integración por partes:

a) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

b) $\int x^2 e^{2x} \, dx$

c) $\int e^x \cos x \, dx$

d) $\int (x + 1)^2 e^x \, dx$

a) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \underbrace{\int x \cos x \, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \rightarrow du_1 = dx \\ dv_1 = \cos x \, dx \rightarrow v_1 = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$I_1 = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

Por tanto:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + k$$

b) $\int x^2 e^{2x} \, dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx \\ dv = e^{2x} \, dx \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\int x^2 e^{2x} \, dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \underbrace{\int x e^{2x} \, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \rightarrow du_1 = dx \\ dv_1 = e^{2x} \, dx \rightarrow v_1 = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} \, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

Por tanto:

$$\int x^2 e^{2x} \, dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + k = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) e^{2x} + k$$

c) $\int e^x \cos x \, dx$

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x \, dx \\ dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$I = e^x \operatorname{sen} x - \underbrace{\int e^x \operatorname{sen} x \, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x \, dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$I_1 = -\cos x e^x + \int e^x \cos x \, dx$$

$$I = e^x \operatorname{sen} x - (-\cos x e^x + I)$$

$$2I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$$

$$I = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + k$$

d) $\int (x+1)^2 e^x dx$

$$\begin{cases} u = (x+1)^2 \rightarrow du = 2(x+1) dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\int (x+1)^2 e^x dx = (x+1)^2 e^x - 2 \underbrace{\int (x+1) e^x dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = (x+1) \rightarrow du_1 = dx \\ dv_1 = e^x dx \rightarrow v_1 = e^x \end{cases}$$

$$I_1 = (x+1) e^x - \int e^x dx = (x+1) e^x - e^x = (x+1-1) e^x = x e^x$$

Por tanto:

$$\int (x+1)^2 e^x dx = (x+1)^2 e^x - 2x e^x + k = (x^2 + 2x + 1 - 2x) e^x + k = (x^2 + 1) e^x + k$$

Página 351

Integrales racionales

14 Aplica la descomposición en fracciones simples para resolver las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx$

b) $\int \frac{3x^3}{x^2 - 4} dx$

c) $\int \frac{dx}{(x^2 - 25)(x - 4)}$

d) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} dx$

e) $\int \frac{4}{x^2 + x - 2} dx$

f) $\int \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3} dx$

a) $\int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx$

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} \begin{cases} A = -1/5 \\ B = 1/5 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx = \int \frac{-1/5}{x+3} dx + \int \frac{1/5}{x-2} dx = -\frac{1}{5} \ln|x+3| + \frac{1}{5} \ln|x-2| + k$$

b) $\int \frac{3x^3}{x^2 - 4} dx$

$$\frac{3x^3}{-3x^3 + 12x} \cdot \frac{x^2 - 4}{3x} \cdot \frac{3x^3}{x^2 - 4} = 3x + \frac{12x}{x^2 - 4}$$

$$\int \frac{3x^3}{x^2 - 4} dx = \int \left(3x + \frac{12x}{x^2 - 4} \right) dx = \frac{3x^2}{2} + 6 \ln|x^2 - 4| + k$$

c) $\int \frac{dx}{(x^2 - 25)(x - 4)} = \int \frac{dx}{(x+5)(x-5)(x-4)}$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x+5)(x-5)(x-4)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{x-4} \rightarrow A = \frac{1}{90}, B = \frac{1}{10}, C = -\frac{1}{9}$$

$$I = \frac{1}{90} \int \frac{1}{x+5} dx + \frac{1}{10} \int \frac{1}{x-5} dx - \frac{1}{9} \int \frac{1}{x-4} dx = \frac{1}{90} \ln|x+5| + \frac{1}{10} \ln|x-5| - \frac{1}{9} \ln|x-4| + k$$

d) $\int \frac{x^2+1}{x^2+x} dx$

Por el mismo procedimiento:

$$\frac{x^2+1}{x^2+x} = 1 + \frac{-x+1}{x^2+x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x} dx = x + \ln|x| - 2\ln|x+1| + k$$

e) $\int \frac{4}{x^2+x-2} dx$

$$\frac{4}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \rightarrow A = -\frac{4}{3}, B = \frac{4}{3}$$

$$\int \frac{4}{x^2+x-2} dx = -\frac{4}{3} \ln|x+2| + \frac{4}{3} \ln|x-1| + k$$

f) $\int \frac{x^2}{x^2+4x+3} dx$

$$\frac{x^2}{x^2+4x+3} = 1 - \frac{4x+3}{x^2+4x+3} = 1 - \left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} \right) \rightarrow A = \frac{9}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+4x+3} dx = \int \left[1 - \left(\frac{9/2}{x+3} + \frac{-1/2}{x+1} \right) \right] dx = x - \frac{9}{2} \ln|x+3| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + k$$

15 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2} dx$

b) $\int \frac{-16}{x^2-2x-15} dx$

c) $\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)} dx$

d) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$

e) $\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2} dx$

f) $\int \frac{3x-2}{x^2-4} dx$

a) $\int \frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2} dx = \int \left(2 + \frac{x-1}{x^2-3x+2} \right) dx = \int 2 dx + \int \frac{x-1}{x^2-3x+2} dx = 2x + I_1$

$$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} dx = \int \frac{1}{x-2} dx = \ln|x-2|$$

Por tanto, $I = 2x + \ln|x-2| + k$

b) $\int \frac{-16}{x^2-2x-15} dx = \int \frac{-16}{(x+3)(x-5)} dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-16}{(x+3)(x-5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} \rightarrow A = 2, B = -2$$

$$I = 2 \int \frac{1}{x+3} dx - 2 \int \frac{1}{x-5} dx = 2\ln|x+3| - 2\ln|x-5| + k$$

c) $\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)} dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)}$$

$$2x - 4 = A(x - 1)(x + 3) + B(x + 3) + C(x - 1)^2$$

Hallamos A , B y C :

$$\left. \begin{aligned} x = 1 &\rightarrow -2 = 4B &&\rightarrow B = -1/2 \\ x = -3 &\rightarrow -10 = 16C &&\rightarrow C = -5/8 \\ x = 0 &\rightarrow -4 = -3A + 3B + C &&\rightarrow A = 5/8 \end{aligned} \right\}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x - 4}{(x - 1)^2(x + 3)} dx &= \int \frac{5/8}{x - 1} dx + \int \frac{-1/2}{(x - 1)^2} dx + \int \frac{-5/8}{x + 3} dx = \\ &= \frac{5}{8} \ln|x - 1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x - 1)} - \frac{5}{8} \ln|x + 3| + k = \frac{5}{8} \ln\left(\frac{x - 1}{x + 3}\right) + \frac{1}{2x - 2} + k \end{aligned}$$

d) $\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 5} = \frac{A(x + 5) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 5)}$$

$$2x + 3 = A(x + 5) + B(x - 2)$$

Hallamos A y B :

$$\left. \begin{aligned} x = 2 &\rightarrow 7 = 7A &&\rightarrow A = 1 \\ x = -5 &\rightarrow -7 = -7B &&\rightarrow B = 1 \end{aligned} \right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} dx = \int \frac{1}{x - 2} dx + \int \frac{1}{x + 5} dx = \ln|x - 2| + \ln|x + 5| + k = \ln|(x - 2)(x + 5)| + k$$

e) $\int \frac{1}{(x - 1)(x + 3)^2} dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x - 1)(x + 3)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{(x + 3)^2}$$

$$\frac{1}{(x - 1)(x + 3)^2} = \frac{A(x + 3)^2 + B(x - 1)(x + 3) + C(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)^2}$$

$$1 = A(x + 3)^2 + B(x - 1)(x + 3) + C(x - 1)$$

Hallamos A , B y C :

$$\left. \begin{aligned} x = 1 &\rightarrow 1 = 16A &&\rightarrow A = 1/16 \\ x = -3 &\rightarrow 1 = -4C &&\rightarrow C = -1/4 \\ x = 0 &\rightarrow 1 = 9A - 3B - C &&\rightarrow B = -1/16 \end{aligned} \right\}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x - 1)(x + 3)^2} dx &= \int \frac{1/16}{x - 1} dx + \int \frac{-1/16}{x + 3} dx + \int \frac{-1/4}{(x + 3)^2} dx = \\ &= \frac{1}{16} \ln|x - 1| - \frac{1}{16} \ln|x + 3| + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x + 3)} + k = \frac{1}{16} \ln\left|\frac{x - 1}{x + 3}\right| + \frac{1}{4(x + 3)} + k \end{aligned}$$

f) $\int \frac{3x - 2}{x^2 - 4} dx = \int \frac{3x - 2}{(x - 2)(x + 2)} dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3x - 2}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$3x - 2 = A(x + 2) + B(x - 2)$$

Hallamos A y B :

$$\left. \begin{aligned} x=2 &\rightarrow 4=4A &\rightarrow A=1 \\ x=-2 &\rightarrow -4=-4B &\rightarrow B=2 \end{aligned} \right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4} dx = \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{2}{x+2} dx = \ln|x-2| + 2\ln|x+2| + k = \ln[|x-2|(x+2)^2] + k$$

Integrales por sustitución

16 Aplica el método de sustitución para resolver las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} \qquad \text{b) } \int x\sqrt[3]{x+2} dx \qquad \text{c) } \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x}-1} \qquad \text{d) } \int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}$$

a) Para eliminar la raíz hacemos $x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2t dt}{t^2-t} = \int \frac{2 dt}{t-1} = 2\ln|t-1| + k = 2\ln|\sqrt{x}-1| + k$$

b) Para eliminar la raíz hacemos $x+2 = t^3 \rightarrow dx = 3t^2 dt$ ($x = t^3 - 2$)

$$\int x\sqrt[3]{x+2} dx = \int (t^3-2)t \cdot 3t^2 dt = 3 \int (t^6-2t^3) dt = \frac{3t^7}{7} - \frac{3t^4}{2} + k = \frac{3\sqrt[3]{(x+2)^7}}{7} - \frac{3\sqrt[3]{(x+2)^4}}{2} + k$$

c) Para eliminar la raíz hacemos $x = t^6 \rightarrow dx = 6t^5 dt$

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x}-1} = \int \frac{t^3}{t^2-1} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{t^2-1} dt = 6 \int \left(t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt$$

Calculamos, usando el método de descomposición en fracciones simples:

$$\int \frac{1}{t^2-1} dt = \int \frac{1}{(t+1)(t-1)} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} dt = -\frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{2} \ln|t-1| + k$$

Ya que $\frac{1}{(t+1)(t-1)} = \frac{-1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1}$.

Terminamos el cálculo de la integral:

$$\begin{aligned} I &= 6 \left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t - \frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{2} \ln|t-1| \right) + k = \\ &= \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} + \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 3\ln|\sqrt[6]{x}+1| + 3\ln|\sqrt[6]{x}-1| + k \end{aligned}$$

d) Para eliminar la raíz hacemos $2-x = t^2 \rightarrow -dx = 2t dt \rightarrow dx = -2t dt$ ($x = 2 - t^2$)

$$\int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}} = \int \frac{-2t dt}{[3-(2-t^2)]t} = \int \frac{-2 dt}{t^2+1} = -2\operatorname{arc} \operatorname{tg} t + k = -2\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2-x} + k$$

Para resolver

17 Resuelve las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int x^4 e^{x^5} dx & \qquad \text{b) } \int x \operatorname{sen} x^2 dx & \qquad \text{c) } \int x \cdot 2^{-x} dx & \qquad \text{d) } \int x^3 \operatorname{sen} x dx \\ \text{e) } \int \sqrt{(x+3)^5} dx & \qquad \text{f) } \int \frac{-3x}{2-6x^2} dx & \qquad \text{g) } \int e^{2x+1} \cos x dx & \qquad \text{h) } \int x^5 e^{-x^3} dx \end{aligned}$$

a) $\int x^4 e^{x^5} dx = \frac{1}{5} \int 5x^4 e^{x^5} dx = \frac{1}{5} e^{x^5} + k$

b) $\int x \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{-1}{2} \cos x^2 + k$

c) $\int x \cdot 2^{-x} dx$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = 2^{-x} dx \rightarrow v = \frac{-2^{-x}}{\ln 2} \end{cases}$$

$$\int x 2^{-x} dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} + \int \frac{2^{-x}}{\ln 2} dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} \int 2^{-x} dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{(\ln 2)^2} + k$$

d) $\int x^3 \operatorname{sen} x dx$

$$\begin{cases} u = x^3 \rightarrow du = 3x^2 dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x^3 \operatorname{sen} x dx = -x^3 \cos x + 3 \int \underbrace{x^2 \cos x dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x^2 \rightarrow du_1 = 2x dx \\ dv_1 = \cos x dx \rightarrow v_1 = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$I_1 = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int \underbrace{x \operatorname{sen} x dx}_{I_2}$$

$$\begin{cases} u_2 = x \rightarrow du_2 = dx \\ dv_2 = \operatorname{sen} x dx \rightarrow v_2 = -\cos x \end{cases}$$

$$I_2 = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x$$

Así: $I_1 = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$

Por tanto:

$$\int x^3 \operatorname{sen} x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + k$$

e) $\int \sqrt{(x+3)^5} dx = \int (x+3)^{5/2} dx = \frac{(x+3)^{7/2}}{7/2} = \frac{2}{7} \sqrt{(x+3)^7} + k$

f) $\int \frac{-3x}{2-6x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{-12x}{2-6x^2} dx = \frac{1}{4} \ln |2-6x^2| + k$

g) Esta es una integral que se resuelve aplicando el método de integración por partes dos veces:

$$I = \int e^{2x+1} \cos x dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = e^{2x+1} \rightarrow du = 2e^{2x+1} dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$I = e^{2x+1} \operatorname{sen} x - 2 \int e^{2x+1} \operatorname{sen} x dx = e^{2x+1} \operatorname{sen} x - 2I_1$$

$$I_1 = \int e^{2x+1} \operatorname{sen} x dx$$

Integramos I_1 por partes:

$$\begin{cases} u = e^{2x+1} \rightarrow du = 2e^{2x+1} dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$I_1 = -e^{2x+1} \cos x + 2 \int e^{2x+1} \cos x dx$$

Sustituyendo en I :

$$\begin{aligned} \int e^{2x+1} \cos x \, dx &= e^{2x+1} \operatorname{sen} x - 2 \left(-e^{2x+1} \cos x + 2 \int e^{2x+1} \cos x \, dx \right) = \\ &= e^{2x+1} \operatorname{sen} x + 2e^{2x+1} \cos x - 4 \int e^{2x+1} \cos x \, dx \end{aligned}$$

Pasamos la integral al primer miembro y despejamos:

$$\int e^{2x+1} \cos x \, dx = \frac{e^{2x+1} \operatorname{sen} x + 2e^{2x+1} \cos x}{5} + k = \frac{e^{2x+1}}{5} (\operatorname{sen} x + 2 \cos x) + k$$

h) $\int x^5 e^{-x^3} \, dx = \int x^3 \cdot x^2 e^{-x^3} \, dx$

$$\begin{cases} u = x^3 \rightarrow du = 3x^2 \, dx \\ dv = x^2 e^{-x^3} \, dx \rightarrow v = \frac{-1}{3} e^{-x^3} \end{cases}$$

$$\int x^5 e^{-x^3} \, dx = \frac{-x^3}{3} e^{-x^3} + \int x^2 e^{-x^3} \, dx = \frac{-x^3}{3} e^{-x^3} - \frac{1}{3} e^{-x^3} + k = \frac{(-x^3 - 1)}{3} e^{-x^3} + k$$

18 Calcula los siguientes integrales:

a) $\int \frac{x+2}{x^2+1} \, dx$

b) $\int \frac{1}{(x^2-1)^2} \, dx$

c) $\int \frac{x+2}{2x^2+x-1} \, dx$

d) $\int \frac{x-1}{4x^2-9} \, dx$

e) $\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1} \, dx$

f) $\int \frac{3x-1}{2x^2+8} \, dx$

a) $\int \frac{x+2}{x^2+1} \, dx \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx + \int \frac{2}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + k$

(1) Hacemos $\int \frac{(x+2) \, dx}{x^2+1} = \int \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \right) \, dx$

b) $\int \frac{1}{(x^2-1)^2} \, dx = \int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} \, dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$1 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2$$

Calculamos A , B , C y D dando a x los valores 1, -1, 0 y 2:

$$\left. \begin{aligned} x=1 &\rightarrow 1=4B \rightarrow B=1/4 \\ x=-1 &\rightarrow 1=4D \rightarrow D=1/4 \\ x=0 &\rightarrow 1=-A+B+C+D \rightarrow 1/2=-A+C \\ x=2 &\rightarrow 1=9A+9B+3C+D \rightarrow -3/2=9A+3C \rightarrow -1/2=3A+C \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= -1/4 \\ B &= 1/4 \\ C &= 1/4 \\ D &= 1/4 \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^2} \, dx = \int \frac{-1/4}{x-1} \, dx + \int \frac{1/4}{(x-1)^2} \, dx + \int \frac{1/4}{x+1} \, dx + \int \frac{1/4}{(x+1)^2} \, dx =$$

$$= \frac{-1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + k =$$

$$= \frac{-1}{4} \left[\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} \right] + k = \frac{-1}{4} \left[\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{2x}{x^2-1} \right] + k$$

$$c) \int \frac{x+2}{2x^2+x-1} dx = \int \frac{x+2}{(x+1)(2x-1)} dx$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{(x+1)(2x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} \rightarrow A = -\frac{1}{3}, B = \frac{5}{3}$$

$$I = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{5}{3} \int \frac{dx}{2x-1} = -\frac{1}{3} \ln(x+1) + \frac{5}{6} \ln(2x-1) + k$$

$$d) \int \frac{x-1}{4x^2-9} dx = \int \frac{x-1}{(2x+3)(2x-3)} dx$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x-1}{(2x+3)(2x-3)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{2x-3} \rightarrow A = \frac{5}{12}, B = \frac{1}{12}$$

$$I = \frac{5}{12} \int \frac{dx}{2x+3} + \frac{1}{12} \int \frac{dx}{2x-3} = \frac{5}{24} \ln(2x+3) + \frac{1}{24} \ln(2x-3) + k$$

$$e) \int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1} dx = \int \frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} dx$$

Descomponemos en fracciones simples (para ello, encontramos las raíces del denominador):

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$2x^2+7x-1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

Hallamos A , B y C :

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \rightarrow 8=4A \rightarrow A=2 \\ x=-1 \rightarrow -6=-2C \rightarrow C=3 \\ x=0 \rightarrow -1=A-B-C \rightarrow B=0 \end{array} \right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1} dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{(x+1)^2} dx = 2 \ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + k$$

$$f) \int \frac{3x-1}{2x^2+8} dx$$

Como el denominador no tiene raíces:

$$I = \frac{3}{4} \int \frac{4x}{2x^2+8} dx - \int \frac{dx}{2x^2+8} = \frac{3}{4} \ln(2x^2+8) - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{3}{4} \ln(2x^2+8) - \frac{1}{8} \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + k = \frac{3}{4} \ln(2x^2+8) - \frac{1}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + k$$

19 Resuelve las integrales siguientes:

a) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ b) $\int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{x + \cos x} dx$

c) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ d) $\int \frac{1 + e^x}{e^x + x} dx$

e) $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ f) $\int \ln(x - 3) dx$

g) $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ h) $\int \ln(x^2 + 1) dx$

a) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{\ln^2 |x|}{2} + k$

b) $\int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{x + \cos x} dx = \ln |x + \cos x| + k$

c) $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1/x}{\ln x} dx = \ln |\ln |x|| + k$

d) $\int \frac{1 + e^x}{e^x + x} dx = \ln |e^x + x| + k$

e) $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} (-\operatorname{sen} \sqrt{x}) dx = -2 \cos(\sqrt{x}) + k$

f) $\int \ln(x - 3) dx$

$$\begin{cases} u = \ln(x - 3) \rightarrow du = \frac{1}{x - 3} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \ln(x - 3) dx &= x \ln|x - 3| - \int \frac{x}{x - 3} dx = x \ln|x - 3| - \int 1 + \frac{3}{x - 3} dx = \\ &= x \ln|x - 3| - x - 3 \ln|x - 3| + k = (x - 3) \ln|x - 3| - x + k \end{aligned}$$

g) $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

$$\begin{cases} u = \ln \sqrt{x} \rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x} dx \\ v = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \rightarrow dv = 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= 2\sqrt{x} \ln \sqrt{x} - \int \frac{2\sqrt{x}}{2x} dx = 2\sqrt{x} \ln \sqrt{x} - \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \\ &= 2\sqrt{x} \ln \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + k = 2\sqrt{x} (\ln \sqrt{x} - 1) + k \end{aligned}$$

h) $\int \ln(x^2 + 1) dx$

$$\begin{cases} u = \ln(x^2 + 1) \rightarrow du = \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 1) dx &= x \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx = x \ln(x^2 + 1) - \int \left(2 - \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + k \end{aligned}$$

20 Calcula las siguientes integrales:

- a) $\int \frac{\text{sen}(1/x)}{x^2} dx$ b) $\int \frac{2x}{x+2} dx$ c) $\int \frac{\text{arc tg } x}{1+x^2} dx$ d) $\int \frac{\text{sen } x}{\cos^4 x} dx$
 e) $\int (\ln x)^2 dx$ f) $\int e^x \cos e^x dx$ g) $\int \frac{1}{1-x^2} dx$ h) $\int \frac{(1-x)^2}{1+x} dx$

a) $\int \frac{\text{sen}(1/x)}{x^2} dx = -\int \frac{-1}{x^2} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + k$

b) $\int \frac{2x}{x+2} dx = \int \left(2 - \frac{4}{x+2}\right) dx = \int 2 dx - 4 \int \frac{dx}{x+2} = 2x - 4 \ln|x+2| + k$

c) $\int \frac{\text{arc tg } x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} \text{arc tg } x dx = \frac{\text{arc tg}^2 x}{2} + k$

d) $\int \frac{\text{sen } x}{\cos^4 x} dx = -\int (-\text{sen } x) (\cos x)^{-4} dx = \frac{-(\cos x)^{-3}}{-3} + k = \frac{1}{3\cos^3 x} + k$

e) $\int (\ln x)^2 dx$

$$\begin{cases} u = (\ln x)^2 \rightarrow du = 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$\int (\ln x)^2 dx = x (\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx = x \ln^2|x| - 2x \ln|x| + 2x + k$

f) $\int e^x \cos e^x dx = \text{sen } e^x + k$

g) $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{-1}{(x+1)(x-1)} dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

Hallamos A y B:

$$\begin{cases} x = -1 \rightarrow -1 = -2A \rightarrow A = 1/2 \\ x = 1 \rightarrow -1 = 2B \rightarrow B = -1/2 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \left(\frac{1/2}{x+1} + \frac{-1/2}{x-1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x-1| + k = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + k$$

h) $\int \frac{(1-x)^2}{1+x} dx = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} dx = \int \left(x - 3 + \frac{4}{x+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln|x+1| + k$

21 Resuelve por sustitución:

- a) $\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}} dx$ b) $\int \sqrt{3x-2} dx$

a) Hacemos $e^x = t^2 \rightarrow e^x dx = 2t dt$

$$\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}} dx = \int \frac{2t}{1-t} dt = \int \left(-2 - \frac{2}{t-1} \right) dt = -2t - 2 \ln|t-1| + k = -2\sqrt{e^x} - 2 \ln(\sqrt{e^x} - 1) + k$$

b) Hacemos $3x-2 = t^2 \rightarrow 3 dx = 2t dt \rightarrow dx = \frac{2}{3} t dt$

$$\int \sqrt{3x-2} dx = \int t \cdot \frac{2}{3} t dt = \frac{2}{3} \int t^2 dt = \frac{2t^3}{9} + k = \frac{2\sqrt{(3x-2)^3}}{9} + k$$

22 Resuelve:

a) $\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}} dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$

a) $\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx + 4 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$
 $= -\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + 4 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + k = -\sqrt{1-x^2} + 4 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + k$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} (2x-3) + k$

23 Calcula estas integrales:

a) $\int \frac{5x^2}{x^3-3x^2+3x-1} dx$

b) $\int \frac{x^2-3}{x^2-2x+5} dx$

c) $\int \frac{x^4-2x-6}{x^3+x^2-2x} dx$

d) $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} dx$

a) $\int \frac{5x^2}{x^3-3x^2+3x-1} dx = \int \frac{5x^2}{(x-1)^3} dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{5x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \rightarrow A=5, B=10, C=5$$

$$I = 5 \int \frac{dx}{x-1} + 10 \int (x-1)^{-2} dx + 5 \int (x-1)^{-3} dx = 5 \ln|x-1| - \frac{10}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)^2} + k$$

b) $\int \frac{x^2-3}{x^2-2x+5} dx = \int \left(1 + \frac{2x-8}{x^2-2x+5} \right) dx = \int dx + \int \frac{2x-8}{x^2-2x+5} dx$

Calculamos la segunda integral teniendo en cuenta que el denominador no tiene raíces.

$$I_1 = \int \frac{2x-8}{x^2-2x+5} dx = \int \frac{2x-2-6}{x^2-2x+5} dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx - 6 \int \frac{1}{x^2-2x+5} dx = \ln(x^2-2x+5) - 6I_2$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2-2x+5} dx = \int \frac{1}{x^2-2x+1+4} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} dx =$$

 $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-1}{2} + k = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-1}{2} + k$

Sustituimos en I_1 :

$$I_1 = \ln(x^2-2x+5) - 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-1}{2} + k$$

Sustituimos en I :

$$I = x + \ln(x^2-2x+5) - 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-1}{2} + k$$

c) $\int \frac{x^4-2x-6}{x^3+x^2-2x} dx = \int \left(x-1 - \frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x} \right) dx = \int (x-1) dx - \int \frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x} dx$

Calculamos la segunda integral descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x} = \frac{-3x^2+4x+6}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} \rightarrow A=-3, B=-\frac{7}{3}, C=\frac{7}{3}$$

$$\int \frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x} dx = -3 \int \frac{dx}{x} - \frac{7}{3} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{7}{3} \int \frac{dx}{x-1} = -3 \ln|x| - \frac{7}{3} \ln|x+2| + \frac{7}{3} \ln|x-1| + k$$

Sustituimos en I :

$$I = \frac{x^2}{2} - x + 3 \ln x + \frac{7}{3} \ln(x+2) - \frac{7}{3} \ln(x-1) + k$$

d) $\int \frac{2x^2 + 12x - 6}{(x-2)(x^2+9)} dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x^2 + 12x - 6}{(x-2)(x^2+9)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+9} \rightarrow A=2, M=0, N=12$$

$$I = 2 \int \frac{dx}{x-2} + 12 \int \frac{dx}{x^2+9}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} + k = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} + k$$

Sustituimos en I :

$$I = 2 \ln(x-2) + 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} + k$$

24 Resuelve estas integrales utilizando un cambio de variable:

a) $\int x \sqrt{x+1} dx$

b) $\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

d) $\int \frac{1}{x \sqrt{x+1}} dx$

e) $\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$

f) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

a) $\int x \sqrt{x+1} dx$

Cambio: $x + 2 = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$

$$\int x \sqrt{x+1} dx = \int (t^2 - 1)t \cdot 2t dt = \int (2t^4 - 2t^2) dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + k = \frac{2\sqrt{(x+1)}^5}{5} - \frac{2\sqrt{(x+1)}^3}{3} + k$$

b) $\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$

Cambio: $x = t^4 \rightarrow dx = 4t^3 dt$

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3 dt}{t^4 - t} = \int \frac{4t^2 dt}{t^3 - 1} = \frac{4}{3} \int \frac{3t^2 dt}{t^3 - 1} = \frac{4}{3} \ln|t^3 - 1| + k = \frac{4}{3} \ln|\sqrt[4]{x^3} - 1| + k$$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{(t^2 - 1)}{t} \cdot 2t dt = \int (2t^2 - 2) dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + k = \frac{2\sqrt{(x+1)}^3}{3} - 2\sqrt{x+1} + k$$

d) $\int \frac{1}{x \sqrt{x+1}} dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$

$$\int \frac{1}{x \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{2t dt}{(t^2 - 1)t} = \int \frac{2 dt}{(t+1)(t-1)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t+1)}{(t+1)(t-1)}$$

$$2 = A(t-1) + B(t+1)$$

Hallamos A y B :

$$\left. \begin{aligned} t = -1 &\rightarrow 2 = -2A \rightarrow A = -1 \\ t = 1 &\rightarrow 2 = 2B \rightarrow B = 1 \end{aligned} \right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2 dt}{(t+1)(t-1)} = \int \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t-1} \right) dt = -\ln|t+1| + \ln|t-1| + k = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + k$$

Así:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + k$$

e) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

Cambio: $x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t dt}{t^2+t} = \int \frac{2 dt}{t+1} = 2 \ln|t+1| + k = 2 \ln(\sqrt{x}+1) + k$$

f) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

Cambio: $x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \int \frac{t \cdot 2t dt}{1+t^2} = \int \frac{2t^2 dt}{1+t^2} = \int \left(2 - \frac{2}{1+t^2} \right) dt = 2t - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + k = 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} + k$$

25 Calcula:

a) $\int \frac{1}{1+e^x} dx$

b) $\int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}} dx$

c) $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

d) $\int \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x} dx$

e) $\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1} dx$

f) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

a) $\int \frac{1}{1+e^x} dx \stackrel{(1)}{=} \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} dx = \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx = x - \ln(1+e^x) + k$

(1) Sumamos y restamos e^x en el numerador.

b) $\int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx + \int \frac{3 dx}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{9-x^2}} dx + \int \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} dx =$
 $= -\sqrt{9-x^2} + 3 \int \frac{1/3}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}} dx = -\sqrt{9-x^2} + 3 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) + k$

c) $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

Hacemos el cambio: $e^x = t \rightarrow x = \ln t \rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \int \frac{1/t}{t^2-3t} dt = \int \frac{1}{t^3-3t^2} dt = \int \frac{1}{t^2(t-3)} dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-3} = \frac{At(t-3) + B(t-3) + Ct^2}{t^2(t-3)}$$

$$1 = At(t-3) + B(t-3) + Ct^2$$

Hallamos A , B y C :

$$\left. \begin{aligned} t=0 &\rightarrow 1=-3B && \rightarrow B=-1/3 \\ t=3 &\rightarrow 1=9C && \rightarrow C=1/9 \\ t=1 &\rightarrow 1=-2A-2B+C && \rightarrow A=-1/9 \end{aligned} \right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{1}{t^2(t-3)} dt = \int \left(\frac{-1/9}{t} + \frac{-1/3}{t^2} + \frac{1/9}{t-3} \right) dt = \frac{-1}{9} \ln|t| + \frac{1}{3t} + \frac{1}{9} \ln|t-3| + k$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \frac{-1}{9} \ln e^x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9} \ln|e^x-3| + k = -\frac{1}{9} x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9} \ln|e^x-3| + k$$

d) $\int \frac{\operatorname{sen}(tg x)}{\cos^2 x} dx = -\cos(tg x) + k$, ya que $D[tg x] = \frac{1}{\cos^2 x}$.

e) $\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1} dx$

Hacemos el cambio: $e^x = t \rightarrow x = \ln t \rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1} dx &= \int \frac{t^3-t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t^2-1}{t^2+1} dt = \int \left(1 - \frac{2}{t^2+1} \right) dt = \\ &= t - 2 \operatorname{arc} tg t + k = e^x - 2 \operatorname{arc} tg(e^x) + k \end{aligned}$$

f) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

Hacemos el cambio: $x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t dt}{1+t} = \int \left(2 - \frac{2}{1+t} \right) dt = 2t - 2 \ln|1+t| + k = 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + k$$

Página 352

26 Para resolver la integral $\int \cos^3 x dx$, hacemos:

$$\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x (1 - \operatorname{sen}^2 x) = \cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x$$

Resuélvela y calcula después $\int \operatorname{sen}^3 x dx$.

$$\int \cos^3 x dx = \int (\cos x - \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x) dx = \int \cos x dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x dx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + k$$

Para la segunda parte del problema calculamos:

$$\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x dx = \int (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x) dx = \int \operatorname{sen} x dx + \int \cos^2 x (-\operatorname{sen} x) dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + k$$

27 Calcula las siguientes integrales utilizando las relaciones trigonométricas:

a) $\int (\operatorname{sen}^2 x + 2 \cos 2x) dx$

b) $\int \frac{(1-2 \cos^2 x) \cos x}{\cos 2x} dx$

c) $\int (\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} 2x) dx$

d) $\int (\cos^2 x - \cos 2x) dx$

* Ayuda: Ten en cuenta que $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ y que $1 - \cos 2x = 2\operatorname{sen}^2 x$.

a) Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^2 x + 2\cos 2x = \frac{1-\cos 2x}{2} + 2\cos 2x = \frac{3}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$, obtenemos:

$$\int (\operatorname{sen}^2 x + 2\cos 2x) dx = \int \left(\frac{3}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{3}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{x}{2} + k$$

$$b) \int \frac{(1 - 2\cos^2 x) \cos x}{\cos 2x} dx = \int \frac{(1 - 2\cos^2 x) \cos x}{\cos 2x} dx = \int \frac{-\cos 2x \cdot \cos x}{\cos 2x} dx = -\int \cos x dx = -\operatorname{sen} x + k$$

c) Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} 2x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \operatorname{sen} 2x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x}{2}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} 2x dx &= \int \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int \operatorname{sen} 2x \cdot 2 dx - \frac{1}{4} \int \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 dx = \\ &= -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{2} + k = -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \operatorname{sen}^2 2x + k \end{aligned}$$

d) Teniendo en cuenta que $\cos^2 x - \cos 2x = \frac{1 + \cos 2x}{2} - \cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$, obtenemos:

$$\int (\cos^2 x - \cos 2x) dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + k$$

28 Calcula $\int \frac{x^3}{(x+1)^2} dx$

a) Por descomposición en fracciones simples.

b) Mediante un cambio de variable.

$$a) I = \int \frac{x^3}{(x+1)^2} dx = \int \left(x - 2 + \frac{3x+2}{(x+1)^2} \right) dx = \int (x-2) dx + \int \frac{3x+2}{(x+1)^2} dx$$

Descomponemos la segunda integral en fracciones simples:

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \rightarrow A=3, B=-1$$

$$\int \frac{3x+2}{(x+1)^2} dx = 3 \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} = 3 \ln|x+1| + \frac{1}{x+1}$$

Sustituimos en I:

$$I = \frac{x^2}{2} - 2x + 3 \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + k$$

b) Llamamos $u = x + 1 \rightarrow du = dx$ ($x = u - 1$)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{(u-1)^3}{u^2} du = \int \frac{u^3 - 3u^2 + 3u - 1}{u^2} du = \int \left(u - 3 + \frac{3}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du = \\ &= \frac{u^2}{2} - 3u + 3 \ln u + \frac{1}{u} + k = \frac{(x+1)^2}{2} - 3(x+1) + 3 \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + k \end{aligned}$$

29 Resuelve las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$b) \int \frac{(x+5) dx}{x^2 + 2x + 3}$$

$$c) \int \frac{x+1}{x^3 + 2x^2 + 3x} dx$$

$$d) \int \frac{2x-1}{x^3+x} dx$$

$$e) \int \frac{x^2 + 3x + 8}{x^2 + 9} dx$$

$$f) \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

a) El denominador no tiene raíces.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+2) + k$$

b) El denominador no tiene raíces.

$$I = \int \frac{(x+5) dx}{x^2 + 2x + 3} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - \frac{1}{2} \cdot 2 + 5}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 3} dx + 4 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{1}{2} I_1 + 4I_2$$

$$I_1 = \ln(x^2 + 2x + 3) + k$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1 + 2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + k = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

Por tanto:

$$I = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) + 2\sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

c) $I = \int \frac{x+1}{x^3 + 2x^2 + 3x} dx = \int \frac{x+1}{x(2x + x^2 + 3)} dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+1}{x(2x + x^2 + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 3} \rightarrow A = \frac{1}{3}, M = -\frac{1}{3}, N = \frac{1}{3}$$

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{1}{3} \ln|x| - \frac{1}{3} I_1$$

$$I_1 = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - \frac{1}{2} \cdot 2 - 1}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 3} dx - 2 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) - \sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

(*) La segunda integral está resuelta en el apartado anterior.

Por tanto:

$$I = \frac{1}{3} \ln x - \frac{1}{6} \ln(x^2 + 2x + 3) + \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

d) $I = \int \frac{2x-1}{x^3 + x} dx = \int \frac{2x-1}{x(x^2 + 1)} dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1} \rightarrow A = -\frac{1}{2}, M = 1, N = 2$$

$$I = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x+2}{x^2 + 1} = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = -\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + 2 \operatorname{arc\,tg} x + k$$

e) $I = \int \frac{x^2 + 3x + 8}{x^2 + 9} dx = \int \left(1 + \frac{3x-1}{x^2 + 9}\right) dx = \int dx + \int \frac{3x-1}{x^2 + 9} dx$

$$\int \frac{3x-1}{x^2 + 9} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 9} dx - \int \frac{1}{x^2 + 9} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} + k$$

Ya que:

$$\int \frac{1}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{9} \frac{1}{\frac{1}{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} + k = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} + k$$

Sustituyendo en I :

$$I = x + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} + k$$

$$f) I = \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \rightarrow A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, M = -\frac{1}{2}, N = 0$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4} \ln|x^2+1| + k$$

30 Encuentra la primitiva de $f(x) = \frac{3x}{1-x^2}$ que pasa por el punto (0, 3).

$$F(x) = \int \frac{3x}{1-x^2} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx = -\frac{3}{2} \ln|1-x^2| + k$$

Como pasa por (0, 3) se cumple que $F(0) = 3$.

$$-\frac{3}{2} + k = 3 \rightarrow k = \frac{9}{2}$$

Luego la primitiva buscada es $F(x) = -\frac{3}{2} \ln|1-x^2| + \frac{9}{2}$.

31 Halla la función F para la que $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ y $F(1) = 2$.

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} + k$$

$$F(1) = -1 + k = 2 \rightarrow k = 3$$

$$\text{Por tanto: } F(x) = \frac{-1}{x} + 3$$

32 De todas las primitivas de la función $y = 4x - 6$, ¿cuál de ellas toma el valor 4 para $x = 1$?

$$F(x) = \int (4x - 6) dx = 2x^2 - 6x + k$$

$$F(1) = 2 - 6 + k = 4 \rightarrow k = 8$$

$$\text{Por tanto: } F(x) = 2x^2 - 6x + 8$$

33 Halla $f(x)$ sabiendo que:

$$f'''(x) = 6x, f'(0) = 1 \text{ y } f(2) = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \int 6x dx = 3x^2 + c \\ f'(0) = c = 1 \end{array} \right\} f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + k \\ f(2) = 10 + k = 5 \end{array} \right\} \rightarrow k = -5$$

$$\text{Por tanto: } f(x) = x^3 + x - 5$$

34 Encuentra una primitiva de $f(x) = x^2 \text{ sen } x$ cuyo valor para $x = 0$ sea 1.

$$F(x) = \int x^2 \text{ sen } x dx$$

Integramos por partes:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = \text{sen } x dx \rightarrow v = -\text{cos } x \end{array} \right.$$

$$F(x) = -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx = -x^2 \cdot \cos x + 2I$$

Integramos I por partes:

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$I = x \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx = x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x$$

Sustituimos en F :

$$F(x) = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \operatorname{sen} x + 2\cos x + k$$

Ahora se debe cumplir que $F(0) = 1 \rightarrow 2 + k = 1 \rightarrow k = -1$.

La primitiva es $F(x) = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \operatorname{sen} x + 2\cos x - 1$.

35 Determina la función $f(x)$ sabiendo que:

$$f''(x) = x \ln x, \quad f'(1) = 0 \quad \text{y} \quad f(e) = \frac{e}{4}$$

$$f'(x) = \int f''(x) \, dx \rightarrow f'(x) = \int x \ln x \, dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = x \, dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + k = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + k$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) + k = -\frac{1}{4} + k = 0 \rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \int f'(x) \, dx \rightarrow f(x) = \int \left[\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \right] dx = \underbrace{\int \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) dx}_I + \frac{1}{4} x$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \rightarrow du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = \frac{x^2}{2} \, dx \rightarrow v = \frac{x^3}{6} \end{cases}$$

$$I = \frac{x^3}{6} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) - \int \frac{x^2}{6} \, dx = \frac{x^3}{6} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) - \frac{x^3}{18} + k$$

Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{6} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{4} x + k \\ f(e) &= \frac{e^3}{12} - \frac{e^3}{18} + \frac{e}{4} + k = \frac{e^3}{36} + \frac{e}{4} + k = \frac{e}{4} \rightarrow k = -\frac{e^3}{36} \end{aligned} \right\}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{4} x - \frac{e^3}{36}$$

36 Calcula la expresión de una función $f(x)$ tal que:

$$f'(x) = x e^{-x^2} \text{ y } f(0) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int -2x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + k$$

$$f(0) = -\frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} \rightarrow k = 1$$

$$\text{Por tanto: } f(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + 1$$

37 De una función $y = f(x)$, $x > -1$, sabemos que tiene por derivada $y' = \frac{a}{1+x}$, donde a es una constante.

Determina la función si, además, sabemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

$$y = \int \frac{a}{1+x} dx \rightarrow f(x) = a \ln(1+x) + k \quad (x > -1)$$

$$f(0) = 1 \rightarrow a \ln(1+0) + k = 1 \rightarrow k = 1$$

$$f(1) = -1 \rightarrow a \ln 2 + k = -1 \rightarrow a \ln 2 = -1 - 1 \rightarrow a = \frac{-2}{\ln 2}$$

$$\text{Por tanto, } f(x) = \frac{-2}{\ln 2} \ln(1+x) + 1, \quad x > -1.$$

38 Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(1+x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

$$\int \ln(1+x^2) dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \ln(1+x^2) \rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \ln(1+x^2) dx &= x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = x \ln(1+x^2) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \\ &= x \ln(1+x^2) - 2(x - \text{arc tg } x) + k \end{aligned}$$

$$F(x) = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \text{arc tg } x + k$$

$$\text{Debe pasar por } (0, 0) \rightarrow F(0) = 0$$

$$F(0) = 0 - 2 \cdot 0 + 0 + k = 0 \rightarrow k = 0$$

$$\text{Así, } F(x) = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \text{arc tg } x.$$

39 Calcula el valor del parámetro a para que una primitiva de la función:

$$\int (ax^2 + x \cos x + 1) dx$$

pase por $(\pi, -1)$.

$$I = \int (ax^2 + x \cos x + 1) dx = \int (ax^2 + 1) dx + \int x \cos x dx = \frac{ax^3}{3} + x + \underbrace{\int x \cos x dx}_{I_1}$$

Calculamos I_1 por partes:

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \text{sen } x \end{cases}$$

$$I_1 = x \text{sen } x - \int \text{sen } x dx = x \text{sen } x + \cos x + k$$

$$F(x) = \frac{ax^3}{3} + x + x \operatorname{sen} x + \cos x$$

Como pasa por $(\pi, -1)$:

$$F(\pi) = -1 \rightarrow \frac{a\pi^3}{3} + \pi + \pi \cdot \operatorname{sen} \pi + \cos \pi = -1$$

$$\frac{a\pi^3}{3} + \pi - 1 = -1 \rightarrow \frac{a\pi^3}{3} = -\pi \rightarrow a = \frac{-3\pi}{\pi^3} = \frac{-3}{\pi^2}$$

$$\text{Así, } F(x) = \frac{-3}{\pi^2} \cdot \frac{x^3}{3} + x + x \operatorname{sen} x + \cos x = -\frac{x^3}{\pi^2} + x + x \operatorname{sen} x + \cos x$$

40 Halla $\int e^{ax}(x^2 + bx + c) dx$ en función de los parámetros a , b y c .

$$I = \int e^{ax}(x^2 + bx + c) dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 + bx + c \rightarrow du = (2x + b) dx \\ dv = e^{ax} dx \rightarrow v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}$$

Así:

$$I = \frac{1}{a} e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a} \int \underbrace{e^{ax}(2x + b)}_{I_1} dx$$

Volvemos a integrar por partes:

$$\begin{cases} u = 2x + b \rightarrow du = 2 dx \\ dv = e^{ax} dx \rightarrow v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a} I_1 = \frac{1}{a} e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a} \left[\frac{1}{a} e^{ax}(2x + b) - \frac{1}{a} \int e^{ax} 2 dx \right] = \\ &= \frac{1}{a} e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a^2} e^{ax}(2x + b) + \frac{2}{a^3} e^{ax} + k \end{aligned}$$

41 Encuentra la función derivable $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple $f(1) = -1$ y tal que:

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- Si $x \neq 0$:

$$f(x) = \int f'(x) dx \begin{cases} \int (x^2 - 2x) dx & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \int (e^x - 1) dx & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + k & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ e^x - x + c & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

- Hallamos k y c teniendo en cuenta que $f(1) = -1$ y que $f(x)$ ha de ser continua en $x = 0$.

$$f(1) = -1 \rightarrow e - 1 + c = -1 \rightarrow c = -e$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= k \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 1 - e \end{aligned} \right\} k = 1 - e$$

$$\text{Por tanto: } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ e^x - x - e & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

42 De una función derivable se sabe que pasa por el punto $A(-1, -4)$ y que su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leq 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

a) Si $x \neq 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ \ln x + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos k y c teniendo en cuenta que $f(-1) = -4$ y que $f(x)$ ha de ser continua en $x = 1$:

$$f(-1) = -\frac{5}{2} + k = -4 \rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = c \end{array} \right\} c = 0$$

$$\text{Por tanto: } f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) $f(2) = \ln 2$; $f'(2) = \frac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente será: $y = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2)$

43 Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 3x^2 - 6x$ tal que $F(x)$ tenga un mínimo en el punto $(2, 0)$.

Determina los demás puntos singulares de $F(x)$.

$$F(x) = \int (3x^2 - 6x) dx = x^3 - 3x^2 + k$$

La función pasa por el punto $(2, 0)$ por ser un mínimo.

$$F(2) = 0 \rightarrow -4 + k = 0 \rightarrow k = 4$$

$$\text{Así: } F(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

Calculamos los demás puntos singulares:

$$F'(x) = f(x) = 3x^2 - 6x$$

$$F'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$

$$F''(x) = 6x - 6$$

$$F''(0) < 0 \rightarrow x = 0, y = 4 \rightarrow \text{El punto } (0, 4) \text{ es un máximo relativo.}$$

$$F''(2) > 0 \rightarrow \text{Efectivamente, el punto } (2, 0) \text{ es un mínimo relativo.}$$

44 Halla la función $f(x)$ de la que conocemos $f''(x) = e^x$, $f'(1) = 0$ y $f(0) = 1$.

$$f''(x) = e^x \rightarrow f'(x) = \int x^x dx = e^x + c_1$$

$$f'(1) = 0 = e^1 + c_1 \rightarrow c_1 = -e$$

$$f'(x) = e^x - e \rightarrow f(x) = \int (e^x - e) dx = e^x - xe + c_2$$

$$f(0) = 1 = e^0 - 0e + c_2 \rightarrow c_2 = 0$$

$$f(x) = e^x - xe$$

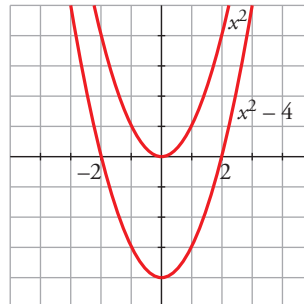
45 Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 2x$ tal que $F(x) \leq 0$ en el intervalo $[-2, 2]$.

$$F(x) = \int 2x \, dx = x^2 + k$$

$$x^2 + k \leq 0 \text{ en } [-2, 2]$$

Debe ser $k \leq -4$; por ejemplo, la función $F(x) = x^2 - 4$ es menor o igual que 0 en $[-2, 2]$.

Representamos x^2 y $x^2 - 4$:



46 Halla $f(x)$ sabiendo que:

$$f''(x) = \cos \frac{x}{2}, \quad f'(2\pi) = 0 \text{ y } f(0) = 1$$

$$f'(x) = \int f''(x) \, dx = \int \cos \frac{x}{2} \, dx = 2 \int \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \, dx = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + k$$

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + k; \text{ como } f'(2\pi) = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2} + k = 0 \rightarrow k = 0$$

$$f(x) = \int f'(x) \, dx = \int 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, dx = 2 \cdot 2 \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, dx = 4 \left(-\cos \frac{x}{2} \right) + k'$$

$$f(x) = -4 \cos \frac{x}{2} + k'; \text{ como } f(0) = 1 \rightarrow f(0) = -4 \cos 0 + k' = 1 \rightarrow -4 + k' = 1 \rightarrow k' = 5$$

Por tanto, la función que buscamos es $f(x) = -4 \cos \frac{x}{2} + 5$

47 a) Halla la familia de curvas en las que la pendiente de las rectas tangentes a dichas curvas en cualquiera de sus puntos viene dada por la función:

$$f'(x) = \frac{x-2}{2x+4}$$

b) Determina cuál es la curva de esta familia que pasa por el punto $A \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{4} \right)$.

a) La pendiente de la recta tangente a la curva en uno de sus puntos viene dada por la derivada de la curva en ese punto.

$$\text{Por tanto, } m = F'(x) = \frac{x-2}{2x+4}.$$

$$\text{Buscamos } F(x) = \int \frac{x-2}{2x+4} \, dx.$$

$$F(x) = \int \frac{x-2}{2x+4} \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2x+4} \right) dx = \frac{1}{2} x - 2 \int \frac{2}{2x+4} \, dx = \frac{x}{2} - 2 \ln |2x+4| + k$$

b) Debe ser:

$$F \left(-\frac{5}{2} \right) = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{-5/2}{2} - 2 \ln \left| 2 \left(-\frac{5}{2} \right) + 4 \right| + k = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{-5}{4} - 2 \ln 1 + k = \frac{3}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow k = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2 \rightarrow F(x) = \frac{x}{2} - 2 \ln |2x+4| + 2$$

Página 353

- 48** Calcula la función $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = x$, que la gráfica de f pasa por el punto $P(1, 1)$ y que la tangente en P es paralela a la recta de ecuación:

$$3x + 3y - 1 = 0$$

$$f'(x) = \int f''(x) dx \rightarrow f'(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + k$$

$$f(x) = \int f'(x) dx \rightarrow \int \left(\frac{x^2}{2} + k \right) dx = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + kx + k'$$

$$f \text{ pasa por } P(1, 1) \rightarrow f(1) = 1 \rightarrow \frac{1}{6} + k + k' = 1 \quad (1)$$

La pendiente de la recta tangente en P es $m = -1$; por ello:

$$f'(1) = -1 \rightarrow \frac{1}{2} + k = -1 \quad (2)$$

De las igualdades (1) y (2) obtenemos los valores de k y k' :

$$k = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}; \quad k' = 1 - \frac{1}{6} - k = 1 - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{7}{3}$$

Por tanto, la función que buscamos es: $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}$

- 49** Halla la función $F(x)$ tal que $F(0) = 2$ y que sea primitiva de la función siguiente:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$F(x) = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) + k$$

$$F(0) = 2 \rightarrow \ln 2 + k = 2 \rightarrow k = 2 - \ln 2$$

Por tanto:

$$F(x) = \ln(e^x + 1) + 2 - \ln 2$$

- 50** Halla la ecuación de una curva $y = f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $P(1, 1)$ y que la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera es $3x + 1$.

Como la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera es $3x + 1$, se cumple que:

$$f'(x) = 3x + 1$$

$$f(x) = \int (3x + 1) dx = \frac{3x^2}{2} + x + k$$

Por otra parte:

$$f(1) = 1 \rightarrow \frac{3}{2} + 1 + k = 1 \rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

Por tanto:

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$$

- 51** Dadas las funciones:

$$f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5 \quad g(x) = 6x^2 - 7x + 2$$

halla la función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ que cumple la igualdad $H(1) = 1$.

$$H(x) = \int \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} dx = \int \left(2x + 1 + \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2} \right) dx = \int (2x + 1) dx + \int \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2} dx =$$

$$= x^2 + x + \ln |6x^2 - 7x + 2| + k$$

$$H(1) = 1 \rightarrow 2 + k = 1 \rightarrow k = -1$$

Por tanto:

$$H(x) = x^2 + x + \ln |6x^2 - 7x + 2| - 1$$

52 Calcula $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} dx$.

* Utiliza la igualdad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + k \end{aligned}$$

53 Resuelve:

a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-9x^6}} dx$

b) $\int \sqrt{81-25x^2} dx$

* a) Haz $t = 3x^3$. b) Haz $x = \frac{9}{5} \operatorname{sen} t$.

a) Hacemos $t = 3x^3 \rightarrow dt = 9x^2 dx \rightarrow \frac{1}{9} dt = x^2 dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-9x^6}} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{9} \operatorname{arc} \operatorname{sen} t + k = \frac{1}{9} \operatorname{arc} \operatorname{sen} 3x^3 + k$$

b) Hacemos $x = \frac{9}{5} \operatorname{sen} t \rightarrow dx = \frac{9}{5} \cos t dt \quad \left(t = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{5x}{9} \right)$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{81-25x^2} dx &= \int \sqrt{81-25\left(\frac{9}{5} \operatorname{sen} t\right)^2} \frac{9}{5} \cos t dt = \int \sqrt{81-81 \operatorname{sen}^2 t} \frac{9}{5} \cos t dt = \\ &= \frac{81}{5} \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \cos t dt = \frac{81}{5} \int \cos^2 t dt = \frac{81}{5} \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{81}{10} t + \frac{81}{20} \operatorname{sen} 2t + k = \frac{81}{10} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{5x}{9} + \frac{81}{20} \operatorname{sen} \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{5x}{9} \right) + k \end{aligned}$$

54 Calcula:

a) $\int |1-x| dx$

b) $\int (3+|x|) dx$

c) $\int |2x-1| dx$

d) $\int \left| \frac{2x}{3} - 4 \right| dx$

e) $\int |x-2| x dx$

f) $\int e^{|x|} dx$

a) $\int |1-x| dx$

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1 \\ -1+x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \int |1-x| dx = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ -x + \frac{x^2}{2} + c & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En $x = 1$, la función ha de ser continua.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \frac{1}{2} + k \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -\frac{1}{2} + c \end{aligned} \right\} \frac{1}{2} + k = -\frac{1}{2} + c \rightarrow c = 1 + k$$

Por tanto:

$$\int |1-x| dx = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ -x + \frac{x^2}{2} + 1 + k & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) $\int (3 + |x|) dx$

$$3 + |x| = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ 3 + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \int (3 + |x|) dx = \begin{cases} 3x - \frac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 0 \\ 3x + \frac{x^2}{2} + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En $x = 0$, la función ha de ser continua.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= k \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= c \end{aligned} \right\} c = k$$

Por tanto:

$$\int (3 + |x|) dx = \begin{cases} 3x - \frac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 0 \\ 3x + \frac{x^2}{2} + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

c) $\int |2x - 1| dx$

$$|2x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

$$f(x) = \int |2x - 1| dx = \begin{cases} -x^2 + x + k & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ x^2 - x + c & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$f(x)$ ha de ser continua en $x = \frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (1/2)^-} f(x) &= \frac{1}{4} + k \\ \lim_{x \rightarrow (1/2)^+} f(x) &= -\frac{1}{4} + c \end{aligned} \right\} \frac{1}{4} + k = -\frac{1}{4} + c \rightarrow c = \frac{1}{2} + k$$

Por tanto:

$$\int |2x - 1| dx = \begin{cases} -x^2 + x + k & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ x^2 - x + \frac{1}{2} + k & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

d) $\int \left| \frac{2x}{3} - 4 \right| dx$

Expresamos $f(x)$ por intervalos.

$$\frac{2x}{3} - 4 = 0 \rightarrow x = 6$$

$$\left| \frac{2x}{3} - 4 \right| dx = \begin{cases} -\frac{2x}{3} + 4 & \text{si } x < 6 \\ \frac{2x}{3} - 4 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

Hallamos las primitivas por tramos:

$$\int \left(-\frac{2x}{3} + 4 \right) dx = -\frac{x^2}{3} + 4x + k_1$$

$$\int \left(\frac{2x}{3} - 4 \right) dx = \frac{x^2}{3} - 4x + k_2$$

$$F(x) = \int \left| \frac{2x}{3} - 4 \right| dx = \begin{cases} -\frac{x^2}{3} + 4x + k_1 & \text{si } x < 6 \\ \frac{x^2}{3} - 4x + k_2 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 6$.

$$F(6) = \frac{6^2}{3} - 4 \cdot 6 + k_2 = -12 + k_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} F(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 6^-} \left(-\frac{x^2}{3} + 4x + k_1 \right) = 12 + k_1 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} \left(\frac{x^2}{3} - 4x + k_2 \right) = -12 + k_2 \end{cases} \rightarrow 12 + k_1 = -12 + k_2 \rightarrow k_2 = 24 + k_1$$

Por tanto:

$$\int \left| \frac{2x}{3} - 4 \right| dx = \begin{cases} -\frac{x^2}{3} + 4x + k & \text{si } x < 6 \\ \frac{x^2}{3} - 4x + 24 + k & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

e) $\int |x - 2| x dx$

$$|x - 2| x = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Hallamos las primitivas por tramos:

$$\int (-x^2 + 2x) dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + k_1$$

$$\int (x^2 - 2x) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + k_2$$

$$F(x) = \int |x - 2| x dx = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + x^2 + k_1 & \text{si } x < 2 \\ \frac{x^3}{3} - x^2 + k_2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 2$.

$$F(2) = \frac{2^3}{3} - 4 + k_2 = -\frac{4}{3} + k_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} F(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + k_1 \right) = \frac{4}{3} + k_1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + k_2 \right) = -\frac{4}{3} + k_2 \end{cases} \rightarrow \frac{4}{3} + k_1 = -\frac{4}{3} + k_2 \rightarrow k_2 = \frac{8}{3} + k_1$$

Por tanto:

$$\int |x - 2| x dx = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + x^2 + k & \text{si } x < 2 \\ \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{8}{3} + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

f) $\int e^{|x|} dx$

$$e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int e^{|x|} dx = \begin{cases} -e^{-x} + k_1 & \text{si } x < 0 \\ e^x + k_2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 0$.

$$F(0) = 1 + k_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (-e^{-x} + k_1) = -1 + k_1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + k_2) = 1 + k_2 \end{cases} \rightarrow -1 + k_1 = 1 + k_2 \rightarrow k_2 = -2 + k_1$$

Por tanto:

$$\int e^{|x|} dx = \begin{cases} -e^{-x} + k & \text{si } x < 0 \\ e^x - 2 + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

55 Determina una función $f(x)$ que verifique la ecuación siguiente:

$$x^3 f'(x) + x^2 + 2x = 3$$

$$x^3 \cdot f'(x) + x^2 + 2x = 3 \rightarrow x^3 \cdot f'(x) = 3 - x^2 - 2x \rightarrow f'(x) = \frac{3 - x^2 - 2x}{x^3} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \int \left(\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = 3 \int \frac{dx}{x^3} - 2 \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} = -\frac{3}{2x^2} + \frac{2}{x} - \ln|x| + k$$

56 De una función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que pasa por el punto $(-1, 0)$ y que su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

$$a) f(x) = \int f'(x) dx = \begin{cases} e^{-x} + k_1 & \text{si } x < 0 \\ -x + k_2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Como la función es derivable, debe ser continua en $x = 0$.

$$f(0) = k_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{-x} + k_1) = 1 + k_1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + k_2) = k_2 \end{cases} \rightarrow 1 + k_1 = k_2$$

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + k & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Como pasa por el punto $(-1, 0) \rightarrow f(-1) = 0 \rightarrow e + k = 0 \rightarrow k = -e$

La expresión de la función buscada es:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - e & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 - e & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) $x = 1, f(1) = -e, f'(1) = -1$

La ecuación de la recta tangente es: $y = -e - (x - 1)$.

57 Determina una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que la derivada segunda es constante e igual a 3 y que la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$, es $5x - y - 3 = 0$.

$$f''(x) = 3 \rightarrow f'(x) = \int 3 dx = 3x + k_1$$

Recta tangente en $x = 1$:

$$y = 5x - 3 \rightarrow \begin{cases} f'(1) = 5 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$f'(1) = 5 \rightarrow 3 + k_1 = 5 \rightarrow k_1 = 2$$

Luego:

$$f'(x) = 3x + 2$$

$$f(x) = \int (3x + 2) dx = \frac{3x^2}{2} + 2x + k_2$$

$$f(1) = 2 \rightarrow \frac{3}{2} + 2 + k_2 = 2 \rightarrow k_2 = -\frac{3}{2}$$

La función es:

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$$

58 Calcula una primitiva de la función $f(x) = 1/x$ que no tome ningún valor positivo en el intervalo $[1, e]$.

$$F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k$$

Queremos que $\ln|x| + k \leq 0$ cuando $x \in [1, e]$.

Como $F(x)$ es creciente en dicho intervalo por ser su primera derivada positiva, basta que:

$$\ln e + k \leq 0 \rightarrow k \leq -1$$

Por tanto, cualquier valor de k que satisfaga la condición anterior da lugar a una primitiva que resuelve el problema. Por ejemplo, $F(x) = \ln|x| - 1$.

59 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}} dx$

b) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

c) $\int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x^2}) dx$

d) $\int x^2 \sqrt{x+1} dx$

a) Para eliminar la raíz hacemos $x + 2 = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$ ($x = t^2 - 2$)

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}} dx = \int \frac{t^2+1}{t} 2t dt = \int (2t^2 + 2) dt = \frac{2t^3}{3} + 2t + k = \frac{2\sqrt{(x+2)^3}}{3} + 2\sqrt{x+2} + k$$

b) Para eliminar la raíz hacemos $x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int \frac{2t dt}{(t^2+1)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + k = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} + k$$

c) Para eliminar la raíz hacemos $x = t^6 \rightarrow dx = 6t^5 dt$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x^2}) dx &= \int \sqrt{t^6}(1 + \sqrt[3]{(t^6)^2}) 6t^5 dt = \int t^3(1 + t^4) 6t^5 dt = \\ &= 6 \int (t^8 + t^{12}) dt = \frac{2t^9}{3} + \frac{6t^{13}}{13} + k = \frac{2\sqrt{x^9}}{3} + \frac{6\sqrt[6]{x^{13}}}{13} + k = \\ &= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{6\sqrt[6]{x^{23}}}{13} + k \end{aligned}$$

d) Para eliminar la raíz hacemos $x + 1 = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$ ($x = t^2 - 1$)

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x+1} dx &= \int (t^2 - 1)^2 t \cdot 2t dt = 2 \int t^2 (t^2 - 1)^2 dt = 2 \int (t^6 - 2t^4 + t^2) dt = \\ &= \frac{2t^7}{7} - \frac{4t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + k = \frac{2\sqrt{(x+1)^7}}{7} - \frac{4\sqrt{(x+1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} + k \end{aligned}$$

- 60** a) Para resolver la siguiente integral, multiplica numerador y denominador por $\cos x$ y haz después un cambio de variable:

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

- b) Utiliza el procedimiento anterior para resolver las integrales siguientes:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} \quad \int \frac{dx}{\sen x}$$

a) $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{1 - \sen^2 x}$

Hacemos $u = \sen x \rightarrow du = \cos x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{1 - \sen^2 x} \, dx &= \int \frac{1}{1 - u^2} \, du \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 + u} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 - u} = \frac{1}{2} \ln |1 + u| - \frac{1}{2} \ln |1 - u| + k = \\ &= \frac{1}{2} \ln |1 + \sen x| - \frac{1}{2} \ln |1 - \sen x| + k \end{aligned}$$

(*) Se ha resuelto descomponiendo en fracciones simples.

b) $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{(1 - \sen^2 x)^2}$

Hacemos $u = \sen x \rightarrow du = \cos x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x \, dx}{(1 - \sen^2 x)^2} &= \int \frac{du}{(1 - u^2)^2} = \int \frac{du}{(1 + u)^2 (1 - u)^2} \stackrel{(*)}{=} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{du}{1 + u} + \frac{1}{4} \int \frac{du}{(1 + u)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{du}{1 - u} + \frac{1}{4} \int \frac{du}{(1 - u)^2} = \\ &= \frac{1}{4} \ln |1 + u| - \frac{1}{4(1 + u)} - \frac{1}{4} \ln |1 - u| + \frac{1}{4(1 - u)} + k = \\ &= \frac{1}{4} \ln |1 + \sen x| - \frac{1}{4(1 + \sen x)} - \frac{1}{4} \ln |1 - \sen x| + \frac{1}{4(1 - \sen x)} + k \end{aligned}$$

(*) Se ha resuelto descomponiendo en fracciones simples.

$$I = \int \frac{dx}{\sen x} = \int \frac{\sen x \, dx}{\sen^2 x} = \int \frac{\sen x \, dx}{1 - \cos^2 x}$$

Hacemos $u = \cos x \rightarrow du = -\sen x \, dx \rightarrow -du = \sen x \, dx$

$$I = \int \frac{\sen x \, dx}{1 - \cos^2 x} = - \int \frac{du}{1 - u^2} \stackrel{(*)}{=} - \frac{1}{2} \ln |1 + u| + \frac{1}{2} \ln |1 - u| + k = - \frac{1}{2} \ln (1 + \cos x) + \frac{1}{2} \ln (1 - \cos x) + k$$

(*) Esta integral está resuelta en el primer apartado.

- 61** Sean a y b dos números reales cualesquiera. Calcula la siguiente integral indefinida. Ten en cuenta los casos $a = 0$ o $b = 0$.

$$\int \frac{\cos x}{(a + b \sen x)^2} \, dx$$

Si $a = 0$ y $b = 0$ el problema no tiene sentido. Por tanto, al menos uno de ellos debe ser no nulo.

Si $b = 0 \rightarrow a \neq 0$:

$$\int \frac{\cos x}{a^2} \, dx = \frac{\sen x}{a^2} + k$$

Si $b \neq 0$:

$$\int \frac{\cos x}{(a + b \sen x)^2} \, dx = \frac{1}{b} \int \frac{b \cos x}{(a + b \sen x)^2} \, dx = - \frac{1}{b} \frac{1}{a + b \sen x} + k = - \frac{1}{b(a + b \sen x)} + k$$

ya que $D[a + b \sen x] = b \cos x$.

62 Dada $f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$, halla:

a) Su integral indefinida.

b) La primitiva que pase por el punto $(\frac{\pi}{3}, 1)$.

$$a) \int (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x) dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x dx = \int \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x dx = - \int \cos^2 x (-\operatorname{sen} x) dx = - \frac{\cos^3 x}{3} + k$$

b) Sea $F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + k$ la primitiva buscada.

$$\text{Pasa por: } \left(\frac{\pi}{3}, 1\right) \rightarrow F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \rightarrow -\frac{\cos^3 \frac{\pi}{3}}{3} + k = 1 \rightarrow k = \frac{25}{24}$$

$$\text{Luego: } F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{25}{24}$$

63 Calcula $f(x)$ sabiendo que su derivada $f'(x) = 3 - 2\operatorname{sen} x$ corta a la bisectriz del primer cuadrante en el punto $x = \pi$.

$$f(x) = \int (3 - 2\operatorname{sen} x) dx = 3x + 2\cos x + k$$

Corta a la bisectriz del primer cuadrante en el punto $x = \pi \rightarrow$ pasa por (π, π) .

$$f(\pi) = \pi \rightarrow 3\pi + 2\cos \pi + k = \pi \rightarrow k = 2 - 2\pi$$

La función es: $f(x) = 3x + 2\cos x + 2 - 2\pi$

64 Calcula la siguiente primitiva, en la que suponemos que $a \neq 1$:

$$\int \frac{dx}{x^2 - (a+1)x + a}$$

El polinomio $P(x) = x^2 - (a+1)x + a$ tiene raíces $x = 1$ y $x = a$, ya que $P(1) = P(a) = 0$. Vamos a distinguir dos casos:

• $a \neq 1 \rightarrow$ Las raíces reales son distintas:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - (a+1)x + a} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-a)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)(x-a)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-a} \rightarrow 1 = A(x-a) + B(x-1)$$

$$x = 1 \rightarrow 1 = A(1-a) \rightarrow A = \frac{1}{1-a}$$

$$x = a \rightarrow 1 = B(a-1) \rightarrow B = \frac{1}{a-1}$$

$$I = \frac{1}{1-a} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{a-1} \int \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{1-a} \ln|x-1| + \frac{1}{a-1} \ln|x-a| + k$$

• $a = 1 \rightarrow$ Tiene una raíz doble:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1} = \int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + k$$

65 Determina una función $f(x)$ de la que sabemos que $f''(x) = -\operatorname{sen} x$ y que la recta $x + y - 2 - \pi = 0$ es tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = \pi$.

$$y = -x + 2 + \pi \text{ es la recta tangente en } x = \pi \rightarrow \begin{cases} f'(\pi) = -1 \\ f(\pi) = 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \int (-\operatorname{sen} x) dx = \cos x + k_1$$

$$f'(\pi) = -1 \rightarrow \cos \pi + k_1 = -1 \rightarrow k_1 = 0$$

Luego: $f'(x) = \cos x$

$$f(x) = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + k_2$$

$$f(\pi) = 2 \rightarrow \operatorname{sen} \pi + k_2 = 2 \rightarrow k_2 = 2$$

Por tanto: $f(x) = \operatorname{sen} x + 2$

66 Calcula $\int 3x|x-2| \, dx$.

$$3x|x-2| = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 2 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Hallamos las primitivas por tramos.

$$\int (-3x^2 + 6x) \, dx = -x^3 + 3x^2 + k_1 \quad \int (3x^2 - 6x) \, dx = x^3 - 3x^2 + k_2$$

$$F(x) = \int 3x|x-2| \, dx = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 + k_1 & \text{si } x < 2 \\ x^3 - 3x^2 + k_2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 2$.

$$F(2) = -4 + k_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} F(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^3 + 3x^2 + k_1) = 4 + k_1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 - 3x^2 + k_2) = -4 + k_2 \end{cases} \rightarrow 4 + k_1 = -4 + k_2 \rightarrow k_2 = 8 + k_1$$

Por tanto:

$$\int 3x|x-2| \, dx = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 + k & \text{si } x < 2 \\ x^3 - 3x^2 + 8 + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

67 De una función continua $f(x)$ sabemos que tiene un mínimo en $(-1, -2)$ y que su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Halla la expresión analítica de $f(x)$.

b) Escribe la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

a) Integrando por tramos obtenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + k_1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x + k_2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como la función es continua en \mathbb{R} , lo es en $x = 1$.

$$f(1) = 3 + k_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2x + k_1) = 3 + k_1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x + k_2) = 4 + k_2 \end{cases} \rightarrow 3 + k_1 = 4 + k_2 \rightarrow k_2 = -1 + k_1$$

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + k & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 1 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como tiene un mínimo en $(-1, -2)$, pasa por ese punto.

$$f(-1) = -2 \rightarrow -1 + k = -2 \rightarrow k = -1$$

La expresión final de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) $x = 1, f(1) = 2, f'(1) = 4 \rightarrow$ La recta tangente es: $y = 2 + 4(x - 1)$

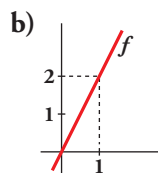
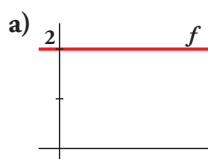
Cuestiones teóricas

68 Prueba que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C un número real cualquiera, la función $F(x) + C$ es también una primitiva de $f(x)$.

$$F(x) \text{ primitiva de } f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) + C \text{ es primitiva de } f(x).$$

69 Representa tres primitivas de las siguientes funciones f :



a) $f(x) = 2 \rightarrow F(x) = 2x + k$

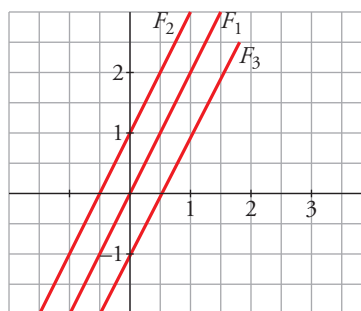
Por ejemplo:

$$F_1(x) = 2x$$

$$F_2(x) = 2x + 1$$

$$F_3(x) = 2x - 1$$

cuyas gráficas son:



b) $f(x) = 2x \rightarrow F(x) = x^2 + k$

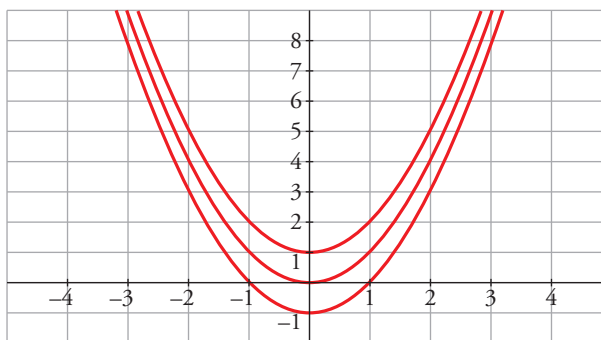
Por ejemplo:

$$F_1(x) = x^2$$

$$F_2(x) = x^2 + 1$$

$$F_3(x) = x^2 - 1$$

cuyas gráficas son:



70 En una integral hacemos el cambio $t = \operatorname{tg} x$. ¿Cuál es la expresión de dx en función de t ?

$$t = \operatorname{tg} x \rightarrow dt = (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx \rightarrow dt = (1 + t^2) dx \rightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

71 Comprueba que $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + k$.

Tenemos que probar que la derivada de $f(x) = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + k$ es $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Derivamos $f(x) = \ln \left| \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right| + k$:

$$f'(x) = \frac{\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}}{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{(1 + \operatorname{sen} x) \cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

72 Calcula $f(x)$ sabiendo que $\int f(x) dx = \ln |tg x| + k$.

Debemos suponer que $x \neq k \frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$ para que tenga sentido la función y se pueda evaluar la tangente.

- Si $tg x > 0 \rightarrow f'(x) = D[\ln(tg x) + k] = \frac{1 + tg^2 x}{tg x}$
- Si $tg x < 0 \rightarrow f'(x) = D[\ln(-tg x) + k] = \frac{-1 - tg^2 x}{-tg x} = \frac{1 + tg^2 x}{tg x}$

73 Las integrales $\int \frac{(\text{arc } tg x)^2}{1+x^2} dx$ y $\int (tg^3 x + tg^5 x) dx$, ¿son del tipo $\int f(x)^n f'(x) dx$? En caso afirmativo, identifica, en cada una de ellas, $f(x)$, n y $f'(x)$.

Ambas son del tipo $\int f(x)^n f'(x) dx$.

- $\int \frac{(\text{arc } tg x)^2}{1+x^2} dx = \int (\text{arc } tg x)^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$
 $f(x) = \text{arc } tg x$; $n = 2$; $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\int (tg^3 x + tg^5 x) dx = \int tg^3 x(1 + tg^2 x) dx$
 $f(x) = tg x$; $n = 3$; $f'(x) = 1 + tg^2 x$

74 Sin utilizar el cálculo de derivadas, prueba que:

$$F(x) = \frac{1}{1+x^4} \text{ y } G(x) = \frac{-x^4}{1+x^4}$$

son dos primitivas de una misma función.

Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de una misma función, su diferencia es una constante. Veámoslo:

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{1+x^4} - \left(\frac{-x^4}{1+x^4} \right) = \frac{1+x^4}{1+x^4} = 1$$

Por tanto, hemos obtenido que: $F(x) = G(x) + 1$

Luego las dos son primitivas de una misma función.

75 Calcula $f(x)$ sabiendo que $\int f(x) dx = \ln \frac{|x-1|^3}{(x+2)^2} + k$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \ln \frac{|x-1|^3}{(x+2)^2} + c$$

Sabemos que $F'(x) = f(x)$.

Por tanto, calculamos la derivada de $F(x)$.

Aplicamos las propiedades de los logaritmos antes de derivar:

$$F(x) = 3 \ln |x-1| - 2 \ln (x+2) + c$$

$$F'(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2} = \frac{3(x+2) - 2(x-1)}{x^2 + x - 2} = \frac{x+8}{x^2 + x - 2}$$

$$\text{Por tanto, } f(x) = \frac{x+8}{x^2 + x - 2}.$$

76 Sean f y g dos funciones continuas y derivables que se diferencian en una constante. ¿Podemos asegurar que f y g tienen una misma primitiva?

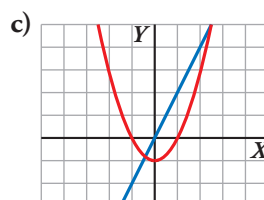
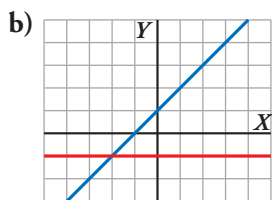
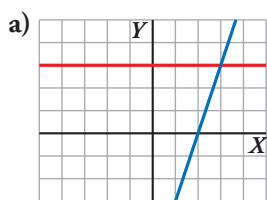
No. Por ejemplo:

$$\left. \begin{aligned} f(x) = 2x + 1 &\rightarrow F(x) = x^2 + x + k \\ g(x) = 2x + 2 &\rightarrow G(x) = x^2 + 2x + c \end{aligned} \right\}$$

$f(x)$ y $g(x)$ son continuas, derivables y se diferencian en una constante (pues $f(x) = g(x) - 1$).

Sin embargo, sus primitivas, $F(x)$ y $G(x)$, respectivamente, son distintas, cualesquiera que sean los valores de k y c .

77 ¿Cuáles de los siguientes apartados representan la gráfica de una función $f(x)$ y la de una de sus primitivas $F(x)$?



a) Las funciones representadas son:

$$y = 3 \text{ e } y = 3x - 6, \text{ que cumplen: } \int 3 \, dx = 3x + k$$

Por tanto, $f(x) = 3$, y $F(x) = 3x - 6$ es una primitiva de f .

b) Las funciones son:

$$y = -1 \text{ e } y = x + 1 \rightarrow \int -1 \, dx = -x + k$$

No corresponden a una función y su primitiva.

c) Las funciones son:

$$y = x^2 - 1 \text{ e } y = 2x \rightarrow \int 2x \, dx = x^2 + k$$

Por tanto, $f(x) = 2x$, y una de sus primitivas es $F(x) = x^2 - 1$.

d) Las funciones son:

$$y = -x^2 - 1 + 4 \text{ e } y = -2x + 1 \rightarrow \int -2x + 1 \, dx = -x^2 + x + k$$

No corresponden a una función y su primitiva.

78 Si $\int f(x) \, dx = F(x)$ y $\int g(x) \, dx = G(x)$, halla en función de $F(x)$ y de $G(x)$:

a) $\int [f(x) - g(x)] \, dx$

b) $\int -\frac{1}{2} [5g(x) + 4f(x)] \, dx$

c) $\int f(2x - 1) \, dx$

d) $\int [5 - g(x)] \, dx$

e) $\int g\left(\frac{x-3}{2}\right) \, dx$

f) $\int [3f(5x - 1) - 6g(2 - 3x)] \, dx$

g) $\int G'(x) g'(x) \, dx$

h) $\int \frac{f'(x)}{F'(x)} \, dx$

a) $\int [f(x) - g(x)] \, dx = F(x) - G(x)$

b) $\int -\frac{1}{2} [5g(x) + 4f(x)] \, dx = -\frac{1}{2} [5G(x) + 4F(x)]$

c) $\int f(2x - 1) \, dx = \frac{1}{2} \int f(2x - 1) 2 \, dx = \frac{1}{2} F(2x - 1)$

d) $\int [5 - g(x)] \, dx = 5x - G(x)$

$$e) \int g\left(\frac{x-3}{2}\right) dx = 2 \int g\left(\frac{x-3}{2}\right) \frac{1}{2} dx = 2G\left(\frac{x-3}{2}\right)$$

$$f) \int [3f(5x-1) - 6g(2-3x)] dx = 3 \int f(5x-1) dx - 6 \int g(2-3x) dx = \\ = \frac{3}{5} \int f(5x-1) 5 dx + 2 \int g(2-3x) (-3) dx = \frac{3}{5} F(5x-1) + 2G(2-3x)$$

$$g) \int G'(x) g'(x) dx = \int g(x) g'(x) dx = \frac{[g(x)]^2}{2} + k = \frac{[G'(x)]^2}{2} + k$$

$$h) \int \frac{f'(x)}{F'(x)} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + k = \ln |F'(x)| + k$$

79 ¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.

a) Una función logarítmica puede ser una primitiva de una función racional.

$$b) \int f(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

c) Las primitivas de una función racional irreducible cuyo denominador es de primer grado son un polinomio más un logaritmo neperiano.

a) Verdadero. Por ejemplo, la función logarítmica $F(x) = \ln(x^2 + 1)$ es una primitiva de la función racional $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

b) Falso. Tomemos $f(x) = g(x) = x$.

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k$$

$$\int f(x) dx \cdot \int g(x) dx = \int x dx \cdot \int x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + k = \frac{x^4}{4} + k$$

Ambos resultados son claramente distintos.

c) Verdadero. Será de la forma $\frac{p(x)}{x}$ y podemos reescribirlo como $q(x) + \frac{k}{x}$, que tiene como integral un polinomio más un logaritmo neperiano.

80 Al aplicar el método de integración por partes para calcular $\int f(x) \cos x dx$, donde f es una función derivable, se obtiene:

$$\int f(x) \cos x dx = f(x) \operatorname{sen} x - \int \frac{1}{x} \operatorname{sen} x dx$$

Encuentra la expresión analítica de $f(x)$ si sabemos que pasa por el punto (1, 2).

Del enunciado del problema se deduce que el método de integración por partes se ha usando de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u = f(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Por tanto:

$$f(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + k$$

Por otra parte:

$$f(1) = 2 \rightarrow k = 2$$

La función es:

$$f(x) = \ln |x| + 2$$

81 Comprueba que las funciones:

$$F(x) = \operatorname{arc\,tg} x \quad \text{y} \quad G(x) = -\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

son primitivas de una misma función $f(x)$.

a) ¿Son iguales las funciones F y G ?

b) ¿Se cortan sus gráficas?

Para comprobarlo, calculamos sus derivadas.

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$G'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

a) Ambas funciones no son iguales, porque ni siquiera tienen el mismo dominio de definición.

Concretamente, $F(0) = \operatorname{arc\,tg} 0 = 0$ y $G(0)$ no existe.

b) En el dominio de definición de ambas funciones no pueden cortarse. Como no son iguales y son primitivas de una misma función, difieren en constantes no nulas en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Página 355

Para profundizar

82 Calcula las siguientes integrales trigonométricas mediante un cambio de variable:

a) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$

b) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$

c) $\int \cos^5 x \, dx$

d) $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^3 x \, dx$

a) Hacemos $u = \operatorname{sen} x \rightarrow du = \cos x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^3 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int u^2 (1-u^2) \, du = \\ &= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + k = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + k \end{aligned}$$

b) Hacemos $u = \cos x \rightarrow du = -\operatorname{sen} x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x \, dx &= -\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x (-\operatorname{sen} x) \, dx = -\int (1-u^2) u^2 \, du = \\ &= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + k = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + k \end{aligned}$$

c) Hacemos $u = \operatorname{sen} x \rightarrow du = \cos x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \, dx &= \int (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx = \int (1-u^2)^2 \, du = \int (1-2u^2+u^4) \, du = \\ &= u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + k = \operatorname{sen} x - \frac{2\operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } I &= \int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1-\cos^2 2x) \operatorname{sen} 2x \, dx \end{aligned}$$

Hacemos $u = \cos 2x \rightarrow du = -2\operatorname{sen} 2x \, dx \rightarrow -\frac{du}{2} = \operatorname{sen} 2x \, dx$

$$I = -\frac{1}{16} \int (1-u^2) \, du = -\frac{u}{16} + \frac{u^3}{48} + k = -\frac{\cos 2x}{16} + \frac{\cos^3 2x}{48} + k$$

83 Calcula:

a) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$

b) $\int \operatorname{sen}^6 x \, dx$

* Recuerda: $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ y $1 - \cos 2x = 2\operatorname{sen}^2 x$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) \, dx = \frac{1}{4} \int \operatorname{sen}^2 2x \, dx \stackrel{(*)}{=} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + k \end{aligned}$$

(*) Sustituyendo en $1 - \cos 2x = 2\operatorname{sen}^2 x$ la letra x por $2x$ se obtiene $1 - \cos 4x = 2\operatorname{sen}^2 2x$.

$$\begin{aligned} \text{b) } I &= \int \operatorname{sen}^6 x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^3 \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)^3 \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{3}{8} \int \cos 2x \, dx + \frac{3}{8} \int \cos^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx \end{aligned}$$

Calculamos cada integral por separado:

$$\int \cos 2x \, dx = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + k$$

$$\int \cos^2 2x \, dx \stackrel{(*)}{=} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + k$$

(*) Sustituyendo en $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ la letra x por $2x$ se obtiene $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$.

$$I_1 = \int \cos^3 2x \, dx = \int \cos^2 2x \cdot \cos 2x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x \, dx$$

Hacemos $u = \operatorname{sen} 2x \rightarrow du = 2\cos 2x \, dx \rightarrow \frac{du}{2} = \cos 2x \, dx$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int (1 - u^2) \, du = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{6} + k = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6} + k$$

Ya podemos obtener el resultado final:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8}x - \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{64} \operatorname{sen} 4x - \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + k = \\ &= \frac{5}{16}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{64} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + k \end{aligned}$$

84 Para resolver integrales del tipo $\int \sqrt{a^2 - b^2 x^2} \, dx$ se utiliza el cambio de variable $x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} t$.

Calcula las integrales siguientes:

a) $\int \sqrt{100 - 25x^2} \, dx$

b) $\int \sqrt{25 - 64x^2} \, dx$

c) $\int \sqrt{2 - x^2} \, dx$

d) $\int \sqrt{\frac{9}{16} - 25x^2} \, dx$

a) Hacemos $x = 2\operatorname{sen} t \rightarrow dx = 2\cos t \, dt$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{100 - 25x^2} \, dx &= \int \sqrt{100 - 25(2\operatorname{sen} t)^2} 2\cos t \, dt = \int \sqrt{100 - 100\operatorname{sen}^2 t} 2\cos t \, dt = \\ &= 20 \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \, dt = 20 \int \cos^2 t \, dt = 20 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = 10t + 5\operatorname{sen} 2t + k = \\ &= 10 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 5\operatorname{sen} \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right) + k \end{aligned}$$

b) Hacemos $x = \frac{5}{8} \operatorname{sen} t \rightarrow dx = \frac{5}{8} \cos t dt$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{25 - 64x^2} dx &= \int \sqrt{25 - 64 \left(\frac{5}{8} \operatorname{sen} t\right)^2} \frac{5}{8} \cos t dt = \int \sqrt{25 - 25 \operatorname{sen}^2 t} \frac{5}{8} \cos t dt = \\ &= \frac{25}{8} \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t dt = \frac{25}{8} \int \cos^2 t dt = \frac{25}{8} \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{25}{16} t + \frac{25}{32} \operatorname{sen} 2t + k = \frac{25}{16} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{8x}{5} + \frac{25}{32} \operatorname{sen} \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{8x}{5} \right) + k \end{aligned}$$

c) Hacemos $x = \sqrt{2} \operatorname{sen} t \rightarrow dx = \sqrt{2} \cos t dt$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2 - x^2} dx &= \int \sqrt{2 - (\sqrt{2} \operatorname{sen} t)^2} \sqrt{2} \cos t dt = \int \sqrt{2 - 2 \operatorname{sen}^2 t} \sqrt{2} \cos t dt = \\ &= 2 \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t dt = 2 \int \cos^2 t dt = 2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t + k = \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + k \end{aligned}$$

d) Hacemos $x = \frac{3}{20} \operatorname{sen} t \rightarrow dx = \frac{3}{20} \cos t dt$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{9}{16} - 25x^2} dx &= \int \sqrt{\frac{19}{16} - 25 \left(\frac{3}{20} \operatorname{sen} t\right)^2} \frac{3}{20} \cos t dt = \int \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{9}{16} \operatorname{sen}^2 t} \frac{3}{20} \cos t dt = \\ &= \frac{9}{80} \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t dt = \frac{9}{80} \int \cos^2 t dt = \frac{9}{80} \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{9}{160} t + \frac{9}{320} \operatorname{sen} 2t + k = \\ &= \frac{9}{160} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{20x}{3} + \frac{9}{320} \operatorname{sen} \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{20x}{3} \right) + k \end{aligned}$$

85 Una ecuación diferencial de primer orden es una ecuación en la que, además de x e y , figura también y' . Resolverla es buscar una función $y = f(x)$ que la verifique:

Por ejemplo, resolvamos $xy^2 + y' = 0$:

$$y' = -xy^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -xy^2 \rightarrow dy = -xy^2 dx$$

Separamos las variables:

$$\frac{dy}{y^2} = -x dx \rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int (-x) dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{2} + k \rightarrow y = \frac{2}{x^2 - 2k}$$

Hay infinitas soluciones. Busca la que pasa por el punto (0, 2) y comprueba que la curva que obtienes verifica la ecuación propuesta.

- Buscamos la solución que pasa por el punto (0, 2):

$$y = \frac{2}{x^2 - 2k} \rightarrow 2 = \frac{2}{-2k} \rightarrow -4k = 2 \rightarrow k = \frac{-1}{2}$$

Por tanto, $y = \frac{2}{x^2 + 1}$

- Comprobamos que verifica la ecuación $xy^2 + y' = 0$:

$$xy^2 + y' = x \left(\frac{2}{x^2 + 1} \right)^2 - \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = x \cdot \frac{4}{(x^2 + 1)^2} - \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} - \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

86 Resuelve estas ecuaciones diferenciales de primer orden:

a) $yy' - x = 0$

b) $y^2 y' - x^2 = 1$

c) $y' - xy = 0$

d) $y' \sqrt{x} - y = 0$

e) $y' e^y + 1 = e^x$

f) $x^2 y' + y^2 + 1 = 0$

* En todas ellas, al despejar y' se obtiene en el segundo miembro el producto o el cociente de dos funciones, cada una de ellas con una sola variable.

a) $yy' - x = 0$

$$y' = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \rightarrow y dy = x dx \rightarrow \int y dy = \int x dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + k \rightarrow y^2 = x^2 + 2k \rightarrow y = \pm \sqrt{x^2 + 2k}$$

b) $y^2 y' - x^2 = 1$

$$y' = \frac{1+x^2}{y^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{y^2} \rightarrow y^2 dy = (1+x^2) dx$$

$$\int y^2 dy = \int (1+x^2) dx \rightarrow \frac{y^3}{3} = x + \frac{x^3}{3} + k \rightarrow y^3 = 3x + x^3 + 3k \rightarrow y = \sqrt[3]{3x + x^3 + 3k}$$

c) $y' - xy = 0$

$$y' = xy \rightarrow \frac{dy}{dx} = xy \rightarrow \frac{dy}{y} = x dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x dx$$

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + k \rightarrow |y| = e^{(x^2/2)+k} \rightarrow y = \pm e^{(x^2/2)+k}$$

d) $y' \sqrt{x} - y = 0$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\ln |y| = 2\sqrt{x} + k \rightarrow |y| = e^{2\sqrt{x}+k} \rightarrow y = \pm e^{2\sqrt{x}+k}$$

e) $y' e^y + 1 = e^x$

$$y' = \frac{e^x - 1}{e^y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - 1}{e^y}$$

$$e^y dy = (e^x - 1) dx \rightarrow \int e^y dy = \int (e^x - 1) dx$$

$$e^y = e^x - x + k \rightarrow y = \ln |e^x - x + k|$$

f) $x^2 y' + y^2 + 1 = 0$

$$y' = \frac{-1-y^2}{x^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(1+y^2)}{x^2} \rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = \frac{-1}{x^2} dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{-1}{x^2} dx \rightarrow \text{arc tg} = \frac{1}{x} + k$$

$$y = \text{tg} \left(\frac{1}{x} + k \right)$$

Autoevaluación

Página 355

Resuelve las integrales siguientes:

1 $\int (\cos x + \operatorname{tg} x) dx$

$$\int (\cos x + \operatorname{tg} x) dx = \int \cos x dx + \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \operatorname{sen} x - \ln |\cos x| + k$$

2 $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x}} \right) dx$

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x}} \right) dx = 2 \ln |x| + \frac{x^{3/2}}{3/2} = 2 \ln |x| + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + k$$

3 $\int x^3 \sqrt{2x^2 + 1} dx$

$$\int x^3 \sqrt{2x^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \int 4x(2x^2 + 1)^{1/2} dx = \frac{1}{4} (2x^2 + 1)^{4/3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \sqrt[3]{(2x^2 + 1)^4} + k$$

4 $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx$

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + k$$

5 $\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x dx$

$$\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x dx = \frac{2^{\operatorname{sen} x}}{\ln 2} + k, \text{ ya que } D[\operatorname{sen} x] = \cos x.$$

6 $\int \frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x) dx$

$$\int \frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x) dx = -\cos(\ln x) + k$$

7 $\int \frac{x}{x^2 + 4x - 21} dx$

$$I = \int \frac{x}{x^2 + 4x - 21} dx$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$x^2 + 4x - 21 = 0 \begin{cases} x = -7 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\frac{x}{(x-3)(x+7)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+7} \rightarrow x = A(x+7) + B(x-3) \rightarrow A = \frac{3}{10}, B = \frac{7}{10}$$

$$I = \int \frac{3/10}{x-3} dx + \int \frac{7/10}{x+7} dx = \frac{3}{10} \ln |x-3| + \frac{7}{10} \ln |x+7| + k$$

8 $\int \frac{-1}{3x^2 + 27} dx$

$$\int \frac{-1}{3x^2 + 27} dx = -\frac{1}{27} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} dx = -\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{3} + k = -\frac{1}{9} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{3} + k$$

9 Resuelve, por el método de sustitución, la integral:

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$I = \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$$

Hacemos el cambio $\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$

$$I = \int \frac{1+t^2}{1+t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t+t^3}{1+t} dx \stackrel{(1)}{=} 2 \int \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1} \right) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2 \ln |t+1| \right)$$

(1) Dividimos $(t^3 + t) : (t + 2)$ y expresamos de la forma:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \text{resto}$$

Deshaciendo el cambio:

$$I = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4 \ln(\sqrt{x} + 1) + k$$

10 Aplica la integración por partes para calcular:

$$\int \cos(\ln x) dx$$

$$I = \int \cos(\ln x) dx$$

$$\begin{cases} \cos(\ln x) = 0 \rightarrow -\frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x) dx = du \\ dx = dv \rightarrow x = v \end{cases}$$

$$I = x \cos(\ln x) + \underbrace{\int \operatorname{sen}(\ln x) dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\ln x) = u \rightarrow \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx = du \\ dx = dv \rightarrow x = v \end{cases}$$

$$I_1 = x \operatorname{sen}(\ln x) - \underbrace{\int \cos(\ln x) dx}_I$$

$$I = x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - I \rightarrow I = \frac{x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \operatorname{sen}(\ln x)}{2} + k$$

11 De la función $f(x)$, se sabe que:

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}, \quad f(2) = 0$$

a) Determina f .

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por $(0, 1)$.

$$a) f(x) = \int \frac{3}{(x+1)^2} dx = 3 \int (x+1)^{-2} dx = \frac{3(x+1)^{-1}}{-1} + k = \frac{-3}{x+1} + k$$

$$f(2) = \frac{-3}{2+1} + k = -1 + k \rightarrow \text{Como } f(2) = 0, \quad -1 + k = 0 \rightarrow k = 1$$

$$f(x) = \frac{-3}{x+1} + 1 = \frac{x-2}{x+1}$$

$$b) g(x) = \int \frac{x-2}{x+1} dx = \int \left(1 + \frac{-3}{x+1} \right) dx = x - 3 \ln |x+1| + k$$

$$g(0) = 0 - 3 \ln |0+1| + k = k \rightarrow \text{Como } g(0) = 1, \quad k = 1.$$

La primitiva de f que pasa por $(0, 1)$ es $g(x) = x - 3 \ln |x+1| + 1$.

12 Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{\text{sen } 2x}{1 + \cos^2 2x} dx$

b) $\int \frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 6} dx$

a) Hacemos el cambio $u = \cos 2x \rightarrow du = -2\text{sen } 2x dx \rightarrow -\frac{du}{2} = \text{sen } 2x dx$

$$\int \frac{\text{sen } 2x}{1 + \cos^2 2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{1 + u^2} = -\frac{1}{2} \text{arc tg } u + k = -\frac{1}{2} \text{arc tg } \cos 2x + k$$

b) Como el denominador no tiene raíces reales:

$$I = \int \frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 6} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x - 4) + \frac{3}{2} \cdot 4 + 2}{x^2 - 4x + 6} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 6} dx + 8 \int \frac{1}{x^2 - 4x + 6} dx$$

Calculamos la segunda integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 4x + 6} dx &= \int \frac{1}{x^2 - 4x + 4 + 2} dx = \int \frac{1}{(x - 2)^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x - 2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{arc tg } \frac{x - 2}{\sqrt{2}} + k = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{arc tg } \frac{x - 2}{\sqrt{2}} + k \end{aligned}$$

El resultado final es:

$$I = \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 6) + 4\sqrt{2} \text{arc tg } \frac{x - 2}{\sqrt{2}} + k$$

13 De una función derivable $f(x)$ se sabe que $f(3) = 26$ y que su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x + 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Halla la expresión de $f(x)$.

Integramos por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + k_1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 7x + k_2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Como es derivable, tiene que ser continua y, en particular, lo será en $x = 2$.

$$f(2) = 14 + k_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 + 3x + k_1) = 14 + k_1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 7x + k_2) = 18 + k_2 \end{cases} \rightarrow 14 + k_1 = 18 + k_2 \rightarrow k_2 = -4 + k_1$$

Luego:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + k & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 7x - 4 + k & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Por otra parte:

$$f(3) = 26 \rightarrow 26 + k = 26 \rightarrow k = 0$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 7x - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

14 Calcula $\int |x + 2| dx$.

$$|x + 2| = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

$$F(x) = \int |x - 2| dx = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} - 2x + k_1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x^2}{2} + 2x + k_2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Como es derivable, tiene que ser continua y, en particular, lo será en $x = -2$.

$$F(-2) = -2 + k_2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} F(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(-\frac{x^2}{2} - 2x + k_1 \right) = 2 + k_1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + k_2 \right) = -2 + k_2 \end{cases} \rightarrow 2 + k_1 = -2 + k_2 \rightarrow k_2 = 4 + k_1$$

Por tanto:

$$\int |x - 2| dx = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} - 2x + k & \text{si } x < -2 \\ \frac{x^2}{2} + 2x + 4 + k & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

15 Halla la curva en la que la pendiente de las rectas tangentes en cualquier punto viene dada por la función:

$$f(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}$$

Se sabe también que la curva pasa por el punto $P(\pi, 0)$.

Llamemos $F(x)$ a la curva en cuestión.

Entonces:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{1 + \cos^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{2 \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{2} dx = \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{x}{2} + k \end{aligned}$$

Como pasa por P se cumple que: $F(\pi) = 0 \rightarrow \frac{\operatorname{tg} \pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k = 0 \rightarrow k = -\frac{\pi}{2}$

La función es: $F(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}$

16 Determina una función $f(x)$ de la que sabemos:

- $f''(x) = 2$
- r es la tangente a f en el punto T .

La recta tangente en el punto $T(3, 2)$ tiene pendiente $m = 2 \rightarrow \begin{cases} f(3) = 2 \\ f'(3) = 2 \end{cases}$

$$f'(x) = \int 2 dx = 2x + k_1$$

$$f'(3) = 2 \rightarrow 6 + k_1 = 2 \rightarrow k_1 = -4$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f(x) = \int (2x - 4) dx = x^2 - 4x + k_2$$

$$f(3) = 2 \rightarrow -3 + k_2 = 2 \rightarrow k_2 = 5$$

La función es: $f(x) = x^2 - 4x + 5$

