

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1) A condición de equilibrio para o prezo, en unidades monetarias, de tres produtos P_1 , P_2 e P_3 , relacionados entre si, dá lugar ao seguinte sistema de ecuacións lineais: $x + y + z = 6$; $x + y - z = 0$; $2x - y + z = 3$, sendo x , y e z os prezos dos produtos P_1 , P_2 e P_3 , respectivamente.

(a) Expresa o sistema en forma matricial $AX = B$. Calcula a matriz inversa de A , sendo A a matriz cadrada de orde 3 dos coeficientes.

(b) Calcula os prezos de equilibrio para eses tres produtos x , y , z .

2) Os beneficios (en centos de miles de euros anuais) estimados por unha pequena empresa durante un período de catro anos, axustáronse á función $B(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $0 \leq x \leq 4$, onde $B(x)$ representa os beneficios da empresa aos x anos transcorridos dende a súa constitución ($x = 0$ corresponde ao ano 2006).

(a) ¿Nalgún ano a empresa non tivo beneficios? Xustifica a resposta.

(b) Determina os intervalos de tempo nos que os beneficios aumentaron e nos que diminuíron. ¿Que información nos proporcionan sobre a evolución dos beneficios neses catro anos? Calcula os beneficios máximo e mínimo e os anos en que se produciron.

(c) Utilizando os resultados anteriores e calculando, se o hai, o punto de inflexión, representa a gráfica de $B(x)$.

3) Estase a planificar levar a cabo unha enquisa con pequenas empresas dunha poboación. Escollerase unha mostra aleatoria simple de empresas a partir do listado telefónico. Por experiencia, sábese que só a metade das empresas coas que se contacta responden. Se se contacta con 150 empresas,

(a) ¿Cal é o número esperado de empresas que responden?

(b) ¿Cal é a probabilidade de que como máximo respondan 70 empresas?

4) Supoñamos que o IMC (índice de masa corporal) en nenas de 13 anos dunha poboación segue unha distribución normal, $N(\mu, \sigma = 4)$.

(a) Se o 6'68% das citadas nenas está en risco de sobrepeso, é dicir, o seu IMC é superior a 22'5, calcula o valor do IMC medio, μ , para as nenas de 13 anos da poboación.

(b) Se o IMC para as nenas de 13 anos da poboación segue unha distribución $N(16'5, 4)$ e se extrae unha mostra aleatoria de 64 nenas de 13 anos desa poboación, calcula a probabilidade de que o IMC medio da mostra estea por debaixo de 15'3 (por debaixo do peso axeitado)

OPCIÓN B

1) Consideremos o seguinte sistema de inecuacións: $y - x - 2 \leq 0$; $y + x - 6 \leq 0$; $2y \geq 5 - x$.

(a) Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.

(b) Calcula en que punto ou puntos desa rexión alcanza os valores máximo e mínimo a función $f(x, y) = x + 2y$.

(c) Responde ao apartado anterior se se engade $y \geq 0$ ao sistema de inecuacións anterior.

2) Estímase que o número de unidades vendidas de certo produto N , aos t meses de introduci-lo no mercado, vén dado por: $N(t) = 200 \left(5 - \frac{10}{2+t} \right)$, $t \geq 0$.

(a) O número de unidades vendidas ¿aumenta ou diminúe ao transcórren os meses? Xustifica a resposta, estudando o crecemento ou decrecemento da función $N(t)$.

(b) Determina entre que meses as vendas son superiores a 500 e inferiores a 800 unidades.

(c) ¿As vendas tenden a estabilizarse arredor dalgunha cantidade? Xustifica a resposta.

3) Sexan A e B dous sucesos tales que a probabilidade de que ambos os dous acontezan simultaneamente é $1/10$ e a probabilidade de que non aconteza ningún dos dous é $1/5$. Ademais sábese que $P(A/B) = 1/4$.

(a) Calcula a probabilidade de que aconteza algún dos dous sucesos.

(b) Calcula a probabilidade de que aconteza o suceso A .

4) Nun recente estudo afirmase que hai un 5% de lesións de xeonllo entre futbolistas que xogan sobre céspede e calzan un novo modelo de botas de fútbol. De 250 futbolistas que xogan sobre céspede e que calzan botas de fútbol convencionais déronse 20 de tales lesións.

(a) Formula un test para contrastar a hipótese de que a proporción de lesións de xeonllo xogando con botas convencionais non supera á de tales lesións xogando co novo modelo, fronte a hipótese de que si a supera.

(b) ¿A que conclusión se chega cun 5% de nivel de significación? ¿Chégase á mesma conclusión cun 1% de nivel de significación?

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1) Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula B^{-1} , matriz inversa de B .

(b) Determina os valores que deben tomar a e b para que se verifique $A \cdot B^{-1} + 2 \cdot I = C^t$, I é a matriz identidade de orde 2 e C^t é a matriz trasposta de C .

2) O beneficio B (en miles de euros) para unha compañía que gasta unha cantidade x (en miles de euros) en publicidade estímase por: $B(x) = -0,1x^3 + 6x^2 + 400$, $0 \leq x \leq 60$.

(a) Calcula a cantidade de diñeiro que a compañía debe gastar en publicidade para que lle produza un beneficio máximo e calcula o devandito beneficio. ¿Que cantidade de diñeiro en publicidade lle produce un beneficio mínimo?

(b) Representa a gráfica da función, utilizando os resultados anteriores e calculando concavidade, convexidade e punto de inflexión.

3) Certa poboación de persoas maiores de 70 anos está formada por un 40% de homes e un 60% de mulleres. A porcentaxe de persoas dependentes nesa poboación é do 10% entre os homes e do 20% entre as mulleres.

(a) Calcula a porcentaxe de persoas dependentes nesa poboación de maiores de 70 anos.

(b) Elexida unha persoa ao azar da citada poboación, ¿cal é a probabilidade de que sexa muller ou non sexa dependente?

4) A proporción de mulleres dunha poboación portadoras de hemofilia é descoñecida. Para estimala elíxese unha mostra aleatoria de 500 mulleres entre as que se encontran 80 portadoras da enfermidade.

(a) Calcula un intervalo do 95% de confianza para a proporción de mulleres portadoras de hemofilia desa poboación.

(b) Supoñendo que aínda non se tomou a mostra e queremos facer a estimación cometendo un erro non superior ao 2%, cun 95% de confianza, ¿de que tamaño debería ser a devandita mostra?

OPCIÓN B

1) (a) Representa a rexión do plano definida polo sistema de inecuacións: $y + 2x \leq 6$, $y \leq x$, $4y \geq x - 3$, e calcula os seus vértices. Xustifica se os puntos $P(1, -1/2)$ e $Q(1/2, 1)$ pertencen ou non a esta rexión.

(b) Calcula en que punto ou puntos desta rexión a función $f(x, y) = y + 2x$ alcanza o valor máximo.

2) Os ingresos (en millóns de euros) obtidos por certa factoría no período comprendido dende o ano 2000 ao 2010, estimáronse pola función

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-5)^2 + 17, & 1 \leq x < 7 \\ -x^2 + 18x - 59, & 7 \leq x \leq 11 \end{cases}, \text{ onde } x \text{ é o tempo transcorrido en anos (} x = 1 \text{ corresponde ao ano 2000)}$$

(a) Calcula os ingresos obtidos no ano 2002 e no ano 2007.

(b) Determina a evolución dos ingresos no período comprendido dende o 2000 ata o 2010 (crecemento e decrecemento da función $I(x)$). Calcula os ingresos máximo e mínimo.

(c) Determina entre que anos dese período os ingresos non superaron os 18 millóns.

3) Sábese que $P(B/A) = 0,7$, $P(A/B) = 0,4$ e $P(A) = 0,2$.

(a) Calcula $P(A \cap B)$ e $P(B)$. Xustifica se son independentes ou non os sucesos A e B .

(b) Calcula $P(A \cup \bar{B})$, onde \bar{B} representa o suceso complementario ou contrario de B .

4) Nun estudo sociolóxico afirmábase que o tempo medio que os mozos están conectados á Rede non supera as 60 horas mensuais. Deséxase contrastar se actualmente segue en vigor ese estudo e, para iso, entrevístanse 400 mozos seleccionados ao azar e obtense que o tempo medio é de 62 horas. Supoñemos que o tempo dedicado polos mozos a conectarse á Rede segue unha distribución normal, de desviación típica 15 horas mensuais.

(a) Formula un test para contrastar a hipótese de que o tempo medio mensual dedicado actualmente polos mozos a conectarse á Rede e o que afirma o estudo, fronte á alternativa de que aumentou. ¿A que conclusión se chega cun 1% de nivel de significación?

(b) Usando a información recollida na mostra, calcula o intervalo do 95% de confianza para o tempo medio mensual dedicado actualmente pola poboación de mozos a conectarse á Rede.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

EXERCICIO 1 (3 puntos)

(a) **2 puntos:**

- Expresar o sistema en forma matricial: **0,50 puntos.**
- Calcular a inversa da matriz pedida: **1,50 puntos.**

(b) **1 punto:**

- Expresión da matriz dos prezos: **0,25 puntos.**
- Polo cálculo dos prezos de equilibrio: **0,75 puntos.**

EXERCICIO 2 (3 puntos)

(a) **0,50 puntos:**

- Por solucións da ecuación: **0,25 puntos.**
- Por resposta: **0,25 puntos.**

(b) **1,75 puntos:**

- Determinar a primeira derivada: **0,25 puntos.**
- Intervalos de crecemento e de decrecemento: **0,50 puntos.**
- Información sobre a evolución dos beneficios nos catro anos: **0,50 puntos.**
- Beneficios máximo e mínimo e anos nos que se produciron: **0,50 puntos.**

(c) **0,75 puntos.**

- Punto de inflexión: **0,25 puntos.**
- Representación gráfica da función: **0,50 puntos.**

EXERCICIO 3 (2 puntos)

(a) **0,50 puntos:**

- Polo cálculo do número esperado pedido: **0,50 puntos.**

(b) **1,50 puntos:**

- Formular a probabilidade pedida: **0,25 puntos.**
- Paso da binomial á normal: **0,50 puntos.**
- Corrección de medio punto: **0,25 puntos.**
- Tipificación: **0,25 puntos.**
- Paso a táboas e resultado final: **0,25 puntos.**

EXERCICIO 4 (2 puntos)

(a) **0,75 puntos:**

- Formular a condición imposta no enunciado do exercicio: **0,25 puntos.**
- Buscar o punto crítico na táboa: **0,25 puntos.**
- Polo cálculo da media: **0,25 puntos.**

(b) **1,25 puntos:**

- Determinar a distribución de \bar{X} : **0,25 puntos.**
- Formular a probabilidade pedida: **0,25 puntos.**
- Tipificación: **0,25 puntos.**
- Paso a táboas: **0,25 puntos.**
- Resultado final: **0,25 puntos.**

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

EXERCICIO 1 (3 puntos)

(a) **1,5 puntos:**

- Vértices da rexión factible: **0,75 puntos (0,25 puntos** por cada un deles).
- Representación gráfica da rexión factible: **0,75 puntos** (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os tres vértices).

(b) **0,75 puntos:**

- Punto da rexión no que a función obxectivo alcanza o valor máximo: **0,25 puntos**.
- Puntos da rexión nos que alcanza o valor mínimo: **0,50 puntos**.

(c) **0,75 puntos:**

- Nova rexión factible: **0,25 puntos**.
- Punto da nova rexión no que a función obxectivo alcanza o valor máximo: **0,25 puntos**.
- Puntos da nova rexión nos que alcanza o valor mínimo: **0,25 puntos**.

EXERCICIO 2 (3 puntos)

(a) **1,25 puntos:**

- Determinar a primeira derivada: **0,75 puntos**.
- Xustificar que o número de unidades vendidas aumenta: **0,50 puntos**.

(b) **1,25 puntos:**

- Solución para a primeira desigualdade: **0,50 puntos**.
- Solución para a segunda desigualdade: **0,50 puntos**.
- Especificar o intervalo de tempo pedido: **0,25 puntos**.

(c) **0,50 puntos:**

- Resolver o límite da función dada: **0,50 puntos**.

EXERCICIO 3 (2 puntos)

(a) **1 punto:**

- Formular a probabilidade pedida: **0,25 puntos**.
- Relacionar a probabilidade da intersección de contrarios coa da unión, e identificar na expresión obtida a probabilidade dada no enunciado : **0,50 puntos**.
Obter o resultado: **0,25 puntos**.

(b) **1 punto:**

- Calcular $P(B)$, partindo do dato da probabilidade condicionada: **0,50 puntos**.
- Formular a probabilidade da unión de sucesos e chegar ao resultado pedido: **0,50 puntos**.

EXERCICIO 4 (2 puntos)

(a) **0,75 puntos:**

- Cálculo da proporción mostral: **0,25 puntos**.
- Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0,50 puntos**.

(b) **1,25 puntos:**

- Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0,25 puntos**.
- Establecer a rexión crítica, para o 5% de nivel de significación: **0,25 puntos**.
- Conclusión: **0,25 puntos**.
- Establecer a rexión crítica, para o 1% de nivel de significación: **0,25 puntos**.
- Conclusión: **0,25 puntos**.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

EXERCICIO 1 (3 puntos)

(a) **1 punto:**

- Calcular a inversa da matriz B : **1 punto**.

(b) **2 puntos:**

- Operar alxébricamente coas matrices dadas: **1,25 puntos**.
- Resolver a igualdade de matrices, obtendo os valores de a e b : **0,75 puntos**.

EXERCICIO 2 (3 puntos)

(a) **2 puntos:**

- Determinar a primeira derivada: **0,25 puntos**.
- Calcular os puntos críticos: **0,25 puntos**.
- Comprobar en que punto se presenta o máximo e en cal o mínimo: **0,50 puntos**.
- Polo beneficio máximo e especificar a cantidade de diñeiro que debe gastar en publicidade para que lle produza ese beneficio máximo: **0,50 puntos**.
- Determinar as cantidades de diñeiro para que lle produzan un beneficio mínimo: **0,50 puntos**.

(b) **1 punto:**

- Estudo da concavidade, convexidade e punto de inflexión: **0,50 puntos**.
- Representar a gráfica da función: **0,50 puntos**.

EXERCICIO 3 (2 puntos)

(a) **1 punto:**

- Aplicar o teorema das probabilidades totais identificando cada unha das probabilidades do enunciado do exercicio e resultado: **0,75 puntos**.
- Expresión da porcentaxe pedida: **0,25 puntos**.

(b) **1 punto:**

- Formulación da probabilidade pedida: **0,25 puntos**.
- Expresión da probabilidade da unión anterior, identificando as probabilidades da fórmula: **0,50 puntos**.
- Resultado final: **0,25 puntos**.

EXERCICIO 4 (2 puntos)

(a) **1 punto:**

- Expresión do intervalo de confianza: **0,25 puntos**.
- Calcular numericamente os extremos do intervalo: **0,50 puntos**.
- Expresar o intervalo de confianza pedido: **0,25 puntos**.

(b) **1 punto:**

- Identificar o radio do intervalo cos valores numéricos que lle corresponden: **0,50 puntos**.
- Cálculo de n : **0,50 puntos**.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

EXERCICIO 1 (3 puntos)

(a) **2,25 puntos:**

- Vértices da rexión factible: **0,75 puntos.**
- Representación gráfica da rexión factible: **1 punto** (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os tres vértices).
- Xustificar se os puntos P e Q pertencen ou non a esta rexión: **0,50 puntos.**

(b) **0,75 puntos:**

- Puntos da rexión no que a función obxectivo alcanza o valor máximo: **0,75 puntos.**

EXERCICIO 2 (3 puntos)

(a) **0,50 puntos:**

- Determinar os ingresos no ano 2002: **0,25 puntos.**
- Determinar os ingresos no ano 2007: **0,25 puntos.**

(b) **1,75 puntos:**

- Determinar a primeira derivada en cada un dos anacos da función: **0,50 puntos.**
- Determinar os intervalos de crecemento e de decrecemento: **0,50 puntos**
- Responder á pregunta de evolución dos ingresos no período comprendido dende o 2000 ata o 2010: **0,25 puntos.**
- Ingresos máximo e mínimo: **0,50 puntos**

(c) **0,75 puntos:**

- Solución para as desigualdades: **0,50 puntos.**
- Especificar o intervalo de tempo pedido: **0,25 puntos.**

EXERCICIO 3 (2 puntos)

(a) **1 punto:**

- Formular a probabilidade condicionada: **0,25 puntos.**
- Calcular a probabilidade da intersección dos sucesos A e B : **0,25 puntos.**
- Calcular a probabilidade do suceso B : **0,25 puntos.**
- Xustificar que os sucesos non son independentes: **0,25 puntos.**

(b) **1 punto:**

- Formular a probabilidade da unión de sucesos e chegar ao resultado pedido: **1 punto.**

EXERCICIO 4 (2 puntos)

(a) **1,25 puntos:**

- Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0,25 puntos.**
- Establecer a rexión crítica: **0,25 puntos.**
- Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0,25 puntos.**
- Decidir se aceptamos ou rexeitamos a hipótese nula: **0,25 puntos.**
- Conclusión: **0,25 puntos.**

(b) **0,75 puntos:**

- Calcular numéricamente os extremos do intervalo: **0,50 puntos.**
- Especificar, cun 95% de confianza, o tempo medio mensual dedicado actualmente pola poboación de mozos a conectarse á Rede: **0,25 puntos.**

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

O/A alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das dúas opcións (A ou B)

OPCIÓN A

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexa o seguinte sistema de ecuacións lineais $x + y + z = 6$; $x + y - z = 0$; $2x - y + z = 3$, sendo x , y e z os prezos dos produtos P_1 , P_2 e P_3 , respectivamente.

(a) **2 puntos.** *Exprésalo sistema en forma matricial $AX = B$. Calcula a matriz inversa de A , sendo A a matriz cadrada de orde 3 dos coeficientes.*

– Exprésalo sistema en forma matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ **0'50 puntos.**

– Calcular $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ **1'50 puntos.**

(b) **1 punto.** *Calcula os prezos de equilibrio para eses tres produtos x , y , z .*

– Expresión da matriz dos prezos, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

– Resolver, obtendo os prezos de equilibrio, $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$, e polo tanto o prezo dos produtos P_1 , P_2 e P_3 é 1, 2 e 3 unidades monetarias, respectivamente. **0'75 puntos (0'25 puntos por cada un deles).**

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Os beneficios (en centos de miles de euros anuais) estimados por unha pequena empresa durante un período de catro anos, axustáronse á función $B(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $0 \leq x \leq 4$, onde $B(x)$ representa os beneficios da empresa aos x anos transcorridos dende a súa constitución ($x = 0$ corresponde ao ano 2006).

(a) **0'50 puntos.** *¿Nalgún ano a empresa non tivo beneficios? Xustifica a resposta.*

– Solucións da ecuación $B(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow x = 0$ e $x = 3$ **0'25 puntos.**

– Responder á pregunta do exercicio “A empresa non tivo beneficios no ano 2006 e no 2009” **0'25 puntos.**

(b) **1'75 puntos.** *Determina os intervalos de tempo nos que os beneficios aumentaron e nos que diminuíron. ¿Que información nos proporcionan sobre a evolución dos beneficios neses catro anos? Calcula os beneficios máximo e mínimo e os anos en que se produciron.*

– Determinar a primeira derivada: $B'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ **0'25 puntos.**

– Calcular os puntos críticos: $B'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1$ e $x = 3$ e facer o estudo do crecemento e do decrecemento da función

	(0, 1)	(1, 3)	(3, 4)
x	$x = 1/2$	$x = 2$	$x = 7/2$
signo de $B'(x)$	$B'(1/2) > 0$	$B'(2) = 0$	$B'(7/2) > 0$

– No intervalo (0, 1) e no (3, 4) os beneficios aumentaron **0'25 puntos.**

– No intervalo (1, 3) os beneficios diminuíron **0'25 puntos.**

– Información sobre a evolución dos beneficios neses catro anos:

Exemplos de resposta / Solucións

“A empresa foi aumentando os seus beneficios dende o instante da súa constitución, ano 2006, ata o ano 2007. Os beneficios diminuíron entre o 2007 e o 2009, volvendo aumentar ata o ano 2010” **0’50 puntos**.

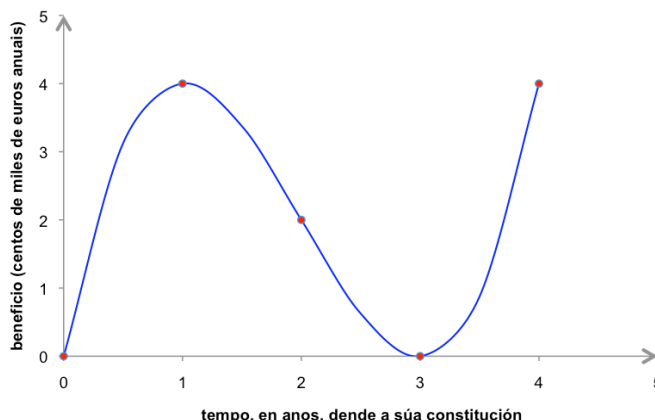
- No ano 2007 e no 2010, tiveron un beneficio máximo anual de 400.000 euros. No 2009 (e no 2006) o seu beneficio foi mínimo de 0 euros, é dicir, non tiveron beneficios”. **0’50 puntos**.

(c) **0’75 puntos**. Utilizando os resultados anteriores e calculando, se o hai, o punto de inflexión, representa a gráfica de $B(x)$

- $B''(x) = 6x - 12$, $B''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$, polo que o punto de inflexión preséntase no (2, 2) **0’25 puntos**.

- Representación gráfica da función **0’50 puntos**.

Recuperamos toda a información que tiñamos sobre $B(x)$ e representamos a súa gráfica



Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Estase a planificar levar a cabo unha enquisa con pequenas empresas dunha poboación. Por experiencia, sábese que só a metade das empresas coas que se contacta responden. Se se contacta con 150 empresas,

(a) **0’50 puntos**. ¿Cal é o número esperado de empresas que responden?

- Definimos a variable aleatoria binomial $X =$ número de empresas que responden, en mostras de 150 empresas. $X \sim B(n = 150, p = 0'5)$ **0’25 puntos**.
- $E(X) = n \cdot p = 150 \cdot 0'5 = 75$. “En mostras de 150 empresas, espérase que respondan 75 delas ” **0’25 puntos**.

(b) **1’50 puntos**. ¿Cal é a probabilidade de que como máximo respondan 70 empresas?

- Formular a probabilidade pedida: $P(X \leq 70)$ **0’25 puntos**.
- Paso da binomial á normal:
$$X \sim B(n = 150, p = 0'5) \Rightarrow X' \sim N\left(\mu = n \cdot p = 75, \sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = 6'12\right)$$
 0’50 puntos.
- Corrección de medio punto: $P(X \leq 70) = P(X' < 70'5)$ **0’25 puntos**.
- Tipificación: $P(X \leq 70) = P(X' < 70'5) = P\left(Z < \frac{70'5 - 75}{6'12}\right) = P(Z < -0'73)$ **0’25 puntos**.
- Paso a táboas e resultado final: $P(Z < -0'73) = 1 - P(Z < 0'73) = 1 - 0'7673 = 0'2327$ **0’25 puntos**.

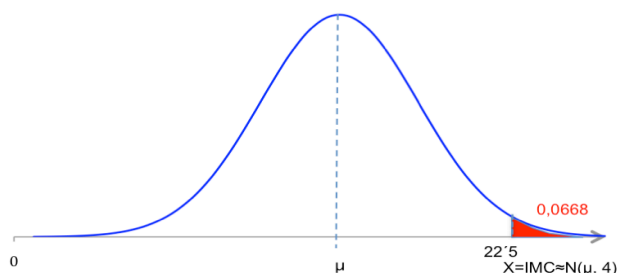
Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Supoñamos que o IMC (índice de masa corporal) en nenas de 13 anos dunha poboación segue unha distribución normal, $N(\mu, \sigma = 4)$

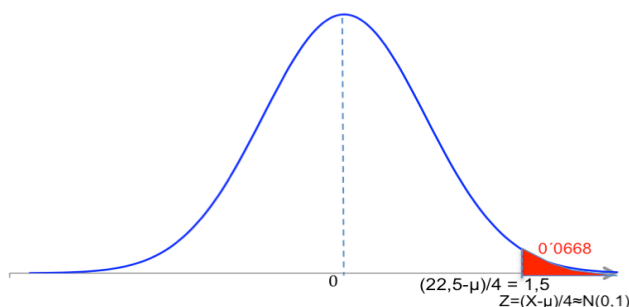
(a) **0’75 puntos**. Se o 6’68% das citadas nenas está en risco de sobrepeso, é dicir, o seu IMC é superior a 22’5, calcula o valor do IMC medio, μ , para as nenas de 13 anos da poboación.

Exemplos de resposta / Solucións

Definimos “ X = índice de masa corporal, IMC, dunha nena de 13 anos desa poboación”, $X \sim N(\mu, \sigma = 4)$.
 Pódese facer directamente sobre as gráficas da distribución normal X e a da súa tipificación Z ,



0.25 puntos.



- $\frac{22.5 - \mu}{4} = z_{0.9332} = 1.5$ **0.25 puntos**
- Despexando $\mu = 16.5$ **0.25 puntos**

Ou tamén así

- Formular a condición imposta no enunciado do exercicio: $P(X > 22.5) = 0.068$ **0.25 puntos.**
- Tipificar e buscar o punto crítico na táboa: $P\left(Z > \frac{22.5 - \mu}{4}\right) = 0.068 \xrightarrow{\text{Táboas}} \frac{22.5 - \mu}{4} = 1.5$
0.25 puntos.
- Cálculo da media: $\mu = 22.5 - 4 \cdot 1.5 = 16.5$ **0.25 puntos.**

(b) **1.25 puntos.** Se o IMC para as nenas de 13 anos da poboación segue unha distribución $N(16.5, 4)$ e se extrae unha mostra aleatoria de 64 nenas de 13 anos desa poboación, calcula a probabilidade de que o IMC medio da mostra estea por debaixo de 15.3 (por debaixo do peso axeitado)

- Determinar a distribución de \bar{X} , $\bar{X} \sim N\left(\mu = 16.5, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.5\right)$ **0.25 puntos.**
- Formular a probabilidade pedida: $P(\bar{X} < 15.3)$ **0.25 puntos.**
- Tipificación: $P(\bar{X} < 15.3) = P\left(Z < \frac{15.3 - 16.5}{0.5}\right) = P(Z < -2.4)$ **0.25 puntos.**
- Paso a táboas: $P(Z < -2.4) = P(Z > 2.4) = 1 - P(Z < 2.4)$ **0.25 puntos.**
- Resultado final: $1 - P(Z < 2.4) = 1 - 0.9918 = 0.0082$ **0.25 puntos.**

Exemplos de resposta / Solucións

OPCIÓN B

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Consideremos o seguinte sistema de inecuacións: $y - x - 2 \leq 0$; $y + x - 6 \leq 0$; $2y \geq 5 - x$.

(a) **1'50 puntos.** Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.

- Vértices da rexión factible **0'75 puntos**, polos vértices: A ($1/3, 7/3$); B (2, 4); C (7, -1) (**0'25 puntos** por cada un deles).
- Representación gráfica da rexión factible (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os tres vértices) **0'75 puntos**:

A rexión factible está delimitada polos vértices A, B e C (gráfico (1)).

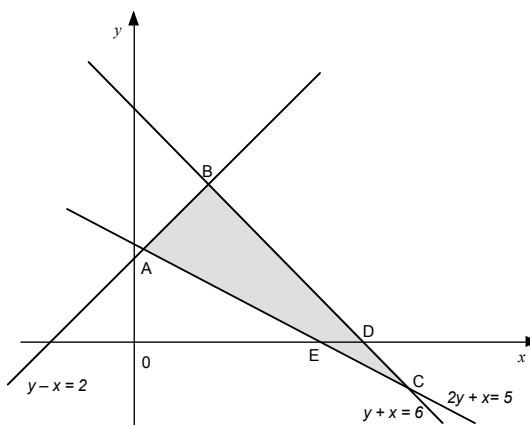


gráfico (1)

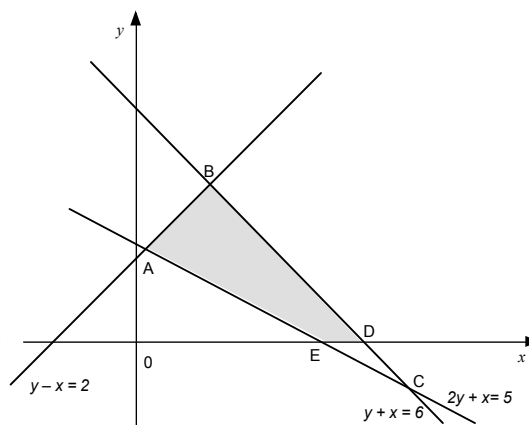


gráfico (2)

(b) **0'75 puntos.** Calcula en que punto ou puntos desa rexión alcanza os valores máximo e mínimo a función $f(x,y) = x + 2y$.

- A función obxectivo alcanza o *valor máximo* no punto B (2, 4) **0'25 puntos**.
- A función obxectivo alcanza o *valor mínimo* nos puntos A ($1/3, 7/3$), C (7, -1) **0'25 puntos**, e nos infinitos puntos do segmento AC **0'25 puntos**.

(c) **0'75 puntos.** Responde ao apartado anterior se se engade $y \geq 0$ ao sistema de inecuacións anterior.

- Identificar a nova rexión factible (ver gráfico (2)), que está limitada polos vértices A ($1/3, 7/3$), B (2, 4), D (6, 0) e E (5, 0) **0'25 puntos**.
- A función obxectivo alcanza o *valor máximo* no punto B (2, 4) **0'25 puntos**.
- A función obxectivo alcanza o *valor mínimo* nos puntos A ($1/3, 7/3$), E (5, 0) e nos infinitos puntos do segmento AE **0'25 puntos**.

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Estímase que o número de unidades vendidas de certo produto N , aos t meses de introducilo no mercado, vén

dado por: $N(t) = 200 \left(5 - \frac{10}{2+t} \right)$, $t \geq 0$.

(a) **1'25 puntos.** O número de unidades vendidas *¿aumenta ou diminúe* ao transcorrer os meses? Xustifica a resposta, estudando o crecemento ou decrecemento da función $N(t)$.

- Determinar a primeira derivada: $N'(t) = \frac{2000}{(2+t)^2}$ **0'75 puntos**.
- Xustificar que o número de unidades vendidas *aumenta* ao transcorrer os meses, estudando o signo da primeira derivada: $N'(t) > 0$, para todos os valores de t , logo $N(t)$ é crecente en todo \mathbb{R} , e en particular no intervalo $(0, +\infty)$ **0'50 puntos**.

(b) **1'25 puntos.** Determina entre que meses as vendas son superiores a 500 e inferiores a 800 unidades.

- Primeira desigualdade: $N(t) > 500 \Leftrightarrow 200 \left(5 - \frac{10}{2+t} \right) > 500 \Rightarrow \frac{10}{2+t} < \frac{5}{2} \Rightarrow 2+t > 4 \Rightarrow t > 2$ **0'50 puntos**.

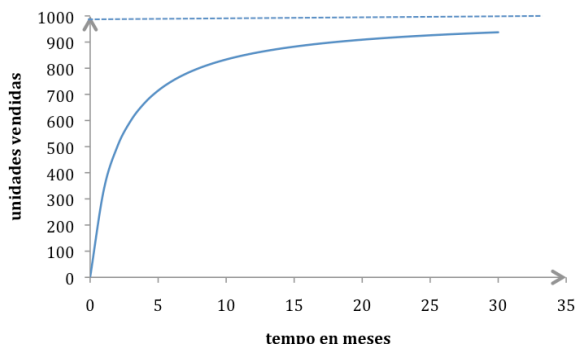
Exemplos de resposta / Solucións

- Segunda desigualdade: $N(t) < 800 \Leftrightarrow 200\left(5 - \frac{10}{2+t}\right) < 800 \Rightarrow \frac{10}{2+t} > 1 \Rightarrow 2+t < 10 \Rightarrow t < 8$ **0'50 puntos.**
- Especificar o intervalo de tempo pedido, "Entre o segundo e o oitavo mes as vendas superan as 500 unidades e son inferiores a 800 unidades" **0'25 puntos.**

(c) **0'50 puntos.** ¿As vendas tenden a estabilizarse arredor dalgunha cantidade? Xustifica a resposta.

- Resolver o límite da función dada, $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 200\left(5 - \frac{10}{2+t}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1000 - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2000}{2+t} = 1000$
 "As vendas tenden a estabilizarse arredor das 1000 unidades" **0'50 puntos.**

(Tamén se podería resolver representando a gráfica da función)



Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Sexan A e B dous sucesos tales que a probabilidade de que ambos os dous acontezan simultaneamente é $1/10$ e a probabilidade de que non aconteza ningún dos dous é $1/5$. Ademais sábese que $P(A/B) = 1/4$.

(a) **1 punto.** Calcula a probabilidade de que aconteza algún dos dous sucesos.

As probabilidades que nos están dando no enunciado son $P(A \cap B) = 1/10$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1/5$

- Formular a probabilidade pedida: $P(A \cup B)$ **0'25 puntos.**
- Relacionar a probabilidade da intersección de contrarios coa da unión:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$

- Identificar na expresión obtida a probabilidade dada no enunciado: $\frac{1}{5} = 1 - P(A \cup B)$ **0'25 puntos.**
- Resultado $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ **0'25 puntos.**

(b) **1 punto.** Calcula a probabilidade de que aconteza o suceso A .

- Calcular a probabilidade do suceso B , partindo dos datos da probabilidade condicionada e da intersección $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1/10}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$ **0'50 puntos.**
- Formular a probabilidade da unión de sucesos,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 4/5 = P(A) + 2/5 - 1/10 \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$

- Chegar ao resultado pedido $P(A) = 1/2$ **0'25 puntos.**

Pódese responder coa táboa, pero para iso é necesario calcular primeiro $P(B)$ coa definición de probabilidade condicionada, como fixemos no apartado (b), $P(B) = 2/5$ **0'50 puntos** + pola táboa **1 punto** + polo apartado (a) **0'50 puntos** (formular a unión + resultado). O apartado (b) xa está evaluado na táboa.

	B	\bar{B}	
A	$1/10$	$2/5$	$1/2$
\bar{A}	$3/10$	$1/5$	$1/2$
	$2/5$	$3/5$	1

Exemplos de resposta / Solucións

Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Nun recente estudo afirmase que hai un 5% de lesións de xeonllo entre futbolistas que xogan sobre céspede e calzan un novo modelo de botas de fútbol. De 250 futbolistas que xogan sobre céspede e que calzan botas de fútbol convencionais déronse 20 de tales lesións.

(a) **0'75 puntos.** Formula un test para contrastar a hipótese de que a proporción de lesións de xeonllo xogando con botas convencionais non supera á de tales lesións xogando co novo modelo, fronte a hipótese de que si a supera.

Sexan

“ p : proporción de lesións de xeonllo entre xogadores de fútbol que calzan botas convencionais”
Parámetro poboacional descoñecido (é o que nos mandan contrastar)

\hat{P} : proporción de lesións de xeonllo entre futbolistas que calzan botas convencionais, en mostras de 250 deses futbolistas (estimador puntual de “ p ”)

↓

$\hat{p} = 20 / 250 = 0'08$ (estimación puntual de p) **0'25 puntos**

- Formulación das hipóteses $\begin{cases} H_0 : p \leq 0'05 \\ H_1 : p > 0'05 \end{cases}$ **0'50 puntos.**

(b) **1'25 puntos.** ¿A que conclusión se chega cun 5% de nivel de significación? ¿Chégase á mesma conclusión cun 1% de nivel de significación?

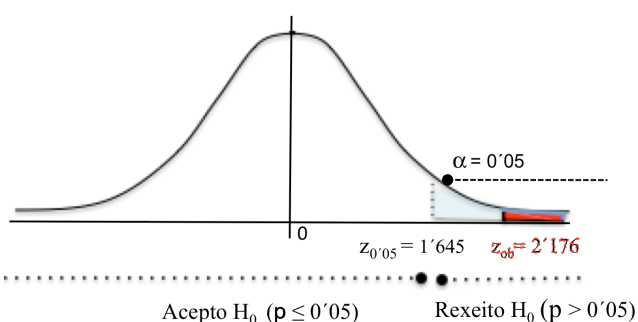
- Estadístico de proba: $\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$

- Avaliar o estatístico de proba, “baixo a hipótese H_0 certa”, para a mostra dada:

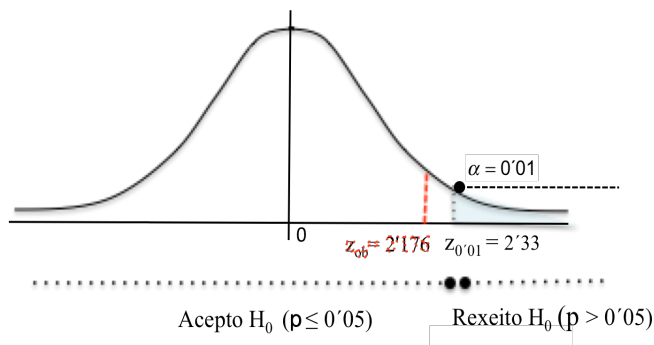
$$z_{ob} = \frac{0'08 - 0'05}{\sqrt{\frac{0'05 \cdot 0'95}{250}}} = 2'176 \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$

- Establecer a rexión crítica, para $\alpha = 0'05$, $(1'645, +\infty)$ (ver gráfica (1)) **0'25 puntos.**
- Decisión $z_{ob} = 2'176 > z_{crit} = 1'645 \Rightarrow$ Rexeito H_0 , polo tanto

“Cun risco de equivocarnos dun 5% concluiremos que, sobre a base da mostra dada, a proporción de lesións de xeonllo con botas convencionais é maior que co novo modelo de botas” **0'25 puntos.**



gráfica (1)



gráfica (2)

- Establecer a nova rexión crítica, para $\alpha = 0'01$, $(2'33, +\infty)$ (ver gráfica (2)) **0'25 puntos.**
- Decisión $z_{ob} = 2'176 < z_{crit} = 2'33 \Rightarrow$ Acepto H_0 , polo tanto

“Non chegaríamos á mesma conclusión, xa que cun 1% de risco de equivocarnos non poderíamos rexeitar H_0 , co que non poderíamos concluir que se supera a proporción de lesións de xeonllo” **0'25 puntos.**

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

O/A alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das dúas opcións (**A** ou **B**)

OPCIÓN A

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(a) **1 punto.** Calcula B^{-1} , matriz inversa de B .

- Calcular a inversa de B , por calquera método $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

(b) **2 puntos.** Determina os valores que deben tomar a e b para que se verifique $A \cdot B^{-1} + 2 \cdot I = C^t$, I é a matriz identidade de orde 2 e C^t é a matriz trasporta de C .

- Operar alxébricamente coas matrices dadas:

$$2 \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}} \quad C^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$

$$A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} a-4 & -\frac{a}{2}+3 \\ 1-2b & -\frac{1}{2}+\frac{3b}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{0'50 \text{ puntos.}} \quad A \cdot B^{-1} + 2 \cdot I = \begin{pmatrix} a-2 & -\frac{a}{2}+3 \\ 1-2b & \frac{3}{2}(b+1) \end{pmatrix} \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$

- Resolver a igualdade de matrices, obtendo os valores de a e b :

$$a-2=0 \Rightarrow a=2 \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}} \quad 1-2b=-1 \Rightarrow b=1 \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$

- Comprobar a compatibilidade do valor de $a=2$ na outra igualdade $-\frac{a}{2}+3=2$ e do valor de $b=1$ na igualdade $\frac{3}{2}(b+1)=3$ **0'25 puntos.**

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

O beneficio B (en miles de euros) para unha compañía que gasta unha cantidade x (en miles de euros) en publicidade estímase por $B(x) = -0'1x^3 + 6x^2 + 400$, $0 \leq x \leq 60$.

(a) **2 puntos.** Calcula a cantidade de diñeiro que a compañía debe gastar en publicidade para que lle produza un beneficio máximo e calcula o devandito beneficio. ¿Que cantidade de diñeiro en publicidade lle produce un beneficio mínimo?

- Determinar a primeira derivada $B'(x) = -0'3x^2 + 12x$ **0'25 puntos.**
- Calcular os puntos críticos $x=0$, $x=40$ **0'25 puntos.**
- Comprobar en que puntos se presentan o máximo e o mínimo $B''(x) = -0'6x + 12 \rightarrow \begin{cases} B''(0) > 0 \\ B''(40) < 0 \end{cases}$, deducindo que en $x=0$ $B(x)$ presenta un mínimo **0'25 puntos** e en $x=40$ $B(x)$ presenta un máximo **0'25 puntos.**
- Polo beneficio máximo e especificar a cantidade de diñeiro que debe gastar en publicidade para que lle produza ese beneficio máximo: “Deben gastar 40.000 euros en publicidade (**0'25 puntos**), para que o seu beneficio sexa máximo, sendo o devandito beneficio de 3.600.000 euros (**0'25 puntos**)”

Exemplos de resposta / Solucións

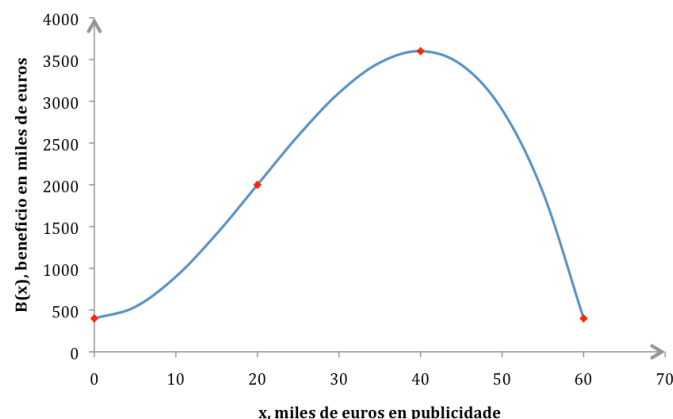
- Determinar que cantidade de diñeiro en publicidade lle produce un beneficio mínimo:

Para $x = 0$ $B(0) = 400$ e para $x = 60$ $B(60) = 400$, polo tanto

“Se non gastan nada en publicidade (**0'25 puntos**), ou se gastan 60.000 euros (**0'25 puntos**) o beneficio que obteñen é mínimo”

(b) **1 punto.** Representa a gráfica da función, utilizando os resultados anteriores e calculando concavidade, convexidade e punto de inflexión.

- $B''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20$, no intervalo $(0, 20)$ a función é cóncava cara arriba (convexa), no intervalo $(20, 60)$ é cóncava cara abaixo (cóncava) **0'25 puntos.**
- O punto $(20, 2000)$ é o punto de inflexión **0'25 puntos.**
- Representación gráfica **0'50 puntos.**



Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

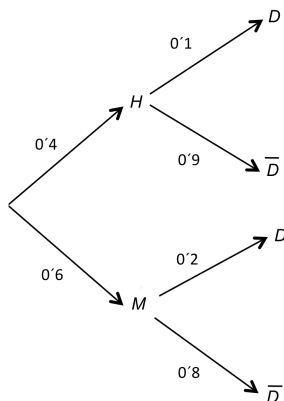
Certa poboación de persoas maiores de 70 anos está formada por un 40% de homes e un 60% de mulleres. A porcentaxe de persoas dependentes nesa poboación é do 10% entre os homes e do 20% entre as mulleres.

(a) **1 punto.** Calcula a porcentaxe de persoas dependentes nesa poboación de maiores de 70 anos.

Denominamos aos sucesos “H”: unha persoa (> de 70 anos) desa poboación é home, “M”: unha persoa (> de 70 anos) desa poboación é muller, “D”: unha persoa (> de 70 anos) desa poboación é dependente.

Os datos que recolleemos do enunciado son: $P(H) = 0'4$; $P(M) = 0'6$; $P(D/H) = 0'1$; $P(D/M) = 0'2$.

- Formular a probabilidade pedida: $P(D)$ **0'25 puntos.**
- Utilizar o teorema das probabilidades totais e substituír os valores de cada probabilidade na fórmula anterior: $P(D) = P(H) \cdot P(D/H) + P(M) \cdot P(D/M) = 0'4 \cdot 0'1 + 0'6 \cdot 0'2 = 0'16$ **0'50 puntos.**
- Expresión da porcentaxe pedida: “O 16% desa poboación de persoas maiores de 70 anos é dependente” **0'25 puntos.**



- No caso de facelo co diagrama de árbore, a puntuación sería: **0'50 puntos** pola árbore + **0'25 puntos** por chegar ao resultado final + **0'25 puntos** pola expresión da porcentaxe.

(b) **1 punto.** Elixida unha persoa ao azar da citada poboación, ¿cal é a probabilidade de que sexa muller ou non sexa dependente?

- Formular a probabilidade pedida $P(M \cup \bar{D})$ **0'25 puntos.**

Exemplos de resposta / Solucións

- Expresión da probabilidade da unión anterior $P(M \cup \bar{D}) = P(M) + P(\bar{D}) - P(M \cap \bar{D})$ **0'25 puntos**.
- Identificar as probabilidades da fórmula
 $P(M \cup \bar{D}) = P(M) + P(\bar{D}) - P(M \cap \bar{D}) = 0'6 + (1 - 0'16) - 0'6 \cdot 0'8$ **0'25 puntos**.
- Resultado final $P(M \cup \bar{D}) = 0'96$ **0'25 puntos**.

Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

A proporción de mulleres dunha poboación portadoras de hemofilia é descoñecida. Para estimala elíxese unha mostra aleatoria de 500 mulleres entre as que se encontran 80 portadoras da enfermidade.

(a) **1 punto.** *Calcula un intervalo do 95% de confianza para a proporción de mulleres portadoras de hemofilia desa poboación.*

Sexan

" p : proporción de mulleres portadoras de hemofilia desa poboación
(**parámetro poboacional descoñecido**)

\hat{P} : proporción mostral de mulleres desa poboación portadoras de hemofilia,
en mostras de 500 mulleres (estimador puntual de " p ")

↓

$\hat{p} = 80/500 = 0'16$ (estimación puntual de p)

- Expresión do intervalo de confianza: $P\left(\underbrace{\hat{P} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{L_1} \leq p \leq \underbrace{\hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{L_2}\right) = 1 - \alpha$ **0'25 puntos**.
- Calcular numericamente os extremos do intervalo, avaliando para a mostra dada os estatísticos L_1 e L_2 , de forma que, o parámetro " p " descoñecido estimámolo polo valor particular de \hat{P} para a mostra dada, resultando:

$$L_1 \xrightarrow{\text{avaliámos para a mostra dada}} 0'16 - 1'96 \sqrt{\frac{0'16 \cdot 0'84}{500}} = 0'16 - 0'032 = 0'128 \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$

$$L_2 \xrightarrow{\text{avaliámos para a mostra dada}} 0'16 + 1'96 \sqrt{\frac{0'16 \cdot 0'84}{500}} = 0'16 + 0'032 = 0'192 \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$

- Responder á pregunta no contexto do problema, concluíndo que
"en base a mostra dada, estímase cun 95% de confianza, que a proporción de mulleres portadoras de hemofilia desa poboación, está entre un 12'8% e un 19'2%" **0'25 puntos**.

(b) **1 punto.** *Supoñendo que aínda non se tomou a mostra e queremos facer a estimación cometendo un erro non superior ao 2%, cun 95% de confianza, ¿de que tamaño debería ser a devandita mostra?*

O estatístico a utilizar é $\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$.

Como nos din que non se tomou ningunha mostra, entón non coñecemos unha estimación puntual previa de " p ", polo que teremos que tomar, obrigatoriamente, o caso máis desfavorable para " p ", $p = 1/2$, xa que a función $f(p) = p(1-p)$ se maximiza para $p = 1/2$.

- Formulamos a marxe de erro non superior ao 2%: $z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq 0'02$ **0'25 puntos**.
- Substituímos na fórmula: $1'96 \sqrt{\frac{1}{4n}} \leq 0'02$ **0'25 puntos**.
- Despexamos $n \geq 2401$
- Concluimos
"Para garantir ese erro, con ese nivel de confianza, necesitamos tomar mostras de 2401 ou máis mulleres desa poboación" **0'50 puntos**.

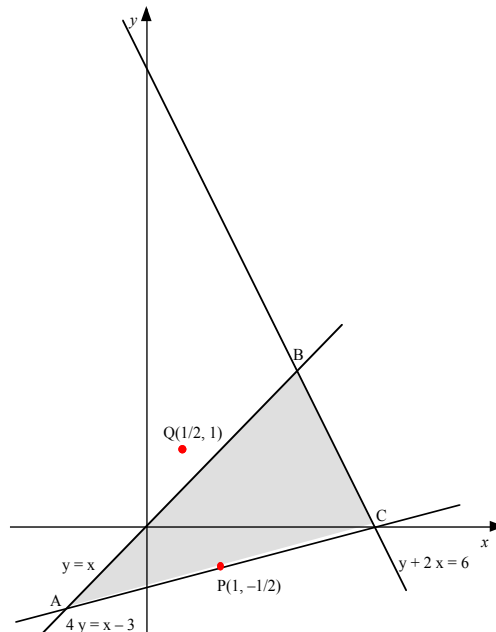
Exemplos de resposta / Solucións

OPCIÓN B

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

(a) **2'25 puntos.** Representa a rexión do plano definida polo sistema de inecuacións: $y + 2x \leq 6$, $y \leq x$, $4y \geq x - 3$ e calcula os seus vértices. Xustifica se os puntos $P(1, -1/2)$ e $Q(1/2, 1)$ pertencen ou non a esta rexión.

- Vértices da rexión factible **0'75 puntos**, polos vértices: $A(-1, -1)$; $B(2, 2)$; $C(3, 0)$ (**0'25 puntos** por cada un deles).
- Representación gráfica da rexión factible (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os tres vértices) **1 punto**:



- O punto $P(1, -1/2)$ si pertence á rexión factible (está na recta AC) **0'25 puntos**.
- O punto $Q(1/2, 1)$ non pertence á rexión factible, xa que non verifica a desigualdade $y \leq x$ **0'25 puntos**.

(b) **0'75 puntos.** Calcula en que punto ou puntos desta rexión a función $f(x,y) = y + 2x$ alcanza o valor máximo.

- A función obxectivo alcanza o *valor máximo* nos puntos $B(2, 2)$ **0'25 puntos**, $C(3, 0)$ **0'25 puntos**, e nos infinitos puntos do segmento BC **0'25 puntos**.

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Os ingresos (en millóns de euros) obtidos por certa factoría no período comprendido dende o ano 2000 ao 2010, estimáronse pola función

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-5)^2 + 17, & 1 \leq x < 7 \\ -x^2 + 18x - 59, & 7 \leq x \leq 11 \end{cases}, \text{ onde } x \text{ é o tempo transcorrido en anos (} x = 1 \text{ corresponde ao ano 2000)}$$

(a) **0'50 puntos.** Calcula os ingresos obtidos no ano 2002 e no ano 2007.

- No ano 2002, $I(3) = 18$, "18 millóns de euros" **0'25 puntos**.
- No ano 2007, $I(8) = 21$, "21 millóns de euros" **0'25 puntos**.

(b) **1'75 puntos.** Determina a evolución dos ingresos no período comprendido dende o ano 2000 ata o ano 2010 (crecemento e decrecemento da función $I(x)$). Calcula os ingresos máximo e mínimo.

Exemplos de resposta / Solucións

- Determinar a primeira derivada en cada un dos anacos da función $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-5), & 1 < x < 7 \\ -2x+18, & 7 < x < 11 \end{cases}$

0'50 puntos.

- Determinar os intervalos de crecemento e de decrecemento

No (1, 7) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$

No (7, 11) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 9$

	(1, 5)	(5, 7)
valor x	x = 2	x = 6
signo de f'(x)	f'(2) < 0	f'(6) > 0

	(7, 9)	(9, 11)
valor x	x = 8	x = 10
signo de f'(x)	f'(8) > 0	f'(10) < 0

- Nos intervalos (1, 5) e (9, 11) $f(x)$ é decrecente **0'25 puntos.**
- Nos intervalos (5, 7) e (7, 9) $f(x)$ é crecente **0'25 puntos.**
- Evolución dos ingresos no período comprendido dende o ano 2000 ata o 2010:
"Os ingresos diminuíron dende o ano 2000 ata o 2004 e tamén dende o ano 2008 ata o ano 2010. Dende o ano 2004 ata o 2008 os ingresos aumentaron." **0'25 puntos.**

En $x = 5$ $f(x)$ presenta un mínimo; $f(5) = 17$

En $x = 9$ $f(x)$ presenta un máximo; $f(9) = 22$

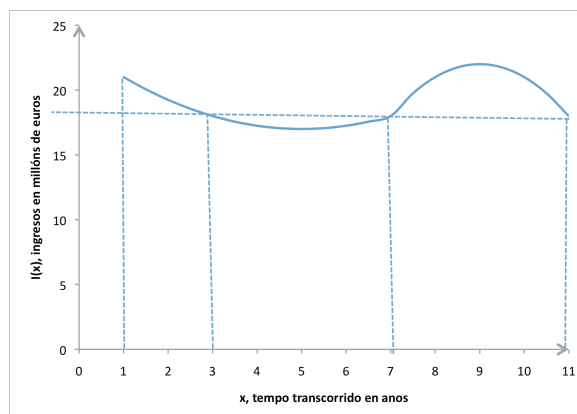
Valoramos a función nos extremos: en $x = 1$ $f(1) = 21$; en $x = 11$ $f(11) = 18$. Polo tanto o 5 é un mínimo absoluto e o 9 un máximo absoluto. Concluimos:

"A factoría tivo uns ingresos mínimos de 17 millóns de euros **0'25 puntos.**

"A factoría tivo uns ingresos máximos de 22 millóns de euros **0'25 puntos.**

(c) **0'75 puntos.** Determina entre que anos dese período os ingresos non superaron os 18 millóns de euros.

- No primeiro anaco $\frac{1}{4}(x-5)^2 + 17 \leq 18 \Rightarrow (x-5)^2 \leq 4 \Rightarrow 3 \leq x \leq 7$ **0'25 puntos.**
 - No segundo anaco $-x^2 + 18x - 59 \leq 18$ non ten solución no intervalo $[7, 11]$ **0'25 puntos.**
 - Contextualizar "A factoría non superou os 18 millóns de euros entre os anos 2002 e 2006" **0'25 puntos.**
- Tamén se pode contestar a este apartado buscando as interseccións da recta $y = 18$ coa gráfica da función $f(x)$.



Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Sábase que $P(B/A) = 0'7$, $P(A/B) = 0'4$ e $P(A) = 0'2$

(a) **1 punto.** Calcula $P(A \cap B)$ e $P(B)$. Xustifica se son independentes ou non os sucesos A e B.

- Formular a probabilidade condicionada $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ **0'25 puntos.**
- Calcular a probabilidade da intersección dos sucesos $P(A \cap B) = 0'7 \cdot 0'2 = 0'14$ **0'25 puntos.**
- Calcular a probabilidade do suceso B, $P(A/B) = 0'4 = \frac{0'14}{P(B)} \Rightarrow P(B) = 0'35$ **0'25 puntos.**
- Xustificar que A e B non son independentes, por exemplo, coa definición: $P(A/B) \neq P(A)$ **0'25 puntos.**

Exemplos de resposta / Solucións

(b) **1 punto.** Calcula $P(A \cup \bar{B})$, onde \bar{B} representa o suceso complementario ou contrario de B.

- Formular a probabilidade da unión $P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B})$ **0'25 puntos.**
- Expresión na fórmula anterior da probabilidade do suceso contrario e da intersección de sucesos dependentes

$$P(A \cup \bar{B}) = 0'2 + 0'65 - P(A) \cdot P(\bar{B}/A) = 0'85 - 0'2 \cdot (1 - 0'7) \quad \mathbf{0'50 \text{ puntos.}}$$

- Resultado $P(A \cup \bar{B}) = 0'79$ **0'25 puntos.**

Pódese responder coa táboa, pero para iso é necesario ter os resultados do apartado (a) para poder completala, repartíndose os puntos: **0'50** pola táboa + **0'25** por formular a unión + **0'25** resultado final.

	B	\bar{B}	
A	14	6	20
\bar{A}	21	59	80
	35	65	100

Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Nun estudo sociolóxico afirmábase que o tempo medio que os mozos están conectados á Rede non supera as 60 horas mensuais. Deséxase contrastar se actualmente segue en vigor ese estudo e, para iso, entérvanse 400 mozos seleccionados ao azar e obtense que o tempo medio é de 62 horas. Supoñemos que o tempo dedicado polos mozos a conectarse á Rede segue unha distribución normal, de desviación típica 15 horas mensuais.

Sexan:

"X = tempo, en horas/mes, que un mozo está conectado á Rede no momento actual"
 $X \sim N(\mu, \sigma = 15h / \text{mes})$.

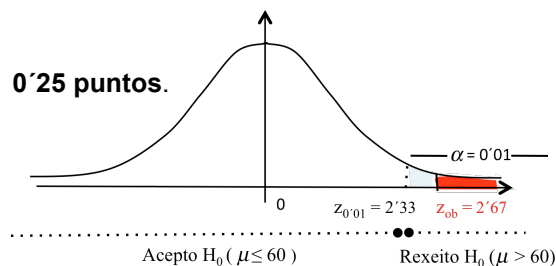
\bar{X} : media mostral \equiv tempo medio que un mozo está conectado á Rede (no momento actual),
 en mostras de 400 mozos $\xrightarrow{\text{valor particular para a mostra dada}}$ $\bar{x} = 62 \text{ horas / mes}$

(a) **1'25 puntos.** Formula un test para contrastar a hipótese de que o tempo medio mensual dedicado actualmente polos mozos a conectarse á Rede e o que afirma o estudo, fronte á alternativa de que aumentou. ¿A que conclusión se chega, cun 1% de nivel de significación?

- Especificar as hipóteses nula e alternativa: $\begin{cases} H_0 : \mu \leq 60 \\ H_1 : \mu > 60 \end{cases}$ **0'25 puntos.**

- Estatístico de proba: $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

- Establecer a rexión crítica: $(2'33, \infty)$ **0'25 puntos.**



- Avaliar o estatístico de proba, "baixo a hipótese H_0 certa", para a mostra dada: $z_{ob} = \frac{62 - 60}{15/\sqrt{400}} \cong 2'67$

0'25 puntos.

- Decisión: $z_{ob} = 2'67 \in (2'33, \infty) \Rightarrow$ Rexeito H_0 **0'25 puntos.**
- Conclusión: Cos datos desta mostra e con risco de equivocarnos dun 1%, concluíramos que o tempo medio mensual que dedican os mozos, actualmente, a conectarse á Rede, aumentou **0'25 puntos.**

(b) **0'75 puntos.** Usando a información recollida na mostra, calcula o intervalo do 95% de confianza para o tempo medio mensual dedicado actualmente pola poboación de mozos a conectarse á Rede.

- Calcular numéricamente os extremos do intervalo 60'53 e 63'47 **0'50 puntos**
- Responder á pregunta no contexto do problema:
 "En base á mostra dada, estímase cun 95% de confianza, que a media de horas mensuais que os mozos dedican actualmente a conectarse á Rede, está entre 60'53 horas e 63'47 horas" **0'25 puntos.**