1 Determine la matriz X de dimensión 2 x 2 tal que:

$$X\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

Solución.

2 Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Resuelve la ecuación $XAB-XC=2C$.

Solución.

3 Resolver matricialmente la ecuación $A^tX-B=0$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

y donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución.

4 Resolver la ecuación matricial $AX=BX+C$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$$

Solución.

5 Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

a) Calcular A^2. b) Resolver la ecuación matricial $A^2X+AB=B$.

Solución.

6 Resolver la ecuación matricial $AX+X=B$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Solución.

7 Hallar la matriz X que satisfaga la ecuación $AXB=C$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2&1\\-1&3\end{pmatrix}$$

Solución.

8 Resuelve la ecuación matricial $A=XB$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-3&0&-1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Solución.

9 Resuelve la ecuación matricial $AXA + AB = A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

10 Hallar la matriz X que satisface la ecuación matricial $AX = X + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución.

11 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz inversa de A.

b) Utilízala para resolver la ecuación $AX = B$.

Solución.

12 Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $AX - BB^t = -X$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $XA + 2X = B + C$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 13 & 24 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$

c) $AXC = B$ donde $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A^{-1}X = C + B$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

Solución.

13 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula $A - 2I$ siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Calcula la matriz X que cumple $AX = 2X + B^t$.

Solución.

14 Despeja X en la siguiente ecuación y resuélvela $AX^{-1} + B = C^t$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución.

1 Determine la matriz X de dimensión 2 x 2 tal que:

$$X\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

Solución.

La expresión puede ser reescrita:

$$XA-2B=C$$

Si despejamos X tenemos:

$$XA-2B=C \quad \rightarrow \quad XA=C+2B \quad \rightarrow \quad X=(C+2B)\cdot A^{-1}$$

Cálculo de A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot(\mathrm{Adj}(A))^t=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}^t=-1\cdot\begin{pmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Cálculo de C + 2B:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X=(C+2B)\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -23 & 14\end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

2 Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Resuelve la ecuación $XAB-XC=2C$.

Solución.

Si despejamos X tenemos:

$$XAB-XC=2C \quad\rightarrow\quad X(AB-C)=2C \quad\rightarrow\quad X=2C\cdot(AB-C)^{-1}$$

Cálculo de AB - C:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}$$

Cálculo de $(AB - C)^{-1}$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(AB-C)}\cdot(Adj(AB-C))^{t}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}4 & -4\\ -2 & 4\end{pmatrix}^{t}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/4\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X=2C\cdot(AB-C)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2 & -1/4\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 5/2\end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

3 Resolver matricialmente la ecuación $A^tX - B = 0$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución.

Despejamos X en la ecuación:

$$A^tX - B = 0 \;\rightarrow\; A^tX = B \;\rightarrow\; X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot B$$

Cálculo de $(A^t)^{-1}$:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \left(A^t\right)^{-1} = \frac{1}{\det(A^t)} \cdot \left(Adj(A^t)\right)^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot B \;\rightarrow\; X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

4 Resolver la ecuación matricial $AX = BX + C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

Despejamos X en la ecuación:

$$AX = BX + C \;\rightarrow\; AX - BX = C \;\rightarrow\; (A - B)X = C \;\rightarrow\; X = (A - B)^{-1} \cdot C$$

Cálculo de $(A - B)^{-1}$:

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{\det(A - B)} \cdot (\mathrm{Adj}(A - B))^t = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = -1 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X = (A - B)^{-1} \cdot C \quad \rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

5 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular A^2. b) Resolver la ecuación matricial $A^2X + AB = B$.

Solución.

a) Cálculo de A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

b) Al resultar A^2 la matriz identidad, la ecuación se hace más sencilla:

$$A^2X + AB = B \quad \rightarrow \quad I \cdot X + AB = B \quad \rightarrow \quad X + AB = B \quad \rightarrow \quad X = B - AB$$

Cálculo de A·B:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X = B - AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

6 Resolver la ecuación matricial $AX + X = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

Despejamos X en la ecuación:

$$AX + X = B \;\rightarrow\; (A+I)X = B \;\rightarrow\; X = (A+I)^{-1} \cdot B$$

Cálculo de $(A + I)^{-1}$:

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A+I)^{-1} = \frac{1}{\det(A+I)} \cdot (\mathrm{Adj}(A+I))^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X = (A+I)^{-1} \cdot B \;\rightarrow\; X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

7 Hallar la matriz X que satisfaga la ecuación $AXB = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución.

Despejamos X en la ecuación:

$$AXB = C \;\rightarrow\; XB = A^{-1}C \;\rightarrow\; X = A^{-1}CB^{-1}$$

Cálculo de A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (Adj(A))^t = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de B^{-1}:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot (Adj(B))^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X = A^{-1}CB^{-1} \;\rightarrow\; X = \frac{1}{5} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

8 Resuelve la ecuación matricial $A = XB$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

Despejamos X en la ecuación:

$$A = XB \quad \rightarrow \quad AB^{-1} = X$$

Cálculo de B^{-1}:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot (\mathrm{Adj}(B))^t = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

9 Resuelve la ecuación matricial $AXA + AB = A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

Despejamos X en la ecuación:

Multiplicamos A^{-1} por cada término dentro del paréntesis.

Recuerda que $A^{-1} \cdot A = I$

$$AXA + AB = A^2 \quad \to \quad AXA = A^2 - AB \quad \to \quad X = A^{-1} \cdot \left(A^2 - AB\right) \cdot A^{-1} = \left(A^{-1}AA - A^{-1}AB\right) \cdot A^{-1} =$$

$$= (A - B) \cdot A^{-1}$$

Cálculo de A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (Adj(A))^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de A - B:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X = (A - B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

10 Hallar la matriz X que satisface la ecuación matricial $AX = X + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución.

Despejamos X en la ecuación:

$$AX = X + B \rightarrow AX - X = B \rightarrow (A - I)X = B \rightarrow X = (A - I)^{-1}B$$

Cálculo de $(A - I)^{-1}$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad (A - I)^{-1} = \frac{1}{\det(A - I)} \cdot (Adj(A - I))^t = \frac{1}{-6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X = (A - I)^{-1}B = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

11 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz inversa de A.

b) Utilízala para resolver la ecuación $AX = B$.

Solución.

a) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot (\mathrm{Adj}(A))^t = \dfrac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}^t = \dfrac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $AX = B \rightarrow X = A^{-1}B \rightarrow X = \dfrac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Volver a los enunciados

12 Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $AX - BB^t = -X$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $XA + 2X = B + C$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 13 & 24 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$

c) $AXC = B$ donde $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A^{-1}X = C + B$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

Solución.

a) $AX - BB^t = -X \;\rightarrow\; AX + X = BB^t \;\rightarrow\; AX + X = BB^t \;\rightarrow\; (A+I)X = BB^t \;\rightarrow\; X = (A+I)^{-1}BB^t$

Cálculo de $(A + I)^{-1}$:

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A+I)^{-1} = \frac{1}{\det(A+I)} \cdot \left(Adj(A+I)\right)^t = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X = (A+I)^{-1}BB^t = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 & 12 & -16 \\ 8 & -4 & -12 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 132 & 52 & -8 \\ 44 & 24 & -32 \\ 8 & 0 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{33}{2} & \frac{13}{2} & -1 \\ \frac{11}{2} & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $XA+2X=B+C \rightarrow X(A+2I)=B+C \rightarrow X=(B+C)\cdot(A+2I)^{-1}$

Cálculo de $(A + 2I)^{-1}$:

$$A+2I=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix} \qquad (A+2I)^{-1}=\frac{1}{\det(A+2I)}\cdot(\text{Adj}(A+2I))^t=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}^t=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

Cálculo de B + C:

$$B+C=\begin{pmatrix}-8 & 6\\ 13 & 24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -4\\ -9 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ 4 & 12\end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X=(B+C)\cdot(A+2I)^{-1}=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ 4 & 12\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-28 & 12\\ -8 & 32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-14}{5} & \frac{6}{5}\\ \frac{-4}{5} & \frac{16}{5}\end{pmatrix}$$

c) $AXC=B \rightarrow X=A^{-1}BC^{-1}$

Cálculo de A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot(\text{Adj}(A))^t=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}-6 & -5\\ -4 & -3\end{pmatrix}^t=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}-6 & -4\\ -5 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}$$

Cálculo de C^{-1}:

$$C^{-1}=\frac{1}{\det(C)}\cdot(\text{Adj}(C))^t=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}^t=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X=A^{-1}BC^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ 10 & -8\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}52 & -2\\ 40 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}150 & -2\\ 123 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & \frac{-1}{3}\\ \frac{41}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

d) $A^{-1}X = C + B \rightarrow X = A \cdot (C + B)$

Cálculo de C + B:

$$C + B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X = A \cdot (C + B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -12 \\ 10 & 9 & -10 \\ 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

13 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-7&4&0\\-4&6&1\end{pmatrix}$.

a) Calcula $A-2I$ siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Calcula la matriz X que cumple $AX=2X+B^t$.

Solución.

a) $A-2I=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&-3&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$

b) $AX=2X+B^t \ \rightarrow\ AX-2X=B^t \ \rightarrow\ (A-2I)X=B^t \ \rightarrow\ X=(A-2I)^{-1}\cdot B^t$

- Cálculo de $(A-2I)^{-1}$

$$(A-2I)^{-1}=\frac{1}{\det(A-2I)}\cdot[Adj(A-2I)]^t=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&4\\6&2&3\end{pmatrix}^t=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&3&6\\2&1&2\\3&4&3\end{pmatrix}$$

- Cálculo de $X=(A-2I)^{-1}\cdot B^t$

$$X=(A-2I)^{-1}\cdot B^t=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&3&6\\2&1&2\\3&4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7&-4\\4&6\\0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&20\\-10&0\\-5&15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\-2&0\\-1&3\end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados

14 Despeja X en la siguiente ecuación y resuélvela $AX^{-1}+B=C^t$ donde:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

Solución.

$$AX^{-1}+B=C^t \;\rightarrow\; AX^{-1}=C^t-B \;\rightarrow\; A=\left(C^t-B\right)\cdot X \;\rightarrow\; \left(C^t-B\right)^{-1}\cdot A=X$$

Cálculo de C^t-B:

$$C^t-B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -4 & -2\end{pmatrix}$$

Cálculo de $\left(C^t-B\right)^{-1}$:

$$\left(C^t-B\right)^{-1}=\frac{1}{\det\left(C^t-B\right)}\cdot\left[Adj\left(C^t-B\right)\right]^t=\frac{1}{-10}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}^t=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X=\left(C^t-B\right)^{-1}\cdot A=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-7 & -12 & 5\\ -1 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-7}{10} & \frac{-6}{5} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Volver a los enunciados