BOLETÍN: FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

✏️ Actividades de dominio de funciones, composición de funciones y recíprocas

1. Calcula el **dominio** de las siguientes **funciones**:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+x-6}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{2x^4-3}$

d) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^3}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+11}}{(x-1)(x-3)}$

f) $f(x) = \ln(1-x)$

g) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-x}$

h) $f(x) = \log\left(x^2-1\right)$

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

2. Calcula el **dominio** de $(f \circ g)(x)$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ y $g(x) = \dfrac{2}{x-3}$. Además, calcula $f^{-1}(x)$, su dominio y compruébalo.

b) $f(x) = \dfrac{1+2x}{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Además, calcula $f^{-1}(x)$, su dominio y compruébalo.

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$. Además, calcula $g^{-1}(x)$, su dominio y compruébalo.

✏️ Actividades de cálculo de límites e indeterminaciones

3. Calcula los siguientes **límites** en los **puntos** que se indican:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-3}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{x^2-25}{x-5}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2-2}-2x\right)$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^4-5x^3-2\right)$

g) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^3-2x+1}}{\sqrt{x-1}}$

h) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+3}}{2x+5}$

j) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3-6x^2+3x+10}{x^3-4x}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2-2x-5}-x}{2x-3}$

l) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^5+3x^2-2x}{x+x^2+x^4}$

m) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x-1}-1}$

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-x^2}{4x^2+2x-1}$

o) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-x^5+3x^2-1\right)$

p) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^4+5x^3+4x^2}{x^2-2x-3}$

4. Calcula los siguientes **límites** en los **puntos** que se indican:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x^2-1}$

b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

c) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2x+3}{1+x}\right)^{x+1}$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4+2x}{3x+1}\right)^{x^2+1}$

e) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{2+x^2}\right)^{\frac{x+1}{2x}}$

f) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{\frac{2x^2}{5+x}}$

g) $\lim_{x\to 2}\left(2x+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

h) $\lim_{x\to -2}\left(\frac{2x+2}{2x}\right)^{\frac{-1}{x+2}}$

i) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2-x}{3x^2+1}\right)^{2x+1}$

✏️ **Actividades de asíntotas**

5. Calcula las **asíntotas** de las siguientes **funciones**:

a) $y=\frac{x^2+1}{x^2-4}$

b) $y=\frac{x^2}{2x+4}$

c) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x-3}$

d) $y=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$

e) $y=\frac{x}{x^2-3}$

f) $y=\frac{1}{x^2+1}$

g) $y=\sqrt{25-x^2}$

h) $f(x)=\frac{3x^2+5}{x-2}$

i) $f(x)=\frac{x^2}{x-5}$

✏️ **Actividades de funciones recíprocas**

6. Estudia el **dominio**, **puntos** de **corte** con los **ejes** y la correspondencia inversa (**recíproca**) de las siguientes **funciones**:

a) $y=3x-2$

b) $y=\frac{2}{x-1}$

c) $y=\frac{2x+1}{x-5}$

d) $y=\sqrt{x}$

e) $f(x)=\frac{3x}{x-4}$

f) $y=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

✏️ Actividades de continuidad en funciones a trozos

7. **Estudia** para las siguientes **funciones** el **dominio** y la **continuidad**:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } -4 \le x \le 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{x+6}{2} & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \\ x^2-7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+2} & \text{si } x \le 1 \\ -x+5 & \text{si } 1 < x \le 4 \\ \dfrac{1}{x-4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \le 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } 1 < x \le 4 \\ 2x-2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -x^2+2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{si } 3 < x \le 5 \\ x+1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } -2 < x \le 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{2x}{x-3} & \text{si } 2 \le x < 4 \\ 5 & \text{si } x = 4 \\ x^2-8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

BOLETÍN: FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD (con parámetros y problemas)

✏️ Actividades de dominio y cálculo de límites con parámetros

8. Halla los valores del **parámetro** a , para que $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + ax + 1}$ tenga como dominio todo $\mathbb{R}$.

9. Calcula los valores de a para que se cumpla: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(ax - x)(2 + ax)}{3x^2 + 1} = 2$

10. Calcula el parámetro a en el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right) = 2$

11. Calcula a de modo que: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + a \cdot x - 3} - 2x\right) = -\dfrac{1}{4}$

✏️ Actividades de continuidad en funciones a trozos con parámetros

12. Calcula el valor de $m \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} & \text{si } x < 2 \\ 3x + m & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

13. Calcula los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ b \cdot x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

14. Halla, si es posible, los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$. Indica si hay algún punto donde no pueda ser nunca continua:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} & \text{si } 1 < x < 2 \\ x^2 + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

15. Estudia la continuidad de la función $f(x)$ en función del parámetro k:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x \neq 1 \text{ y } x \neq 2 \\ 2k + 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

16. Halla los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + a - 1 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{2x^2 + 2x}{x^2 - 3x} & \text{si } 0 < x < 2 \\ b \cdot x^2 - 2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

17. Halla los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} & \text{si } 2 < x < 4 \\ x + 19 \cdot b & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

18. Estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 0$ para los distintos valores del parámetro a.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{a + 3x}{x^2 - 4x + 3} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

✏️ **Problemas literales de continuidad en funciones a trozos**

19. El servicio de traumatología de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera. Se prevé que a partir de ahora, la siguiente función indicará en cada momento (t, medido meses) el porcentaje de pacientes que podrá ser operado sin necesidad de entrar en lista de espera:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{si } 0 \le t \le 10 \\ \dfrac{38t - 100}{0{,}4t} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

   a) Confirma que dicha función es continua y que, por tanto, no presenta un salto en $t = 10$.

   b) ¿Qué porcentaje se alcanzará a largo plazo? es decir, por mucho tiempo que pase, ¿a qué porcentaje no se llegará nunca?

20. El estudio de rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de euros produce una ganancia de $G(x)$ millones de euros, siendo:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{5} + x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ \dfrac{50x - 100}{2x + 5} & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

a) ¿Es la ganancia $G(x)$ una función continua de la inversión?

b) ¿Qué rentabilidad obtendremos si la inversión se incrementa indefinidamente?

21. Según cierta teoría médica, el peligro (sin unidades) de un virus se mide en función del tiempo que lleva en el organismo mediante la siguiente expresión, donde $P(t)$ es para un tiempo de t minutos:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ \dfrac{50t - 62{,}5}{0{,}5t + 5} & \text{si } t > 5 \end{cases}$$

a) ¿Es el peligro $P(t)$ una función continua del tiempo?

b) ¿Qué peligrosidad tiene el virus a largo plazo?

22. El peso que una plancha de cierto material es capaz de soportar depende de la edad de la misma según la siguiente función (el peso $P(t)$ en toneladas; t representa la edad en años de la plancha):

$$P(t) = \begin{cases} 50 - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 56 - \dfrac{20t}{t+1} & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

a) ¿Es el peso $P(t)$ una función continua de la edad?

b) ¿Qué peso aguantará a largo plazo?