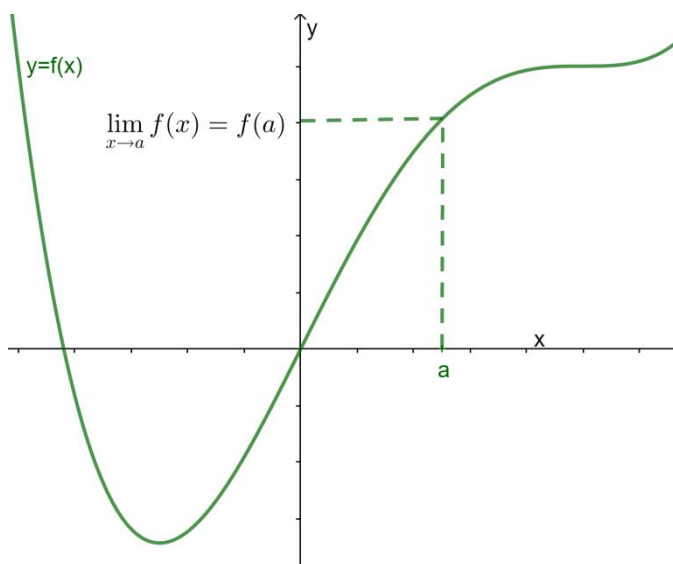


1.3 CONTINUIDADE

CONTINUIDADE

Definición: Unha función $y=f(x)$ é continua en $x=a$ se:

- a) Existe $f(a)$
- b) Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e é finito
- c) $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$



Exercicio:

7. Demostrar que a seguinte función é continua en $x=2$ pero non é continua en $x=0$, nin en $x=1$: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x}$.

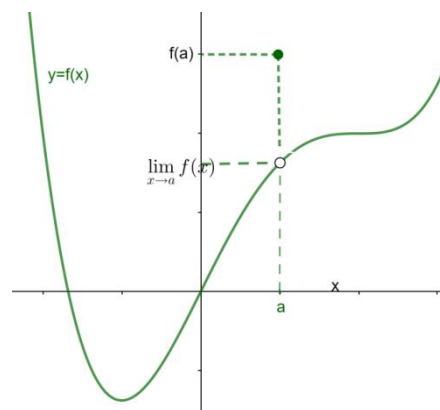
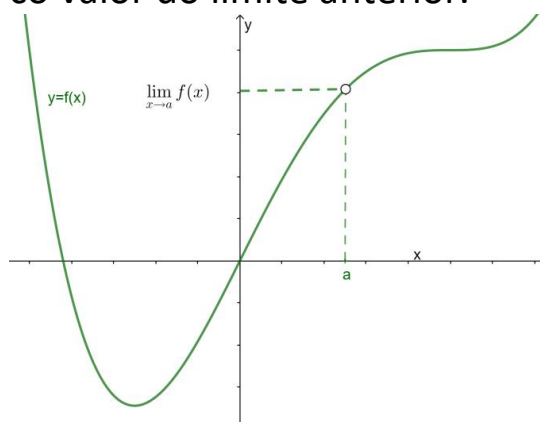
8. Demostrar que a seguinte función é continua en $x=3$ pero

non é continua en $x=1$: $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ 2x-3 & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ x^2-6 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

TIPOS DE DESCONTINUIDADES

EVITABLE

Unha función é descontinua evitable en $x=a$ cando existe e é finito $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, pero non existe $f(a)$, ou existe pero non coincide co valor do límite anterior.

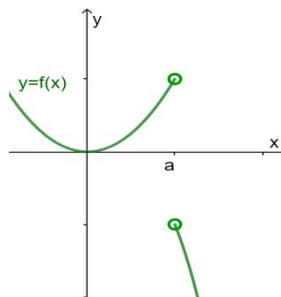


$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ pero non existe } f(a) \quad \text{ou} \quad \exists f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

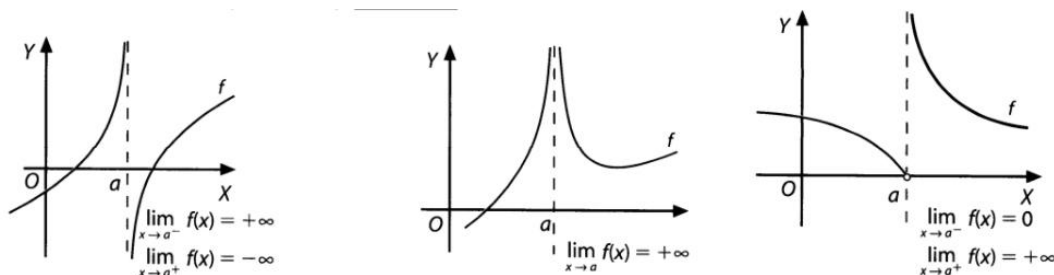
INEVITABLE

Unha función é descontinua inevitable en $x = a$ cando non existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Podemos distinguir varios casos:

Inevitable de salto finito, cando existen e son finitos os límites laterais pero son distintos (polo tanto non existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$).



Inevitable de salto infinito, cando algún dos límites laterais é ∞ ou $-\infty$.



CONTINUIDADE NUN INTERVALO

Definición:

Unha función $y = f(x)$ é continua nun intervalo pechado $[a, b]$ se, se cumpren as seguintes condicións :

- A función é continua no intervalo aberto (a, b) .
- A función é continua pola dereita en $x = a$.
- A función é continua pola esquerda en $x = b$.

PROPIEDADES

Dadas $y = f(x)$, $y = g(x)$ funcións continuas en $x = a$, entón:

- A función $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ é continua en $x = a$.
- A función $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ é continua en $x = a$.
- A función $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ continua en $x = a$ sempre que $g(a) \neq 0$.

As funcións elementais son continuas no seu dominio.

Exercicios:

9. Estuda a continuidade das seguintes funcións:

$$a) f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & , x < 1 \\ 3x^2 - 12x + 9 & , 1 < x \leq 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & , x > 3 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & , x \neq 5 \\ 0 & , x = 5 \end{cases} .$$

10. Estuda a continuidade e representa:

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x & , x \neq 1 \\ 2 & , x = 1 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x & , x \leq 1 \\ x & , x > 1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & , x < -1 \\ \frac{1}{2}x + 1 & , x \geq -1 \end{cases}$$

11. Calcular a e b para que a seguinte función sexa continua en todo R:

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{se } x \leq -1 \\ b & \text{se } -1 < x < 3 \\ 2x + 4 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

12. Indica o valor ou valores de a, se é que existen, para que

$$a) \text{ función: } f(x) = \begin{cases} ax + a & , x \leq -2 \\ \frac{x}{x+4} & , x > -2 \end{cases}$$

a) Sexa continua en $x = -2$.

b) Presente unha discontinuidade inevitable en $x = -2$ de salto finito.

TEOREMA DE BOLZANO

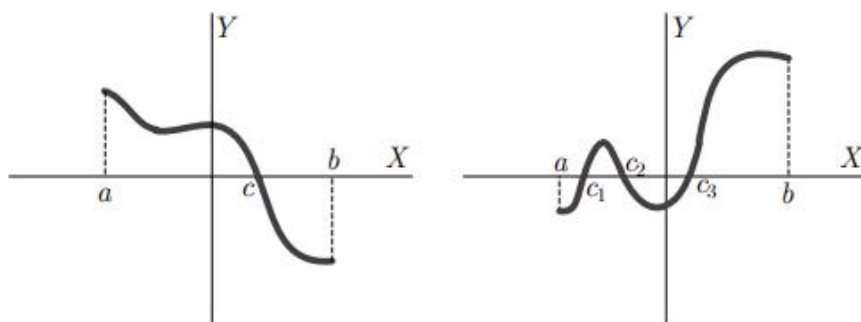
Teorema de Bolzano: Se $y = f(x)$ é unha función continua nun intervalo pechado $[a, b]$, e toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo entón existe polo menos un valor c comprendido entre a e b , tal que $f(c) = 0$.

$$y = f(x) \text{ continua en } [a, b] \left. \vphantom{y = f(x)} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f(c) = 0$$

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

Interpretación xeométrica:

O teorema de Bolzano afirma que toda función nun intervalo pechado $[a, b]$ corta ao eixe de abscisas polo menos unha vez no intervalo aberto (a, b) .

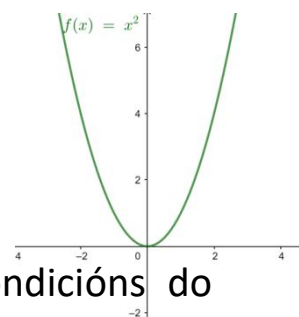


$$f(c) = 0$$

$$f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$$

Observacións:

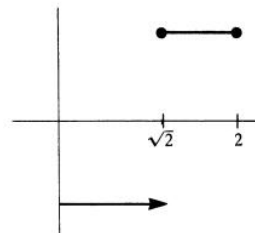
- a) O punto non ten por que ser único.
- b) A condición é suficiente non necesaria. Exemplo:



A función anúlase no cero e non cumpre as condicións do teorema.

d) Se a función non é continua, entón non cumpre unha das hipóteses do teorema polo tanto non ten por que cumprirse:
Exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ 1, & \sqrt{2} \leq x \leq 2. \end{cases}$$



Consecuencias: Utilizaremos este teorema para calcular os puntos de corte no eixe X de funcións, para acotar solucións de ecuacións.

Exercicios:

13. Comproba que as seguintes funcións cortan ao eixe X, e en cada caso, establece un intervalo aberto onde estea incluído o punto de corte:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7$ b) $f(x) = 2x - \cos x$

Exercicios do libro de Continuidade e Bolzano

Traballo de clase do xoves 15 de outubro:

Páxina 234 números 16, 17a), 18.

Páxina 235 números 25, 26, 27.

Deberes para o venres 16 de outubro:

Páxina 235 números 32, 35, 40, 44.

A profesora na clase do venres explicará:

Páxina 235 números 33, 39.

Páxina 236 números 42, 43, 48.