1 Determina las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones matricial:

$$3A-2B=\begin{pmatrix}-8 & 7 & -1\\ 9 & -18 & 1\\ 14 & 9 & -14\end{pmatrix} \qquad 2A+B=\begin{pmatrix}11 & 7 & 4\\ -8 & 2 & 17\\ 14 & -1 & -14\end{pmatrix}$$

Solución.

2 Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$A^{-1}\cdot X=C\cdot D \quad ; \quad E\cdot X+Y\cdot B=D$$

siendo $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}0 & -2\end{pmatrix}$

Solución.

3 Las matrices X e Y son las soluciones del sistema de ecuaciones matriciales:

$2X-Y=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 9 & -2\end{pmatrix}$ $\quad X+3Y=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & 6\end{pmatrix}$. Halla X e Y, y calcula, si tiene sentido, X^{-1} e Y^{-1}

Solución.

4 Calcula las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema:

$$3X-2Y=\begin{pmatrix}-2 & 7 & 0\\ -13 & -3 & 11\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix} \qquad -2X+5Y=\begin{pmatrix}5 & -12 & 11\\ 27 & 2 & -11\\ 11 & 5 & -2\end{pmatrix}$$

Solución.

5 Sean A y B dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ se pide:

Calcular A^2-B^2 (advertencia: en este caso $A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$.)

Solución.

1 Determina las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones matricial:

$$3A-2B=\begin{pmatrix}-8 & 7 & -1\\ 9 & -18 & 1\\ 14 & 9 & -14\end{pmatrix} \qquad 2A+B=\begin{pmatrix}11 & 7 & 4\\ -8 & 2 & 17\\ 14 & -1 & -14\end{pmatrix}$$

Solución.

Resolveremos el sistema por reducción:

$$3A-2B=\begin{pmatrix}-8 & 7 & -1\\ 9 & -18 & 1\\ 14 & 9 & -14\end{pmatrix} \longrightarrow 3A-2B=\begin{pmatrix}-8 & 7 & -1\\ 9 & -18 & 1\\ 14 & 9 & -14\end{pmatrix}$$

Sumamos

$$2A+B=\begin{pmatrix}11 & 7 & 4\\ -8 & 2 & 17\\ 14 & -1 & -14\end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 2} 4A+2B=\begin{pmatrix}22 & 14 & 8\\ -16 & 4 & 34\\ 28 & -2 & -28\end{pmatrix}$$

$$7A=\begin{pmatrix}14 & 21 & 7\\ -7 & -14 & 35\\ 42 & 7 & -42\end{pmatrix} \to A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}14 & 21 & 7\\ -7 & -14 & 35\\ 42 & 7 & -42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & -2 & 5\\ 6 & 1 & -6\end{pmatrix}$$

Despejamos B en la segunda ecuación:

$$2A+B=\begin{pmatrix}22 & 14 & 8\\ -16 & 4 & 34\\ 28 & -2 & -28\end{pmatrix} \to B=\begin{pmatrix}22 & 14 & 8\\ -16 & 4 & 34\\ 28 & -2 & -28\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 6 & 2\\ -2 & -4 & 10\\ 12 & 2 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 1 & 2\\ -6 & 6 & 7\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

2 Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$A^{-1}\cdot X = C\cdot D \quad ; \quad E\cdot X + Y\cdot B = D$$

siendo $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}0 & -2\end{pmatrix}$

Solución.

En la primera ecuación podemos despejar X:

$$A^{-1}\cdot X = C\cdot D \;\rightarrow\; X = A\cdot C\cdot D$$

Cálculo de A·C:

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X = A\cdot C\cdot D=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

Ahora despejamos Y en la segunda ecuación:

$$E\cdot X + Y\cdot B = D \;\rightarrow\; Y\cdot B = D - E\cdot X \;\rightarrow\; Y=(D-E\cdot X)\cdot B^{-1}$$

Cálculo de B^{-1}:

$$B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\cdot(\mathrm{Adj}(B))^t=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}^t=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 2 & 3/2\end{pmatrix}$$

Cálculo de D - E·X

$$D-E\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}$$

Cálculo de Y:

$$Y=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 2 & 3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -5/2\end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

3 Las matrices X e Y son las soluciones del sistema de ecuaciones matriciales:

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \qquad X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

. Halla X e Y, y calcula, si tiene sentido, X^{-1} e Y^{-1}

Solución.

Resolveremos el sistema por reducción:

$$\left.\begin{array}{l} 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot(-2)} -2X - 6Y = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -2 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\right. \quad \boxed{\text{Sumamos}}$$

$$-7Y = \begin{pmatrix} -7 & 14 \\ 7 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -7 & 14 \\ 7 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si sustituimos en la segunda ecuación podemos despejar X:

$$X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow X + \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Inversa de X:

$$X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} \cdot [Adj(X)]^t = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/3 & -1/12 \end{pmatrix}$$

Inversa de Y:

No tiene inversa puesto que $\det(Y) = 0$

Volver a los enunciados

4 Calcula las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema:

$$3X-2Y=\begin{pmatrix}-2&7&0\\-13&-3&11\\0&-2&3\end{pmatrix}\qquad -2X+5Y=\begin{pmatrix}5&-12&11\\27&2&-11\\11&5&-2\end{pmatrix}$$

Solución.

Resolveremos el sistema por reducción:

$$3X-2Y=\begin{pmatrix}-2&7&0\\-13&-3&11\\0&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\cdot 2}6X-4Y=\begin{pmatrix}-4&14&0\\-26&-6&22\\0&-4&6\end{pmatrix}$$

Sumamos

$$-2X+5Y=\begin{pmatrix}5&-12&11\\27&2&-11\\11&5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\cdot 3}-6X+15Y=\begin{pmatrix}15&-36&33\\81&6&-33\\33&15&-6\end{pmatrix}$$

$$11Y=\begin{pmatrix}11&-22&33\\55&0&-11\\33&11&0\end{pmatrix}\rightarrow Y=\begin{pmatrix}1&-2&3\\5&0&-1\\3&1&0\end{pmatrix}$$

Para averiguar el valor de X podemos despejarla en una de las dos ecuaciones o aplicar también reducción .Veremos cómo se hace de esta última forma:

$$3X-2Y=\begin{pmatrix}-2&7&0\\-13&-3&11\\0&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\cdot 5}15X-10Y=\begin{pmatrix}-10&35&0\\-65&-15&55\\0&-10&15\end{pmatrix}$$

$$-2X+5Y=\begin{pmatrix}5&-12&11\\27&2&-11\\11&5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\cdot 2}-4X+10Y=\begin{pmatrix}10&-24&22\\54&4&-22\\22&10&-4\end{pmatrix}$$

$$11X=\begin{pmatrix}0&11&22\\-11&-11&33\\22&0&11\end{pmatrix}\rightarrow X=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&-1&3\\2&0&1\end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

5 Sean A y B dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}$ $A-B=\begin{pmatrix}0&-4\\4&-2\end{pmatrix}$ se pide:

Calcular A^2-B^2 (advertencia: en este caso $A^2-B^2\neq(A+B)(A-B)$.)

Solución.

Comenzaremos calculando A y B resolviendo el sistema matricial por reducción:

$$A+B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}$$
$$A-B=\begin{pmatrix}0&-4\\4&-2\end{pmatrix}$$

Sumamos

$$2A=\begin{pmatrix}2&0\\4&-2\end{pmatrix}\to A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz B despejándola en la primera ecuación:

$$A+B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}\to B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}-A=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\-2&1\end{pmatrix}$$

Ahora calcularemos A^2, B^2 y para finalizar la resta:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}1&4\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&8\\-4&-7\end{pmatrix}$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7&8\\-4&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-8\\4&8\end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados