MATEMÁTICAS APLICADAS

A LAS CC.SS. I

CONTENIDOS

UNIDAD 1.
NÚMEROS REALES.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. 1º BAC
PROFESOR: PABLO TRASHORRAS

UNIDAD 1. NÚMEROS REALES.

1.2. NÚMEROS REALES. LA RECTA REAL.

- Números naturales: Es el conjunto más pequeño que vamos a considerar.

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

- Enteros: Los números naturales y sus opuestos.

$$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3\ldots\}$$

- Números racionales: (Q) Todos aquellos números que se pueden escribir como cociente de dos enteros.

Podemos considerar:

- Naturales: $\frac{5}{1}$
- Enteros: $\frac{-8}{1}$
- Decimales exactos: $12{,}31 = \frac{1231}{100}$
- Decimales períodicos puros: $9{,}\widehat{2} = \frac{92-9}{9} = \frac{83}{9}$
- Decimales períodicos mixtos: $2{,}2\widehat{34} = \frac{2234-22}{990} = \frac{2212}{990}$

- Números irracionales: Son aquellos números que no pueden ser escritos como cociente de dos enteros.
  - Las raíces que no son exactas son irracionales.

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{5}$$

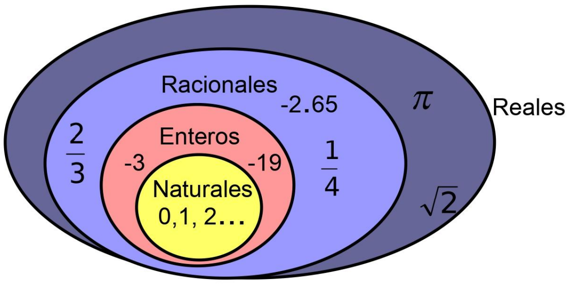
  - Los decimales que no son ni exactos ni periódicos son también irracionales.

$$3{,}020020002\ldots$$

  - Otros números como π o como $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ son irracionales también.

- Números reales: (R) Conjunto compuesto por los racionales y los irracionales.

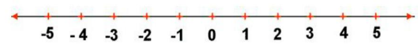
Todos los conjuntos que hemos visto están representados en este diagrama:



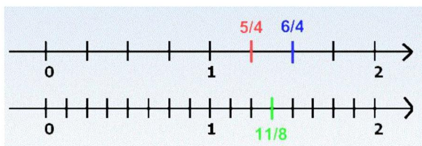
LA RECTA REAL.

Usaremos una recta horizontal para representar los números reales.

- **Enteros:**



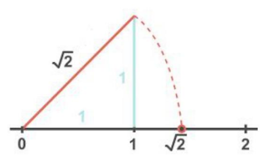
- **Fracciones:**



- **Raíces:**

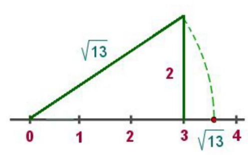
Ejemplo 1: $\sqrt{2}$

$$2 = 1+1 = 1^2 + 1^2$$



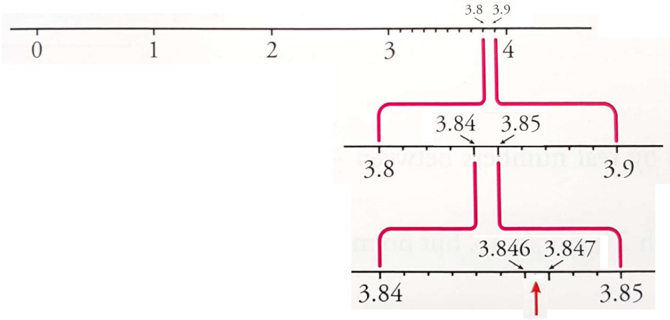
Ejemplo 2: $\sqrt{13}$

$$13 = 9+4 = 3^2 + 2^2$$



- **Decimales:**

Ejemplo: $\sqrt[5]{842} = 3.8464\ldots$



Ejercicios 1, 2, 3 y 4 pág 48

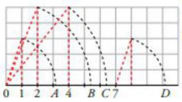
1 Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, pertenecen:

$5;\ -7;\ \frac{5}{4};\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ 4,\hat{7};\ \frac{\pi}{2}$

2 ¿Cuáles de estos números son irracionales? Expresa como fracción los que sea posible.

a) 3,181818… b) $\sqrt{1,\hat{7}}$ c) $\sqrt{8}$
d) 1,020020002… e) −4,0333… f) $\sqrt[3]{81}$
g) 1,3999… h) 2π

3 ¿Qué números irracionales representan los puntos: *A*, *B*, *C* y *D*? Justifica la respuesta.



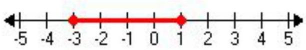
4 Indica cuál, de cada par de números, es mayor:

a) $\frac{140}{99}$ y $\sqrt{2}$ b) $0,52\hat{6}$ y $0,\widehat{526}$ c) $4,\widehat{89}$ y $2\sqrt{6}$ d) −2,098 y −2,1

Redondea a las centésimas los números anteriores.

INTERVALOS Y SEMIRRECTAS.

Un intervalo es un conjunto que comprende todos los números que están comprendidos entre otros dos llamados extremos.



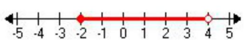
Escribiremos [-3,1] para representar el intervalo que contiene todos los números comprendidos entre -3 y 1.

Un intervalo se puede representar de tres maneras:

- En forma de intervalo:

(-3,1) [-2,4)

- En la recta real:



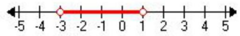
- Usando desigualdades:

$\{x / -3 < x < 1\}$ $\{x / -2 \le x < 4\}$

TIPOS DE INTERVALOS.

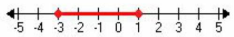
- Intervalo abierto: Este tipo de intervalo no incluye los extremos.

$(-3,1) = \{x / -3 < x < 1\}$



- Intervalo cerrado: Incluye los dos extremos.

$[-3,1] = \{x / -3 \le x \le 1\}$



- Intervalo semiabierto: Contiene sólo uno de los extremos.

$[-3,1) = \{x / -3 \le x < 1\}$

- Semirrecta: Sólo tiene comienzo o final.

$[-3,\infty) = \{x / x \ge -3\}$

$(-\infty,1) = \{x / x < 1\}$

OPERACIONES CON INTERVALOS.

- Unión de intervalos:
- Intersección de intervalos:

Ejercicios 5 y 6 pág 48

5 Representa gráficamente y expresa como intervalo o como semirrecta los números que cumplen la condición dada en cada caso.

a) *x* es menor que −5.
b) 3 es menor o igual que *x*.
c) *x* está comprendido entre −5 y 1.
d) *x* está entre −2 y 0, ambos incluidos.
e) *x* es mayor o igual que −3 y menor que 2.

6 Escribe la desigualdad que verifica todo número *x* que pertenece a estos intervalos o semirrectas:

a) [−2, 7] b) [13, +∞) c) (−∞, 0)
d) (−3, 0] e) [3/2, 6) f) (0, +∞)

Ejercicio.

Calcula las siguientes uniones e intersecciones de intervalos y semirrectas:

a) $[-1,3]\cup(0,4)$ **c)** $[-3,5]\cap(5,7)$ **e)** $(-\infty,0]\cup(-3,\infty)$

b) $[2,8]\cap(5,\infty)$ **d)** $[1,5)\cup(2,\infty)$ **f)** $(-\infty,5]\cap(-3,4)$

Ejercicios 7, 8 y 9 pág 48

7 Expresa en forma de intervalo los números que cumplen cada una de estas expresiones:

a) $|x| < 7$ b) $|x| \geq 5$ c) $|2x| < 8$

d) $|x-1| \leq 6$ e) $|x+2| > 9$ f) $|x-5| \geq 1$

8 Escribe mediante intervalos los posibles valores de x para que se pueda calcular la raíz en cada caso.

a) $\sqrt{x-4}$ b) $\sqrt{2x+1}$ c) $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3-2x}$ e) $\sqrt{-x-1}$ f) $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

9 Expresa como un único intervalo.

a) $(1, 6] \cup [2, 5)$ b) $[-1, 3) \cup (0, 3]$ c) $(1, 6] \cap [2, 7)$

d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$ e) $[-3, 2] \cap [0, 5]$ f) $[2, +\infty) \cap (0, 10)$

UNIDAD 1. NÚMEROS REALES.

1.3. RADICALES. PROPIEDADES.

La raíz n-ésima de un número ”x” es otro número ”y” que, al ser elevado a n es igual a “x”.

$$\sqrt[n]{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad y^n = x$$

Ejemplos.

a) $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$

b) $\sqrt[4]{81} = \pm 3$ porque $3^4 = 81$ y $(-3)^4 = 81$

Una raíz puede ser escrita como una potencia. Veremos como:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplos.

a) $\sqrt[3]{5^2}$ puede ser escrito $5^{\frac{2}{3}}$

b) $7^{\frac{8}{5}}$ puede ser escrito $\sqrt[5]{7^8}$

c) $2^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{2^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$

RAÍCES EQUIVALENTES SIMPLIFICACIÓN.

SACAR FACTORES DE UNA RAÍZ.

Un factor se puede sacar de un radical cuando su exponente es igual al índice de la raíz.

$$\sqrt[3]{2^3 \cdot 5^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{5^2}$$

Si el exponente es mayor que el índice, la potencia puede ser preparada para sacar factores fuera de la raíz.

Ejemplos.

a) $\sqrt[3]{2^5 \cdot 5^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2 \cdot 5^3 \cdot 5} = 5 \cdot 2\sqrt[3]{2^2 \cdot 5} = 10\sqrt[3]{2^2 \cdot 5}$

b) $\sqrt{2000} = \sqrt{2^4 \cdot 5^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 5} = 20\sqrt{5}$

SIMPLIFICACIÓN DE RAÍCES.

Cuando el exponente de un radicando y el índice de la raíz pueden ser divididos por un mismo número, podemos simplificar esa raíz:

$$\sqrt[35]{3^{10}} = \sqrt[35:5]{3^{10:5}} = \sqrt[7]{3^2}$$

Ejemplos.

a) $\sqrt[14]{2^7 \cdot 3^{21}} = \sqrt{2 \cdot 3^3}$ (Dividiendo por 7)

b) $\sqrt[12]{1600} = \sqrt[12]{2^6 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5}$ (Dividiendo por 2)

Dos radicales se dice que son equivalentes cuando obtenemos el mismo resultado al simplificarlos.

Ejercicios 11, 17, 18 y 19 pág 48

11 Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:

a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

17 Introduce los factores dentro de cada raíz.

a) $2\sqrt[3]{3}$ b) $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ c) $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{3x}{8}}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$ e) $2\sqrt[4]{4}$ f) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

18 Saca de la raíz el factor que puedas.

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $4\sqrt{8}$ c) $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$ e) $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$ f) $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$ h) $\sqrt{4a^2+4}$ i) $\sqrt{\frac{a}{9}+\frac{a}{16}}$

19 Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[6]{27}$ c) $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$ e) $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$ f) $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

g) $\sqrt[6]{0{,}027}$ h) $\sqrt[8]{0{,}0016}$ i) $\sqrt[4]{1+\frac{9}{16}}$

REDUCCIÓN A ÍNDICE COMÚN.

Para reducir varios radicales a índice común procedemos de este modo:

$$\sqrt[3]{2^2},\ \sqrt[4]{3^3},\ \sqrt[6]{5^4}$$

1) El nuevo índice común es el mínimo común múltiplo de los índices.

m.c.m (3,4,6) = 12

2) Divide el nuevo índice entre el antiguo y multiplica el resultado por el exponente del radicando.

$$\sqrt[3]{2^2},\ \sqrt[4]{3^3},\ \sqrt[6]{5^4} \longrightarrow \sqrt[12]{2^8},\ \sqrt[12]{3^9},\ \sqrt[12]{5^8}$$

Ejemplo.

Ordena las raíces de menor a mayor.

$$\sqrt[5]{2^2},\ \sqrt[6]{4^2},\ \sqrt{3}$$

1) m.c.m (5,6,2) = 30

2) $\sqrt[5]{2^2},\ \sqrt[6]{4^2},\ \sqrt{3} \longrightarrow \sqrt[30]{2^{12}},\ \sqrt[30]{4^{10}},\ \sqrt[30]{3^{15}}$

$\longrightarrow \sqrt[30]{4.096},\ \sqrt[30]{1.048.576},\ \sqrt[30]{14.348.907}$

3) Como los índices son iguales comparamos los radicandos.

$$\sqrt[5]{2^2} < \sqrt[6]{4^2} < \sqrt{3}$$

Ejercicios 4 pág 34, 5, 6, 7 y 8 pág 35

4 Simplifica.

a) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$ b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ c) $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

5 Reduce.

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{3}$ c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[3]{4}$ e) $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt{5}$ f) $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt{3}$

6 Simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a\cdot b}}{\sqrt[3]{a\cdot b}}$ c) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3\cdot b^5\cdot c}}{\sqrt{a\cdot b^3\cdot c^3}}$

7 Reduce.

a) $\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$

8 Suma y simplifica.

a) $5\sqrt{x}+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}$ b) $\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{2}$ c) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$

d) $\sqrt{27}-\sqrt{50}+\sqrt{12}+\sqrt{8}$ e) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ f) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}$

Ejercicios 20 pág 48 2 y 3 pág 34

20 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor.

a) $\sqrt[4]{5},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt{2}$ b) $\sqrt{6},\ \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6},\ \sqrt[5]{10}$ d) $\sqrt[4]{20},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[6]{100}$

2 ¿Cuál es mayor, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

3 Reduce a índice común.

a) $\sqrt[12]{a^5}$ y $\sqrt[18]{a^7}$

b) $\sqrt[3]{51}$ y $\sqrt[9]{132\,650}$

RACIONALIZACIÓN.

Consiste en pasar de una fracción con un radical en el denominador a otra equivalente que no lo tenga.

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Caso 1) Si en el denominador tenemos una raíz cuadrada.

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Multiplicamos numerador y denominador por la misma raíz.

OPERACIONES CON RADICALES.

- Productos y divisiones:
- Potencias y raíces:
- Sumas y restas:

$$\frac{-4}{3\sqrt{2}} = \frac{-4\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{-4\sqrt{2}}{6} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$$

No es necesario multiplicar por 3.

Simplificamos los coeficientes.

Caso 2) Si en el denominador tenemos una raíz NO cuadrada.

$$\frac{2}{5\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{3^3}}{5\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{3^3}}{5\cancel{\sqrt[5]{3^5}}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{15}$$

Restamos el índice menos el exponente.

Ejercicios 22, 23, 25 y 26 pág 48

22 Efectúa y simplifica, si es posible.

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}\cdot\sqrt{a}$ c) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ d) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}:\sqrt{\sqrt[3]{4}}$

23 Expresa con una única raíz.

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ b) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ c) $\left(\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}\right):\sqrt{a}$

25 Simplifica.

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\dfrac{3}{2}\sqrt{80}$ b) $\sqrt[3]{16}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\dfrac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $-\sqrt{54}+3\sqrt{24}-\sqrt{150}+\sqrt{294}$

26 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{72}$ b) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}-4\sqrt{\dfrac{18}{125}}+\dfrac{7}{2}\sqrt{\dfrac{8}{45}}$ c) $\dfrac{7}{5}\sqrt[3]{81a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\dfrac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

Caso 3) Si en el denominador tenemos una suma (o resta) y al menos uno de los sumandos es un radical.

$$\frac{4}{5-\sqrt{2}} = \frac{4\cdot\left(5+\sqrt{2}\right)}{\left(5-\sqrt{2}\right)\cdot\left(5+\sqrt{2}\right)} = \frac{4\cdot\left(5+\sqrt{2}\right)}{5^2-\left(\cancel{\sqrt{}}2\right)^{\cancel{2}}}$$

Multiplicamos por el conjugado.

Usamos productos notables en el denominador.

$$= \frac{4\cdot\left(5+\sqrt{2}\right)}{25-2} = \frac{4\cdot\left(5+\sqrt{2}\right)}{23} = \frac{20+4\sqrt{2}}{23}$$

Si no podemos simplificar, multiplicamos en el numerador

$$\frac{5}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{5\cdot\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{5\cdot\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\cdot\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{9\cdot 2-4\cdot 3}$$

$$=\frac{5\cdot\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{6}=\frac{15\sqrt{2}+10\sqrt{3}}{6}$$

LOGARITMOS DECIMALES.

Cuando la base es el número 10, el logaritmo se llama logaritmo decimal. Se escribe **log** en lugar de $\mathbf{log_{10}}$

$$\log\ 1000=\ 3 \qquad \log\ 0{,}01=\ -2$$

LOGARITMOS NEPERIANOS.

Cuando la base es el número e=2,71828..., el logaritmo se llama logaritmo neperiano. Se escribe **ln** en lugar de $\mathbf{log_e}$

$$\ln\ 7=\ 1.94591014906$$

Ejercicios 9, 10 pág 36, 28 y 29 pág 49

9 **Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.**

a) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}}$ f) $\frac{4}{\sqrt{18}}$ g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}}$ h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}}$ j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}}$

10 **Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.**

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ b) $\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ c) $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ d) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ f) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ g) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ h) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

28 **Racionaliza y simplifica.**

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ c) $\frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$ e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ f) $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

29 **Efectúa y simplifica.**

a) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

Ejercicios 1, 2 pág 39, 31 pág 49

1 **Halla.**

a) $\log_2 16$ b) $\log_2 0{,}25$ c) $\log_9 1$ d) $\log_{10} 0{,}1$

e) $\log_4 64$ f) $\log_7 49$ g) $\ln e^4$ h) $\ln e^{-1/4}$

i) $\log_5 0{,}04$ j) $\log_6\left(\frac{1}{216}\right)$

2 **Halla la parte entera de…**

a) $\log_2 60$. b) $\log_5 700$. c) $\log_{10} 43\,000$. d) $\log_{10} 0{,}084$.

e) $\log_9 60$. f) $\ln e$. g) $\log_{20} 450\,000$. h) $\log_{5,4} 900$.

31 **Calcula la base de estos logaritmos:**

a) $\log_x 125=3$ b) $\log_x \frac{1}{9}=-2$ c) $\log_x \frac{1}{4}=2$

d) $\log_x 2=\frac{1}{2}$ e) $\log_x 0{,}04=-2$ f) $\log_x 4=-\frac{1}{2}$

UNIDAD 1. NÚMEROS REALES.

PROPIEDADES.

1) $\log_a a=1$ 2) $\log_a 1=0$

3) $\log_a P\cdot Q=\log_a P+\log_a Q$

4) $\log_a \frac{P}{Q}=\log_a P-\log_a Q$

5) $\log_a P^n=n\cdot\log_a P$

6) $\log_a P=\frac{\log_b P}{\log_b a}$

1.4. LOGARITMOS. PROPIEDADES.

El logaritmo en base “a” de otro número “b” es el exponente al que debemos elevar “a” para que el resultado de la potencia sea “b”.

$$\log_a b=c \iff a^c=b \qquad a>0,\ a\neq 1$$

Ejemplos.

a) $\log_3 81=4$ porque $3^4=81$

b) $\log_4 \frac{1}{16}=-2$ porque $4^{-2}=\frac{1}{16}$

Ejercicios 3, 4 pág 39. 34 pág 50.

3 **Aplica la propiedad ⑧ para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:**

a) $\log_2 1\,500$ b) $\log_5 200$ c) $\log_{100} 200$ d) $\log_{100} 40$

En cada caso, comprueba el resultado utilizando la potenciación.

4 **Calcula sabiendo que $\log_5 A=1{,}8$ y $\log_5 B=2{,}4$.**

a) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}}$ b) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$

34 **Desarrolla las siguientes expresiones:**

a) $\log \frac{a^2\sqrt[5]{b^3}}{100c^4}$ b) $\ln \frac{\sqrt[4]{x^3}\cdot e^5}{\sqrt{y}}$

UNIDAD 3. ÁLGEBRA.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. 1º BAC
PROFESOR: PABLO TRASHORRAS

UNIDAD 3. ÁLGEBRA.

3.1.IGUALDADES EN ÁLGEBRA.

Ejercicios 1, 3 y 4 pág 99

1 Calcula el cociente y el resto en cada caso:

a) $(4x^5 - 4x + 1) : (2x^2 + 1)$

b) $x^6 : (x^3 + x)$

c) $(x^4 + x^2 - 20x) : (x + 2)$

d) $(x^4 - 81) : (x + 3)$

3 Halla el polinomio $P(x)$ sabiendo que:

$$\frac{4x^4 - 8x^3 + 4x^2 + x - 1}{P(x)} = x - 1$$

4 Averigua usando la regla de Ruffini si el polinomio $2x^4 - 3x + 1$ es divisible entre $(x - 1)$ y $(x + 1)$. Hazlo también empleando el teorema del resto.

UNIDAD 3. ÁLGEBRA.

3.2.FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS.

- Polinomios de grado 2.

Seguimos los siguientes pasos:

1) Sacamos factor común.

2) Usamos los productos notables.

3) Buscamos las raíces igualando a cero y resolviendo la ecuación.

Ejercicio

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 4x - 5$

b) $x^2 + 8x + 15$

c) $7x^2 - 21x - 280$

d) $3x^2 + 9x - 210$

e) $2x^2 - 9x - 5$

f) $3x^2 - 2x - 5$

g) $4x^2 + 17x + 15$

h) $-x^2 + 17x - 72$

- Polinomios de grado 3 o superior.

Seguimos los siguientes pasos:

1) Sacamos factor común.

2) Usamos los productos notables.

3) Buscamos las raíces por Ruffini hasta llegar al polinomio de grado 2.

4) Usamos productos notables o buscamos las raíces de este polinomio igualando a cero y resolviendo.

Ejercicios 7 y 6 pág 99

7 Saca factor común y usa las identidades notables para factorizar.

a) $x^7 - 4x^5$

b) $9x^4 - 6x^3 + x^2$

c) $2x^3 - 18x$

d) $12x^3 + 36x^2 + 27x$

e) $98x^3 - 56x^4 + 8x^5$

f) $6x^9 - 54x$

g) $25x^{15} - 15x^8 + \frac{1}{4}x$

h) $\frac{x^6}{4} - x^4 + x^2$

6 Factoriza cada polinomio y señala sus raíces.

a) $2x^2 - 8x - 10$

b) $4x^2 - 9$

c) $x^3 + x^2 - 5x - 5$

d) $x^4 + x^2 - 20$

e) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3$

f) $6x^3 + 7x^2 - x - 2$

g) $x^5 - 16x$

h) $2x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 18x$

Ejercicios 3, 4 y 5 pág 79

3) Descompón factorialmente los siguientes polinomios:

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

4) a) Intenta factorizar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.

b) Hazlo ahora sabiendo que es divisible por $x^2 + x + 1$.

5) Intenta factorizar $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Vuelve a intentarlo sabiendo que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces suyas.

UNIDAD 3. ÁLGEBRA.

3.3. FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Son aquellas en las cuales el numerador y el denominador son polinomios.

$$\frac{x^2 - 3x}{2x + 1} \qquad \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$$

- **Simplificación.**

- Factorizamos el numerador y el denominador.
- Eliminamos los factores que coincidan en ambos.

Ejemplos:

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $$\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4} = \frac{x\cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{2}}} = \frac{x}{x+2}$$

b) $$\frac{2x^2 + x - 3}{4x^2 + 12x + 9} = \frac{\cancel{(2x+3)}\cdot(x-1)}{(2x+3)^{\cancel{2}}} = \frac{x-1}{2x+3}$$

c) $$\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{\cancel{(x+1)}\cdot(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+1)}\cdot\cancel{(x-2)}} = x + 2$$

Ejercicio 8 pág 99

8 Descompón en factores y simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

- **Multiplicación y división.**

- La multiplicación en línea y la división en cruz.
- No multiplicamos los polinomios: los factorizamos para simplificar el resultado.

Ejemplos:

a) $$\frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1}\cdot\frac{x-1}{x^3} = \frac{(x^2 + x)\cdot(x-1)}{(x^2 - 2x + 1)\cdot x^3} = \frac{\cancel{x}\cdot(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}\cdot x^{\cancel{3}\,2}} =$$

$$= \frac{x+1}{(x-1)\cdot x^2} = \frac{x+1}{x^3 - x^2}$$

b) $$\frac{2x^2 - 8x}{x^2 - 5x + 6} : \frac{8}{x-2} = \frac{(2x^2 - 8x)\cdot(x-2)}{(x^2 - 5x + 6)\cdot 8} =$$

$$= \frac{\cancel{2}x\cdot(x-4)\cdot\cancel{(x-2)}}{(x-3)\cdot\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{8}\,4} = \frac{x\cdot(x-4)}{(x-3)\cdot 4} = \frac{x^2 - 4x}{4x - 12}$$

Ejercicios 4 y 5 pág 81

4 Efectúa estas operaciones:

a) $\frac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\frac{2x+3}{x+5}$

b) $\frac{x^2-2x+3}{x-2}:\frac{2x+3}{x+5}$

5 Calcula:

a) $\frac{x+2}{x}:\left(\frac{x-1}{3}\cdot\frac{x}{2x+1}\right)$

b) $\frac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\frac{x^4+x^2}{x^4}$

- **Sumas y restas.**

- Reducimos a común denominador (m.c.m).
- Sumamos o restamos los numeradores y dejamos el mismo denominador.
- Simplificamos.

Ejemplos:

a) $$\frac{x-1}{x^2} + \frac{3}{x^2 - 4x} = \frac{(x-1)(x-4)}{x^2(x-4)} + \frac{3x}{x^2(x-4)} = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2(x-4)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 \\ x^2 - 4x = x(x-4) \end{array}\right\} \text{m.c.m} = x^2(x-4)$$

b) $$\frac{x}{x^2-2x+1}-\frac{2x}{x^2-1}=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}-\frac{2x(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2-2x+1 &= (x-1)^2 \\ x^2-1 &= (x+1)(x-1) \end{aligned}\right\} \text{m.c.m} = (x+1)(x-1)^2$$

$$=\frac{x(x+1)-2x(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{x^2+x-2x^2+2x}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{-x^2+3x}{(x+1)(x-1)^2}$$

Ejercicio 9 pág 99

9 Reduce al mínimo común denominador y opera:

a) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{3}{x+1}+\frac{x-2}{x^2-1}$ $\boxed{\frac{x^2+2}{x^2-1}}$

b) $\frac{1-x}{x+3}+\frac{2x}{x-2}-\frac{x^2+5x-10}{x^2+x-6}$ $\boxed{\frac{4x+8}{x^2+x-6}}$

c) $\frac{x^2}{x^2+2x+1}-\frac{2x-3}{x-1}+3$ $\boxed{\frac{2x^3+x^2+x}{(x+1)^2(x-1)}}$

Ejercicios 2 y 3 pág 81

2 Reduce previamente a común denominador las fracciones algebraicas siguientes, y súmalas:

$\frac{x+7}{x}$ $\quad\frac{x-2}{x^2+x}\quad$ $-\frac{2x+1}{x+1}$ $\boxed{\frac{-x^2+8x+5}{x^2+x}}$

3 Efectúa:

a) $\frac{1}{x^2-1}+\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x-1}$ $\boxed{\frac{x^2-3x+1}{x^2-1}}$

b) $\frac{x}{x+1}+5x$ $\boxed{\frac{5x^2+6x}{x+1}}$

Ejercicios 10 y 11 pág 99

Más ejercicios

10 Opera y simplifica.

a) $\frac{3}{x}:\frac{x-3}{x}$ $\boxed{\frac{3}{x-3}}$

b) $\frac{x+1}{3}\cdot\frac{15}{x^2-1}$ $\boxed{\frac{5}{x-1}}$

c) $\left(\frac{x^3}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^2$ $\boxed{\frac{x^4}{4}}$

d) $\frac{x-2}{x}:\left(\frac{x-2}{x}\right)^2$ $\boxed{\frac{x}{x-2}}$

11 Opera y simplifica.

a) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}\right):\frac{x}{x+1}$ $\boxed{\frac{-1}{x}}$

b) $\left[\left(1-\frac{1}{x}\right):\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]:(x^2-1)$ $\boxed{\frac{1}{(x+1)^2}}$

c) $\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right):\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$ $\boxed{\frac{-1}{x}}$

d) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)$ $\boxed{\frac{x^2+1}{x+1}}$

e) $\left(\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-3}{x-2}\right):\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}\right)$ $\boxed{1}$

UNIDAD 3. ÁLGEBRA.

3.4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES.

- **Ecuaciones bicuadradas.**

Ejercicios 16 y 18 pág 100

16 Resuelve y comprueba las soluciones.

a) $x^4-5x^2+4=0$ b) $x^4+3x^2-4=0$ c) $x^4+3x^2+2=0$ d) $x^4-5x^2+36=0$

e) $9x^4-46x^2+5=0$ f) $x^4-4x^2=0$ g) $4x^4-17x^2+4=0$ h) $9x^4-x^2=0$

18 Halla las soluciones de estas ecuaciones:

a) $(2x^2+1)(x^2-3)=(x^2+1)(x^2-1)-8$

b) $\frac{1}{4}(3x^2-1)(x^2+3)-(2x^2+1)(x^2-3)=4x^2$

- **Ecuaciones con raíces.**

Ejercicio 19 pág 100

19 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{5x+6}=3+2x$ b) $x+\sqrt{7-3x}=1$

c) $\sqrt{2-5x}+x\sqrt{3}=0$ d) $\sqrt{2x}+\sqrt{5x-6}=4$

e) $\sqrt{3x+4}+2x-4=0$ f) $x-\sqrt{7-3x}=1$

g) $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+1}=0$ h) $\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3-x}=0$

- **Ecuaciones con fracciones algebraicas.**

Ejercicio 11 pág 86

11 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{10}$ b) $\frac{4}{x}+\frac{2(x+1)}{3(x-2)}=4$ c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{3}{4}$

d) $\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x+1}=3$ e) $\frac{5}{x+2}+\frac{x}{x+3}=\frac{3}{2}$ f) $\frac{x+3}{x-1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{26}{35}$

- **Ecuaciones exponenciales.**

a) $$3^{1-x^2}=\frac{1}{27}$$

Intentamos escribir las dos partes de la ecuación con la misma base.

$$3^{1-x^2}=\frac{1}{27}\ \rightarrow\ 3^{1-x^2}=\frac{1}{3^3}\ \rightarrow\ 3^{\boxed{1-x^2}}=3^{\boxed{-3}}$$

Si las bases son iguales, los exponentes también.

$$1-x^2=-3\ \rightarrow\ x^2=4\ \rightarrow\ x=\pm 2$$

b) $5^{x^2-5x+6}=1$

$$5^{\boxed{x^2-5x+6}}=5^{\boxed{0}} \rightarrow x^2-5x+6=0 \rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ x=2 \end{matrix}$$

c) $\dfrac{4^{x-1}}{2^{x+2}}=64$

$$\frac{\left(2^2\right)^{x-1}}{2^{x+2}}=64 \rightarrow \frac{2^{2x-2}}{2^{x+2}}=2^6 \rightarrow 2^{\boxed{x-4}}=2^{\boxed{6}}$$

$$x-4=6 \rightarrow x=10$$

d) $7^x=10$

Si no es posible escribirlos con la misma base utilizamos logaritmos.

$$7^x=10 \rightarrow \log 7^x=\log 10$$

Aplicamos la propiedad de la potencia del logaritmo para "bajar" el exponente.

$$x\cdot\log 7=\log 10 \rightarrow x=\frac{\log 10}{\log 7}\approx 1{,}18$$

Página 85

Hazlo tú.

a) $5^{6-x^2}=\frac{1}{125}$ b) $7^{x^2+2x-15}=1$

7 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $2^{3x}=0{,}5^{3x+2}$ b) $3^{4-x^2}=\frac{1}{9}$

c) $\frac{4^{x-1}}{2^{x+2}}=186$ d) $7^{x+2}=5\,764\,801$

8 **Resuelve:**

c) $\frac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}}=3\,125$ d) $5^{2x}=0{,}2^{4x-6}$

e) $2^x+2^{x+1}=12$

Primero usamos las propiedades de las potencias:

$$\boxed{2^x}+\boxed{2^x}\cdot 2=12$$

Luego usamos un cambio de variable: $t=2^x$

$$t+2t=12 \rightarrow 3t=12 \rightarrow t=4$$

Finalizamos deshaciendo el cambio:

$$t=4 \xrightarrow{t=2^x} 2^x=4 \rightarrow x=2$$

f) $5^x-3\cdot5^{x-1}=\dfrac{2}{25}$

$$\boxed{5^x}-3\cdot\frac{\boxed{5^x}}{5}=\frac{2}{25} \xrightarrow{t=5^x} t-\frac{3t}{5}=\frac{2}{25} \rightarrow$$

$$\frac{25t}{25}-\frac{15t}{25}=\frac{2}{25} \rightarrow 10t=2 \rightarrow t=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

Finalizamos deshaciendo el cambio:

$$t=\frac{1}{5} \xrightarrow{t=5^x} 5^x=\frac{1}{5} \rightarrow x=-1$$

g) $9^x+3^{x+1}=4$

$$3^{2x}+3^{x+1}=4 \rightarrow \left(\boxed{3^x}\right)^2+\boxed{3^x}\cdot3=4 \xrightarrow{t=3^x}$$

$$t^2+3t=4 \rightarrow t^2+3t-4=0 \rightarrow \begin{matrix} t=-4 \\ t=1 \end{matrix}$$

Finalizamos deshaciendo el cambio:

$$t=-4 \xrightarrow{t=3^x} 3^x=-4 \quad \text{Sin solución.}$$

$$t=1 \xrightarrow{t=3^x} 3^x=1 \rightarrow x=0$$

Página 85

Hazlo tú.

c) $3^x+3^{x-1}=36$

8 **Resuelve:**

a) $3^x+3^{x+2}=30$

b) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=\frac{31}{5}$

Página 101

33 **Resuelve las ecuaciones siguientes mediante un cambio de variable:**

a) $2^{2x}-5\cdot2^x+4=0$ b) $3^x-3^{x-1}+3^{x-2}=21$ c) $3^x-3^{-x}=\frac{728}{27}$

- **Ecuaciones logarítmicas.**

a) $\log(x+1)=\log 2x-\log 3$

Intentamos escribir un solo logaritmo en cada miembro de la ecuación.

Para ello usamos las propiedades.

$$\log(x+1)=\log\frac{2x}{3} \rightarrow x+1=\frac{2x}{3} \rightarrow$$

$$\frac{3x+3}{3}=\frac{2x}{3} \rightarrow 3x+3=2x \rightarrow \cancel{x=-3}$$

Comprobamos que todos los logaritmos se pueden calcular.

b) $2\log_5 x + \log_5 3 = \log_5 27$

$\log_5 x^2 + \log_5 3 = \log_5 27 \rightarrow \log_5 3x^2 = \log_5 27$

$\rightarrow 3x^2 = 27 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow$ $x = 3$, $\cancel{x = -3}$

Comprobamos que todos los logaritmos se pueden calcular.

3.5. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES.

- **Sistemas lineales.**

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

- **Sistemas no lineales.**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Método de igualación.

Método de reducción.

Método de substitución.

c) $5 - \log_2 x = 2 + \log_2 50$

Si tenemos logaritmos y términos independientes los separamos en los dos miembros.

$5 - 2 = \log_2 50 + \log_2 x \rightarrow 3 = \log_2 50x$

Usamos la definición de logaritmo.

$2^3 = 50x \rightarrow 8 = 50x \rightarrow x = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$

Comprobamos que todos los logaritmos se pueden calcular.

Ej 37, 38 y 39 Página 101

37 Resuelve.

a) $\begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases}$ $x_1 = 5,\ y_1 = 3;$ $x_2 = -5,\ y_2 = -3$

b) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$ No tiene solución.

38 Resuelve por sustitución:

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ $x_1 = 4,\ y_1 = -2$; $x_2 = 2,\ y_2 = -4$

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$ $x = 1,\ y = 1$

c) $\begin{cases} (x^2 + 1)y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ $x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = 2$; $x_2 = -\frac{1}{2},\ y_2 = -2$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ $y_1 = 2,\ x_1 = 3$; $y_2 = -2,\ x_2 = -3$

39 Resuelve por reducción:

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 30 \\ x^2 - 2y^2 = 7 \end{cases}$ $x_1 = 5,\ y_1 = 3$; $x_2 = -5,\ y_2 = 3$; $x_3 = 5,\ y_3 = -3$; $x_4 = -5,\ y_4 = -3$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\frac{1}{4} \end{cases}$ $x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = -1$; $x_2 = \frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = -\frac{1}{2},\ y_3 = 1$; $x_4 = -\frac{1}{2},\ y_4 = -\frac{1}{2}$

Página 86

Hazlo tú. Resuelve:

a) $\log x - \log 4 = 2$ b) $3 \log_5 (x - 1) = \log_5 125$ c) $2 \ln x = \ln (2x + 3)$

14 Resuelve las ecuaciones siguientes:

c) $2 \log x - \log (x + 6) = 3 \log 2$ d) $4 \log_2 (x^2 + 1) = \log_2 625$

Página 101

35 Halla la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\log x = \log 9 + \log 2$ c) $\frac{1}{2} \log (x + 1) = \log 3$

b) $\ln x = 2 \ln 10$ d) $\frac{1}{3} \log_2 x = -3$

Ej 40, 41 y 42 Página 101

40 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \frac{2x - 1}{x + 1} + \frac{y + 3}{y + 1} = 3 \\ x(x - 2) = y(1 - y) \end{cases}$ $x_1 = 2,\ y_1 = 1$; $x_2 = \frac{2}{13},\ y_2 = -\frac{3}{13}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ xy = 28 \end{cases}$ $x_1 = 7,\ y_1 = 4$; $x_2 = -7,\ y_2 = -4$; $x_3 = 4,\ y_3 = 7$; $x_4 = -4,\ y_4 = -7$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$ $x_1 = 3,\ y_1 = 4$; $x_2 = 3,\ y_2 = 1$; $x_3 = 2,\ y_3 = 4$; $x_4 = 2,\ y_4 = 1$

d) $\begin{cases} (x + y)(x - y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$ $x_1 = 4,\ y_1 = 3$; $x_2 = -4,\ y_2 = -3$

41 Resuelve.

a) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$ $x = 4,\ y = 3$

b) $\begin{cases} \sqrt{3(x + y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ $x = 6,\ y = 6$

42 Resuelve por sustitución.

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases}$ $x = 2,\ y = 1$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ \log x + \log y = \log 6 \end{cases}$ $x_1 = 2,\ y_1 = 3$; $x_2 = 3,\ y_2 = 2$

UNIDAD 3. ÁLGEBRA.

UNIDAD 3. ÁLGEBRA.

3.7. INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA.

- **Inecuaciones de primer grado con una incógnita.**

45 Resuelve las siguientes inecuaciones: **pág 102**

a) $2x-3<x-1$ b) $\frac{3x-2}{2}\leq\frac{2x+7}{3}$

c) $-3x-2<5-\frac{x}{2}$ d) $\frac{3x}{5}-x>-2$

- **Inecuaciones de segundo grado.**

47 Resuelve. **pág 102**

a) $-x^2-2x+3\geq 0$ b) $5-x^2<0$

c) $x^2+3x>0$ d) $-x^2+6x-5\leq 0$

e) $x^2-7x+6\leq 0$ f) $x^2-7x+6>0$

- **Sistemas de inecuaciones con una incógnita.**

46 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones: **pág 102**

a) $\begin{cases}4x-3<1\\x+6>2\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x-2>-7\\5-x<1\end{cases}$

c) $\begin{cases}5-x<-12\\16-2x<3x-3\end{cases}$ d) $\begin{cases}2x-3>0\\5x+1<0\end{cases}$

48 Resuelve estos sistemas: **pág 102**

a) $\begin{cases}x^2+2x>15\\3-2x<7\end{cases}$ b) $\begin{cases}5x-x^2\geq 4\\5x-1<4x+2\end{cases}$

UNIDAD 3. ÁLGEBRA.

3.8. INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

- **Inecuaciones con dos incógnitas.**

Pág 94

1 Resuelve:

a) $3x+2y\geq 6$ b) $x-y+1\geq 0$

2 Resuelve:

a) $x\leq -2$ b) $y>1$

- **Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.**

Pág 95

3 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases}3x+2y\geq 6\\x-y+1\geq 0\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y>9\\-2x+3y\geq 12\end{cases}$ c) $\begin{cases}x\geq 3\\y\leq 2\end{cases}$ d) $\begin{cases}x+y\geq 11\\-x+2y\geq 10\\y\leq 9\end{cases}$

e) $\begin{cases}x+y\leq 11\\-x+2y\geq 10\\y<9\end{cases}$ f) $\begin{cases}x+y<11\\-x+2y\leq 10\\y\geq 9\end{cases}$ g) $\begin{cases}2x-3y\leq -3\\x+y\leq 11\\x\geq 2\end{cases}$ h) $\begin{cases}2x-3y>-3\\x+y>11\\x\leq 2\end{cases}$

Ejercicios

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y calcula los vértices de la región solución:

a) $\begin{cases}y+2x\leq 3\\2y\geq 3x\\x\geq -2\\y\leq 3\end{cases}$

c) $\begin{cases}x-y\geq 0\\0\leq y\leq 2\\2x+y\leq 10\end{cases}$

b) $\begin{cases}-1\leq x-3y\leq 3\\x+y\leq 2\\x\geq 0\\y\geq 0\end{cases}$

UNIDAD 3. ÁLGEBRA.

3.6. MÉTODO DE GAUSS PARA SISTEMAS LINEALES.

- **Sistemas escalonados.**

$$\begin{cases}3x-2y+z=2\\ \quad -y+3z=7\\ \qquad 4z=12\end{cases}$$

En un sistema escalonado cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior.

Un sistema escalonado es muy sencillo de resolver.

$$\begin{cases}3x-2y+z=2 & \rightarrow 3x-4+3=2 \rightarrow 3x=3 \rightarrow \boxed{x=1}\\ -y+3z=7 & \rightarrow -y+9=7 \rightarrow \boxed{y=2}\\ 4z=12 & \rightarrow \boxed{z=3}\end{cases}$$

- Empezamos despejando en la ecuación que tiene una incógnita.
- Luego despejamos en la ecuación que tiene dos.
- Terminamos con la ecuación con tres incógnitas.

Página 89

1 Reconoce como escalonados y resuelve:

a) $\begin{cases} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{cases}$

2 Resuelve los siguientes sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y = -5 \\ 5y = -10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y - z = -3 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{Método de Gauss}} \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3y + 3z = 15 \\ -3z = -9 \end{cases}$$

El método de Gauss busca realizar una serie de transformaciones en un sistema hasta convertirlo en un sistema escalonado que tiene las mismas soluciones que el inicial.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y - z = -3 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \text{ Matriz del sistema}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 \\ 2F_1 - F_2 \\ 3F_1 - F_3 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_2 - 3F_3 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \longrightarrow x + 2 + 3 = 6 \longrightarrow x = 1 \\ 3y + 3z = 15 \longrightarrow 3y + 9 = 15 \longrightarrow y = 2 \\ -3z = -9 \longrightarrow z = 3 \end{cases}$$

Ejercicios 3 y 4 Página 90

3 Resuelve por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$

4 Resuelve:

a) $\begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$

Ejercicios 5 y 6 Página 91

5 Intenta resolver por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

6 Resuelve:

a) $\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

- **Tipos de sistemas según el número de soluciones.**
  - Sistema compatible determinado: Una única solución para cada incógnita.
  - Sistema compatible indeterminado: Infinitas soluciones.
  - Sistema incompatible: Sin solución.

Ejercicio 44 Página 101

44 Resuelve aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{cases}$

Página 103

67 La suma de las edades, en el momento actual, de tres hermanos es de 15 años. Dentro de un año, la edad del menor será la mitad que la edad del mediano. Hace 2 años, la edad del mayor era el doble que la del mediano. Halla las edades de los tres hermanos.

68 En una caja registradora encontramos billetes de 50 €, 100 € y 200 €, siendo el número total de billetes igual a 21, y la cantidad total de dinero de 1 800 €. Sabiendo que el número de billetes de 50 € es el quíntuple de los de 200 €, calcula el número de billetes de cada clase.

69 En una función de teatro se recaudan 5 200 €, vendiéndose 200 entradas de tres precios distintos: 30 €, 25 € y 10 €. Sabiendo que el número de localidades más económicas suponen un 25% del número de localidades de 25 €, calcula el número de localidades de cada tipo.

UNIDAD 4. FUNCIONES.

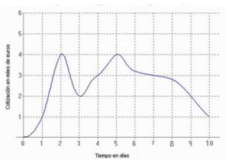
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. 1º BAC
PROFESOR: PABLO TRASHORRAS

4.1 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN.

- Una función es una correspondencia mediante la cual a cada valor de la variable dependiente x se le asocia un único valor f(x).
- Una función puede venir dada de las siguientes formas:
  - Mediante su expresión analítica.

$$f(x)=x^2-5x \qquad g(x)=\log(3x-1) \qquad y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

  - Mediante su gráfica.



4.2 DOMINIO Y RECORRIDO.

- Dominio de una función.

Supongamos que tenemos la función: $f(x)=\frac{5x-1}{x^2-3x}$

La imagen del 1 será: $f(1)=\frac{5\cdot 1-1}{1^2-3\cdot 1}=\frac{4}{-2}=-2$

La imagen del -2 será: $f(-2)=\frac{5\cdot(-2)-1}{(-2)^2-3\cdot(-2)}=\frac{-11}{10}$

La imagen del 0 será: $f(0)=\frac{5\cdot 0-1}{0^2-3\cdot 0}=\frac{-1}{0}$ No existe

Llamamos dominio de una función (Dom) al conjunto de valores de x que tienen imagen.

Existen tres tipos de funciones que presentan "problemas" a la hora de estudiar su dominio.

- Las fracciones.

$f(x)=\frac{5x-1}{x^2-3x}$ Un punto tendrá imagen si el denominador no se anula.

- Las raíces de índice par.

$g(x)=\sqrt{3x-5}$ Un punto tendrá imagen si el radicando es mayor o igual a cero.

- Los logaritmos.

$h(x)=\log_3(5x^3-1)$ Un punto tendrá imagen si el argumento es mayor que cero.

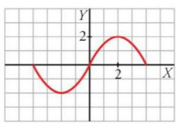
Ejercicio 2 pág 111

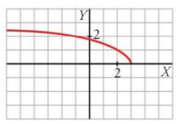
2 Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

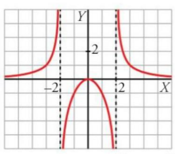
a) $y=\sqrt{x^2-1}$ b) $y=\sqrt{x-1}$
c) $y=\sqrt{1-x}$ d) $y=\sqrt{4-x^2}$
e) $y=\sqrt[3]{x^2-4}$ f) $y=1/\sqrt{x^2-1}$
g) $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ h) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$
i) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{4-x^2}}$ j) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$
k) $y=x^3-2x+3$ l) $y=\frac{1}{x}$
m) $y=\frac{1}{x^2}$ n) $y=\frac{1}{x^2-4}$
ñ) $y=\frac{1}{x^2+4}$ o) $y=\frac{1}{x^3+1}$
p) El área de un círculo de radio variable, r, es $A=\pi r^2$.

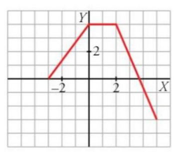
Si tenemos la gráfica de la función, también podemos calcular el dominio.

Ejemplos:


$\mathrm{Dom}=[-4,4]$


$\mathrm{Dom}=(-\infty,3]$

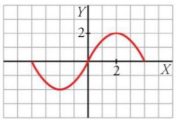

$\mathrm{Dom}=\mathbb{R}-\{-2,2\}$


$\mathrm{Dom}=[-3,5]$

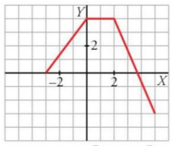
- Recorrido (o rango) de una función.

Llamamos recorrido o rango de una función (Ran) al conjunto formado por todas las imágenes de la función.

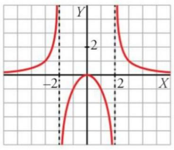
Veremos cómo calcularlo sobre la gráfica de una función.



$\text{Ran} = [-2,2]$



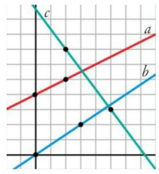
$\text{Ran} = [-3,4]$



$\text{Ran} = \text{IR}$

Ejemplos:

Calcula las ecuaciones de las siguientes rectas:



Recta a

$$\left.\begin{array}{l} A=(0,4) \\ B=(2,5) \end{array}\right\} \quad m=\frac{5-4}{2-0}=\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} A=(0,4) \\ m=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad y=4+\frac{1}{2}(x-0) \longrightarrow y=\frac{1}{2}x+4$$

4.1 Definición de función.
4.2 Dominio y recorrido.
4.3 Funciones lineales.
4.4 Funciones cuadráticas.
4.5 Función de proporcionalidad inversa.
4.6 Función raíz.
4.7 Funciones exponenciales.
4.8 Funciones logarítmicas.
4.9 Funciones trigonométricas.
4.10 Funciones definidas a trozos.
4.11 Función valor absoluto.
4.12 Composición de funciones.
4.13 Función inversa o recíproca.

4.3 FUNCIONES LINEALES.

Una función lineal será de la forma:

$f(x) = mx + n \qquad m,n \in \text{IR}$

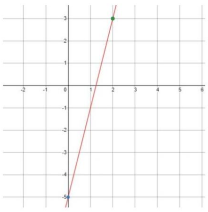
- m ⟶ pendiente
- n ⟶ ordenada en el origen

Su gráfica es una recta. Para representarla usamos una tabla de valores.

Ejemplo:

$f(x) = 4x - 5$

x	y
0	-5
2	3

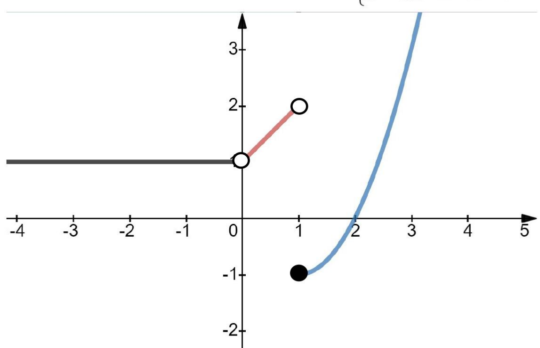


$\text{Dom} = \text{IR}$

$\text{Ran} = \text{IR}$

4.10 FUNCIONES A TROZOS.

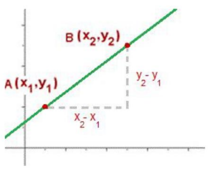
$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } 0<x<1 \\ x^2-2x & \text{si } 1\le x \end{cases}$$



- Pendiente de una recta conocidos dos puntos por los que pasa.

Dados dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ de una recta, la pendiente se puede calcular:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



- Ecuación de una recta conocido un punto y su pendiente.

Si $A(x_0, y_0)$ es un punto de una recta y m es la pendiente de la misma, la ecuación de dicha recta será:

$$y = y_0 + m\cdot(x - x_0)$$

Ejercicios 21 y 22 pág 130

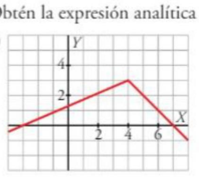
21 Representa.

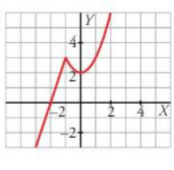
a) $y=\begin{cases} -x^2 & \text{si } x<2 \\ -x+6 & \text{si } 2\le x<7 \\ 3 & \text{si } x\ge 7 \end{cases}$ b) $y=\begin{cases} -x-1 & \text{si } x\le -1 \\ 2x^2-2 & \text{si } -1<x<1 \\ x-1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

c) $y=\begin{cases} 1/x & \text{si } x<0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$ d) $y=\begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x\le 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

Solución a
Solución b
Solución c

22 Obtén la expresión analítica de estas funciones:

a) 

b) 

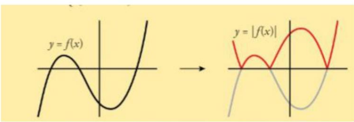
4.11 FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO.

Se llama función valor absoluto a la siguiente:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

El valor absoluto de una función sería:

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{si } f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x)<0 \end{cases}$$



4.12 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.

Supongamos que tenemos dos funciones:

$f(x)=x^2-5x$

$g(x)=\sqrt{x}$

$$x \xrightarrow{f(x)} x^2-5x \xrightarrow{g(x)} \sqrt{x^2-5x}$$

La función que resulta después de aplicar las dos funciones anteriores se llama función compuesta de f y g. Se representa: $g\circ f$

En nuestro caso: $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-5x}$

Ejemplos:

Dadas las funciones f y g: $f(x)=x^2-x$ $\quad g(x)=\frac{4}{x+1}$ Calcula:

a) $g\circ f$ **b)** $f\circ g$ **c)** $f\circ f$ **d)** $g\circ g$

a) $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g[x^2-1]=\frac{4}{x^2-x+1}$

b) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left[\frac{4}{x+1}\right]=\left(\frac{4}{x+1}\right)^2-\frac{4}{x+1}=\frac{12-4x}{(x+1)^2}$

c) $(f\circ f)(x)=f[f(x)]=f[x^2-x]=(x^2-x)^2-(x^2-x)=x^4-2x^3+x$

d) $(g\circ g)(x)=g[g(x)]=g\left[\frac{4}{x+1}\right]=\frac{4}{\frac{4}{x+1}+1}=\frac{4x+4}{x+5}$

Ejercicios 1 y 2 pág 136

1 Si $f(x)=x^2-5x+3$ y $g(x)=x^2$, obtén las expresiones de $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$.

Halla $f[g(4)]$ y $g[f(4)]$.

2 Si $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x+4$, obtén las expresiones de $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ y $g\circ g$.

Halla el valor de estas funciones en $x=0$ y $x=5$.

4.13 FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA.

Observa qué ocurre cuando componemos estas dos funciones:

$$f(x)=\frac{1}{x-1} \qquad g(x)=\frac{1+x}{x}$$

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left[\frac{1+x}{x}\right]=\frac{1}{\frac{1+x}{x}-1}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left[\frac{1}{x-1}\right]=\frac{1+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=x$$

En este caso diremos que la función g(x) es la <u>inversa</u> (o recíproca) de f(x) y la representamos por $f^{-1}(x)$

- ¿Cómo calcular la inversa de f(x)?

$$f(x) = 3x - 1 \longrightarrow y = 3x - 1$$

Despejamos x:

$$y = 3x - 1 \longrightarrow y + 1 = 3x \longrightarrow \frac{y+1}{3} = x$$

La función inversa de f(x) será:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

Ejercicios 10 y 12 pág 150

10 Halla la función inversa de las siguientes funciones:

a) $y = 3x - 2$ b) $y = \frac{x+3}{2}$

c) $y = \sqrt{2x+1}$ d) $y = 1 + 2^x$

e) $y = 2 + log_3 x$ f) $y = 4 - x^2$

12 Comprueba si cada par de funciones son una inversa de la otra. Para ello calcula $f \circ f^{-1}$ o bien $f^{-1} \circ f$:

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2$

b) $f(x) = \sqrt{2x+3}$; $f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{3}$

c) $f(x) = 1 + log_2 \frac{x}{3}$; $f^{-1}(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$

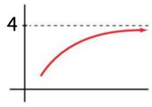
Matemáticas Aplicadas a las CC.SS.

5 Límites de funciones. Continuidad

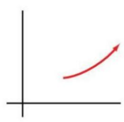
Pablo Trashorras de la Fuente
IES Afonso X O Sabio (Cambre)

5.2 Idea gráfica de los límites de funciones.

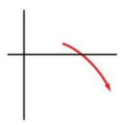
- Límite cuando x tiende a ∞.



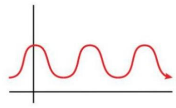
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$



$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

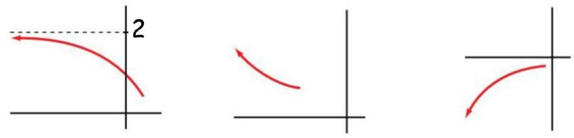


$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$



$\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)$

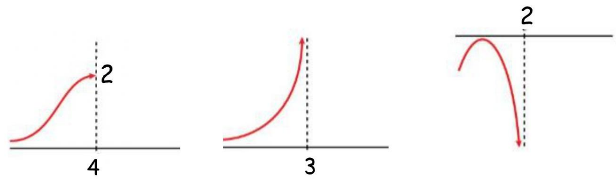
- Límite cuando x tiende a −∞.



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ $\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

- Límite cuando x tiende a un punto.

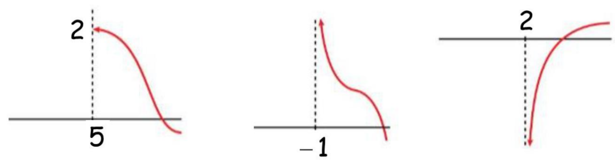
Límite por la izquierda.



$\lim_{x\to4^-} f(x) = 2$ $\quad \lim_{x\to3^-} f(x) = \infty$ $\quad \lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$

- Límite cuando x tiende a un punto.

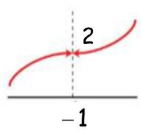
Límite por la derecha.



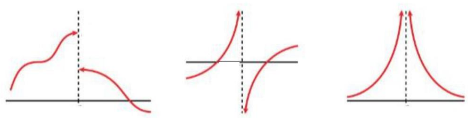
$\lim_{x\to5^+} f(x) = 2$ $\quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = \infty$ $\quad \lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$

- Límite cuando x tiende a un punto.

Para que exista límite de una función en un punto, el límite por la derecha y el límite por la izquierda tienen que ser finitos y coincidir.



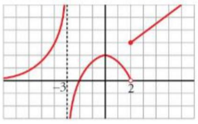
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x\to-1^+} f(x) = 2\end{array}\right\} \quad \lim_{x\to-1} f(x) = 2$$



No hay límite

Ejercicios 5 y 6 pág 177

5 Sobre la gráfica de la siguiente función $f(x)$, halla:

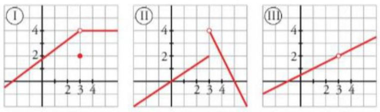


a) $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ b) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

d) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ e) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ f) $\lim_{x\to -2} f(x)$

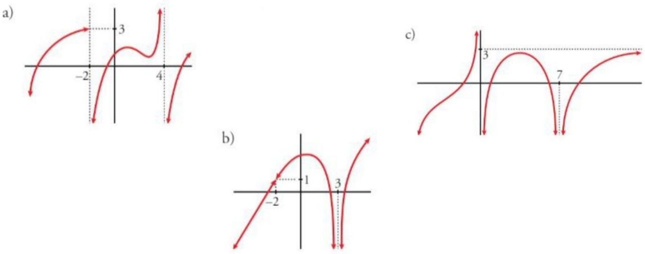
6 Relaciona cada una de estas expresiones con su gráfica correspondiente:

a) $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$ b) $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$ c) $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe



Ejercicios

Describe con límites las siguientes ramas:



Representa una curva que cumpla las seis condiciones siguientes:

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 4$ $\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ no existe

5.1 Límite de una función en un punto. Límite en el infinito.

5.2 Idea gráfica de los límites de funciones.

5.3 Cálculo de límites.

5.4 Indeterminaciones.

5.5 Continuidad de una función en un punto.

5.6 Asíntotas.

5.3 Cálculo de límites.

- Límite cuando x tiende a un punto

En principio lo que haremos será sustituir x por dicho valor.

a) $\lim_{x\to 3}\left(x^2-5x+1\right) = 9-15+1 = -5$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+2}{3x^2-2}\right) = \frac{2}{-2} = -1$

c) $\lim_{x\to 5}\left(2x^2-4x\right)^{x-3} = 30^2 = 900$

d) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{5x-15}{x^2+1}\right) = \frac{0}{10} = 0$

e) $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3-x^2}{2x+4}\right) = \frac{-12}{0}$ Indeterminación

f) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-2x+1}{3x-3}\right) = \frac{0}{0}$ Indeterminación

Ejercicio.

Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 1}\left(x^2-3x\right)^{9x-7}$ b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+2x^2+1}{-5x}\right)$ c) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{6x-12}{x^2-2x}\right)$

- Límite cuando x tiende a ∞ o a −∞

a) $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-3x+2\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$

b) $\lim_{x\to -\infty}\left(3x^2+5x+2\right) = \lim_{x\to -\infty} 3x^2 = \infty$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(-5x^3+x-8\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-5x^3\right) = -\infty$

d) $\lim_{x\to -\infty}\left(-4x^5+3x^2\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(-4x^5\right) = \infty$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{3x^3-4x^2}\right) = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminación

e) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x+1}{2x^2+7}\right) = \frac{-\infty}{\infty}$ Indeterminación

Ejercicio.

Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to -\infty}\left(-7x^3+x-1\right)$ b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3}{2}x^2-5x+4\right)$

5.1 Límite de una función en un punto. Límite en el infinito.

5.2 Idea gráfica de los límites de funciones.

5.3 Cálculo de límites.

5.4 Indeterminaciones.

5.5 Continuidad de una función en un punto.

5.6 Asíntotas.

5.4 Indeterminaciones.

- Indeterminación $\frac{0}{0}$

Se resuelve factorizando y simplificando:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-6}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2\cancel{(x-3)}}{x\cancel{(x-3)}}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{x}=\frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+2)}(x-2)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{x-2}=0$

c) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-50}{x^2-6x+5}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{2(x+5)\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x-1)}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{2(x+5)}{x-1}=5$

- Indeterminación $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Se resuelve comparando los grados:

a) Si los grados son iguales dividimos los coeficientes principales.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x}{2x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-5x^2-4}{-3x^3+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^3}}{-3\cancel{x^3}}=\frac{-1}{3}$$

Ejercicio.

Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-2x^2+1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}(x^2-x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-x-1}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-27}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{3\cancel{(x-3)}(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-2}{3(x+3)}=\frac{1}{18}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+8}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2-2x-4)}{(x-2)^{\cancel{2}}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x-4}{x-2}$

$=\frac{-4}{0}$ Indeterminación

b) Si el grado del denominador es mayor, el límite es 0.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{3x^3-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}}{3x^{\cancel{3}2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^2}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+1}{2x^3+x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x^2}}{2x^{\cancel{3}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{-\infty}=0$$

c) Si el grado del numerador es mayor el límite es ∞ o -∞.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+1}{3x^2+x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3}=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^4-2x^2}{5x^3-4x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^4}{5x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{5}=\infty$$

- Indeterminación $\frac{a}{0}$

Se resuelve calculando los límites laterales:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x-4}{x-2}=\frac{-4}{0}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-2x-4}{x-2}=\frac{-4}{0}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x-4}{x-2}=\frac{-4}{0}=-\infty\end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+3}{(x-1)^2}=\frac{5}{0}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x+3}{(x-1)^2}=\frac{5}{0}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x+3}{(x-1)^2}=\frac{5}{0}=\infty\end{cases}$

Ejercicio.

Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2-4x+1}{6x^2-5x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7x^3+5x^2}{2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{8x^5-3x^3}$

Ejercicios 13 y 15 pág 178.

13 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{x^2-2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+x}$ g) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}$

15 Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x^3+x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x^2}{x^2+2x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x^2-4x+4}$

Ejercicios 19, 20 y 21 pág 178.

19 Calcula estos límites y representa las ramas que obtengas:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{(x-1)^2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{3-x}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+5}{1-x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2-1}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(2-x)^3}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-3x}{x+3}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-2x}{5-2x}$

20 Calcula el límite de todas las funciones del ejercicio anterior cuando $x\to-\infty$.

21 Calcula el límite cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$ y representa los resultados.

a) $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ b) $f(x)=\frac{3x^2}{(x-1)^2}$

c) $f(x)=\frac{1}{x^2-10}$ d) $f(x)=\frac{1-12x^2}{3x^2}$

e) $f(x)=\frac{5-2x}{x^2+1}$ f) $f(x)=\frac{1-x}{(2x+1)^2}$

g) $f(x)=\frac{x^3-x^2}{7-x^2}$ h) $f(x)=\frac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9}$

- <u>Indeterminación</u> 1^{∞}

Son límites que están relacionados con el número e.

Para resolverlos utilizaremos la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to a}(base)^{exp} = e^{\lim\limits_{x\to a}(base-1)\cdot exp}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+2x}\right)^{\frac{x}{4}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+2x}-1\right)\cdot\frac{x}{4}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+2x}-\frac{x^2+2x}{x^2+2x}\right)\cdot\frac{x}{4}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2x-1}{x^2+2x}\right)\cdot\frac{x}{4}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^2-x}{4x^2+8x}\right)} = e^{\frac{-2}{4}} = e^{\frac{-1}{2}}$$

<u>Ejercicio.</u>

Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{x-1}{x+1}\right)^{x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{3x-2}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

c) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{4x+3}{x}\right)^{\frac{x}{x+1}}$

- <u>Indeterminación con funciones irracionales</u>.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2-3x+1}{9x^2+5x}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x+1}}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2+2x+1}{(x+1)^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2+2x+1}{x^2+2x+1}}$

$= \sqrt{4} = 2$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2-1}{\sqrt{x^2+2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{(4x^2-1)^2}{x^2+2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{16x^4-8x^2+1}{x^2+2}}$

$= \sqrt{\infty} = \infty$

Ejercicio 34 pág 179.

34 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt[3]{x^2}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^6}-7x}{4x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{4-x^3}}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1} = \frac{0}{0}$ IND

Multiplicaremos por el <u>conjugado</u> tanto en el numerador como en el denominador.

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-\sqrt{x})\cdot}{(x-1)\cdot} = \lim_{x\to1}\frac{x^2-\cancel{(\sqrt{x})^2}}{(x-1)\cdot(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{(x-1)\cdot(x+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{x\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to1}\frac{x}{x+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{0}{0}$ IND

$$= \lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot}{x\cdot} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\cancel{(\sqrt{1+x})^2}-\cancel{(\sqrt{1-x})^2}}{x\cdot(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1$$

Ejercicio.

Calcula los siguientes límites de funciones irracionales.

a) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{9-x}$

b) $\lim\limits_{x\to3}\frac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$

e) $\lim\limits_{x\to6}\frac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-36}$

c) $\lim\limits_{x\to4}\frac{3-\sqrt{x^2-7}}{x-4}$

5.1 Límite de una función en un punto. Límite en el infinito.

5.2 Idea gráfica de los límites de funciones.

5.3 Cálculo de límites.

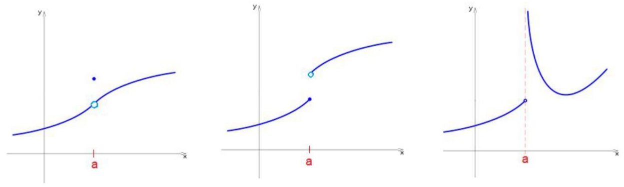
5.4 Indeterminaciones.

5.5 Continuidad de una función en un punto.

5.6 Asíntotas.

5.5 Continuidad de una función en un punto.

Observa las siguientes gráficas de funciones.



Disc. evitable — Disc. de salto finito — Disc. de salto infinito

Al dibujar sus gráficas tenemos que "levantar el bolígrafo" al pasar a la altura de x=a.

Diremos que son funciones discontinuas en x=a

Siendo más precisos con la definición, diremos que una función es continua en x=a cuando se cumple:

1) Existe el límite de la función cuando x tiende a a.
Es decir, los límites laterales dan el mismo número.

2) Existe la imagen de la función en x=a.

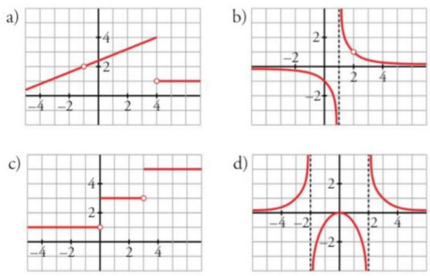
3) El límite y la imagen son iguales.

Expresado en lenguaje matemático:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

Ejercicio 2 pág 177.

2 Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y el tipo de discontinuidad:



Ejemplo 1

Comprueba si la siguiente función es continua en x=2.

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{si } x<2\\ 4 & \text{si } x=2\\ \dfrac{-3x-6}{4} & \text{si } x>2\end{cases}$$

$1-x^2$ | 4 | $\dfrac{-3x-6}{4}$ (en torno a 2)

1) Calculamos el límite por la izquierda.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(1-x^2\right) = -3$$

2) Calculamos el límite por la derecha.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{-3x-6}{4} = -3$$

3) Calculamos la imagen en 2. $f(2) = 4$

f(x) no es continua en x=2

Disc. evitable.

Ejemplo 2

Comprueba si la siguiente función es continua en x=5.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{25-x^2}{x^2-5x} & \text{si } x\neq 5\ \ x\neq 0\\ -2 & \text{si } x=5\end{cases}$$

$\frac{25-x^2}{x^2-5x}$ | 0 | $\frac{25-x^2}{x^2-5x}$ | 5 (-2) | $\frac{25-x^2}{x^2-5x}$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-}\frac{25-x^2}{x^2-5x} = \lim_{x\to 5^-}\frac{(5-x)(5+x)}{x(x-5)}$$

$$= \lim_{x\to 5^-}\frac{-\cancel{(x-5)}(5+x)}{x\cancel{(x-5)}} = \lim_{x\to 5^-}\frac{-(5+x)}{x} = -2$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+}\frac{25-x^2}{x^2-5x} = -2$$

$$f(5) = -2$$

f(x) es continua en x=5

Ejercicio 9 pág 177.

9 Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\begin{cases}3-x & \text{si } x<-1\\ x^2+3 & \text{si } x\geq -1\end{cases}$ en $x=-1$

b) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<1\\ 2^{x-1} & \text{si } x>1\end{cases}$ en $x=1$

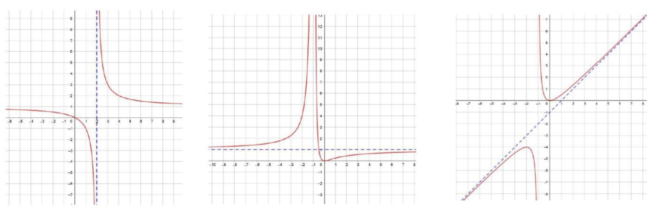
c) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x} & \text{si } x<0\\ x-2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ en $x=0$

d) $f(x)=\begin{cases}2-x^2 & \text{si } x<2\\ 2x-6 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$ en $x=2$

e) $f(x)=\begin{cases}5-x & \text{si } x<3\\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si } x\geq 3\end{cases}$ en $x=3$

5.6 Asíntotas.

Observa las siguientes gráficas de funciones:



Asíntota vertical — Asíntota horizontal — Asíntota oblícua

Las asíntotas de una función son rectas a las cuales la gráfica de dicha función se aproxima indefinidamente.

Existen tres tipos: Verticales, horizontales y oblícuas.

- Asíntotas horizontales.

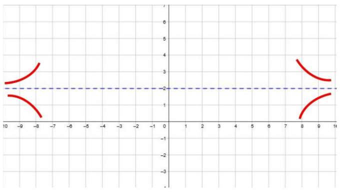
Se averiguan calculando los límites en ∞ y en $-\infty$.

Ejemplo 1.

$$f(x)=\frac{2x}{x-3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x-3}=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-3}=2\end{array}\right\}$$

as. horizontal $y=2$



$x=100 \quad f(100)=\dfrac{200}{97}=2{,}06$

Función por encima de la asíntota.

$x=-100 \quad f(-100)=\dfrac{-200}{-103}=1{,}94$

Función por debajo de la asíntota.

- Asíntotas oblicuas.

Cuando grado del numerador = grado denominador + 1

Ejemplo.

$$f(x)=\frac{2x^3}{x^2-1}$$

$$\begin{array}{rr|l} 2x^3 & & x^2-1\\ \hline -2x^3 & +2x & 2x\\ \hline & 2x & \end{array}$$

$\rightarrow$ as. oblícua $y=2x$

$x=100$ $\begin{cases}\text{Func. } f(100)=\dfrac{2000000}{9999}=200{,}02\\ \text{Asínt. } y=200\end{cases}$

Función por encima de la asíntota.

$x=-100$ $\begin{cases}\text{Func. } f(-100)=\dfrac{-2000000}{9999}=-200{,}02\\ \text{Asínt. } y=-200\end{cases}$

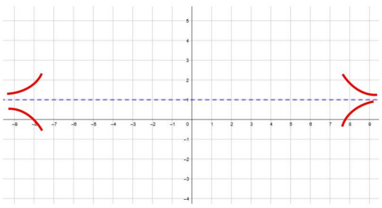
Función por debajo de la asíntota.

Ejemplo 2.

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1\end{array}\right\}$$

as. horizontal $y=1$

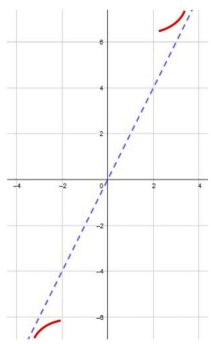


$x=100 \quad f(100)=\dfrac{10000}{10001}=0{,}99$

Función por debajo de la asíntota.

$x=-100 \quad f(-100)=\dfrac{10000}{10001}=0{,}99$

Función por debajo de la asíntota.



as. oblícua $y=2x$

x	y
2	4
-2	-4

$x=100$ $\begin{cases}f(100)=200{,}02\\ y=200\end{cases}$

Función por encima de la asíntota.

$x=-100$ $\begin{cases}f(-100)=-200{,}02\\ y=-200\end{cases}$

Función por debajo de la asíntota.

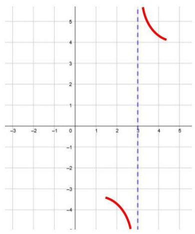
- Asíntotas verticales.

Calculamos los límites laterales donde se anula el denominador.

Ejemplo 1.

$$f(x)=\frac{2x}{x-3}$$

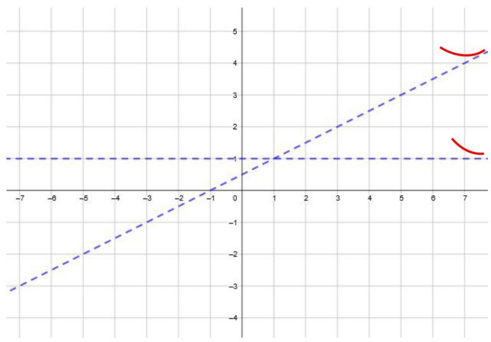
$x-3=0 \rightarrow x=3$



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{6}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{6}{0^+}=\infty\end{array}\right\}$$

as. vertical $x=3$

Si tiene asíntota horizontal entonces no tiene oblícua (y viceversa).



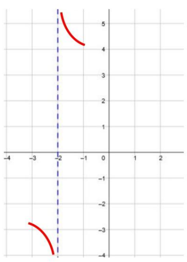
Ejemplo 2.

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$$

$x^2-4=0 \rightarrow \begin{array}{l}x=-2\\ x=2\end{array}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\dfrac{-4}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\dfrac{-4}{0^-}=\infty\end{array}\right\}$$

as. vertical $x=-2$

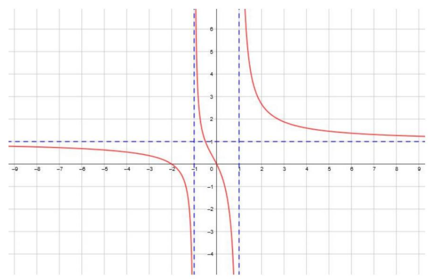


$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2^+}\frac{\cancel{x-2}}{(x+2)\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to2^+}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{4}$$

Funciones racionales. $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$

Una función racional puede tener varios tipos de asíntotas:



Matemáticas Aplicadas a las CC.SS.

6 Derivadas.

Pablo Trashorras de la Fuente
IES Afonso X O Sabio (Cambre)

6.1 Definición de derivada de una función en un punto.

Se define la derivada en una función f(x) en un punto x_0 del siguiente modo:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Ejemplo 1.

Dada la función $f(x) = x^2$ calcula $f'(4)$ usando la definición.

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{8h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(8+h)}{\cancel{h}} = 8$$

$$\left.\begin{array}{l} f(4+h) = (4+h)^2 = 16 + 8h + h^2 \\ f(4) = 16 \end{array}\right\} f(4+h) - f(4) = 16 + 8h + h^2 - 16 = 8h + h^2$$

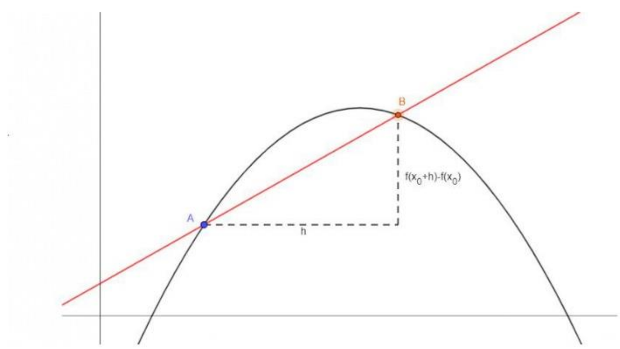
Ejemplo 2.

Dada la función $g(x) = x - x^2$ calcula $g'(2)$ usando la definición.

$$g'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(-h-3)}{\cancel{h}} = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} g(2+h) = (2+h) - (2+h)^2 = 2 + h - (4 + 4h + h^2) = \\ \quad = 2 + h - 4 - 4h - h^2 = -h^2 - 3h - 2 \\ g(2) = 2 - 4 = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} g(2+h) - g(2) \\ = -h^2 - 3h - 2 - (-2) = \\ = -h^2 - 3h \end{array}$$

Interpretación gráfica de derivada en un punto.



6.2 Técnicas de derivación.

- Regla del producto .

a) $y = x^3 \cdot senx \longrightarrow y' = 3x^2 \cdot senx + \cos x \cdot x^3$

b) $y = \sqrt{x} \cdot \ln x \longrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x}$

c) $y = e^x \cdot \tan x \longrightarrow y' = e^x \cdot \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^x$

- Regla de la división .

a) $y = \frac{x^2}{x-1} \longrightarrow y' = \frac{2x \cdot (x-1) - 1 \cdot x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

b) $y = \frac{e^x}{senx} \longrightarrow y' = \frac{e^x \cdot senx - \cos x \cdot e^x}{sen^2 x} = \frac{e^x \cdot (senx - \cos x)}{sen^2 x}$

c) $y = \frac{\cos x}{3^x} \longrightarrow y' = \frac{-senx \cdot 3^x - 3^x \cdot \ln 3 \cdot \cos x}{(3^x)^2} =$

$$= \frac{3^x \cdot (-senx - \ln 3 \cdot \cos x)}{(3^x)^2} = \frac{-senx - \ln 3 \cdot \cos x}{3^x}$$

- Regla de la cadena .

1) Derivada de una potencia.

a) $y=(x^3-5x)^4 \longrightarrow y'=4\cdot(x^3-5x)^3\cdot(3x^2-5)$

b) $y=sen^2x=(senx)^2 \longrightarrow y'=2\cdot senx\cdot cos\,x$

c) $y=\ln^3x \longrightarrow y'=3\ln^2x\cdot\frac{1}{x}=\frac{3\ln^2x}{x}$

Ejercicios 7 y 8 pág 168.

7 Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{x^2-3}{x^2+3}$ b) $\frac{x+1}{(2-x)^2}$ c) $y=\frac{3x^2}{x+\sqrt{x}}$

d) $y=\left(0,5-\frac{x}{10}\right)^4$ e) $y=\sqrt[3]{3x^2}$ f) $y=(2\sqrt{x}-3)^7$

8 Halla la derivada de estas funciones:

a) $y=\frac{x^3}{(x+1)^2}$ b) $y=\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3$

c) $y=\frac{x}{(2x+1)^3}$ d) $y=\frac{1-x^2}{x^2-4x+4}$

e) $y=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2/3}$ f) $y=\frac{2}{x}+\frac{x^2}{2}$

2) Derivada de una raíz.

a) $y=\sqrt{3x^2-7x+9} \longrightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{3x^2-7x+9}}\cdot(6x-7)=$
$=\frac{6x-7}{2\sqrt{3x^2-7x+9}}$

b) $y=\sqrt[4]{\cos x} \longrightarrow y'=\frac{1}{4\sqrt[4]{\cos^3x}}\cdot(-senx)=\frac{-senx}{4\sqrt[4]{\cos^3x}}$

c) $y=\sqrt[7]{\log_3x} \longrightarrow y'=\frac{1}{7\sqrt[7]{\log_3^6x}}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln3}=\frac{1}{7x\cdot\ln3\cdot\sqrt[7]{\log_3^6x}}$

Ejercicios 9 y 10 pág 168.

9 Deriva las funciones siguientes:

a) $y=e^{4x}(x-1)$ b) $y=\frac{(1-x)^2}{e^x}$

c) $y=\sqrt{2^x}$ d) $y=ln(2x-1)$

e) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ f) $y=7e^{-x}$

10 Deriva estas funciones:

a) $y=ln(x^2-1)$ b) $y=ln\sqrt{1-x}$

c) $y=\frac{ln\,x}{e^x}$ d) $y=e^{x^2+1}$

e) $y=ln\left(tg\,\frac{3}{x}\right)$ f) $y=ln\left(ln\,\frac{1}{x}\right)$

3) Derivadas logarítmicas.

a) $y=\ln(\sqrt{x}) \longrightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2(\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2x}$

b) $y=\log_5(\tan x) \longrightarrow y'=\frac{1}{\ln5\cdot\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}=$
$=\frac{1}{\ln5\cdot\tan x\cdot\cos^2x}$

c) $y=\log\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow y'=\frac{1}{\ln10\cdot\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{x\cdot\ln10}$

Ejercicios 11 y 12 pág 168.

11 Calcula la derivada de estas funciones:

a) $y=sen^2\,x$ b) $y=sen\,x^2$

c) $y=sen\,x\,cos^2\,x$ d) $y=\frac{sen^2\,x}{1+cos^2\,x}$

e) $y=sen^2\,x^2$ f) $y=cos^3\,(2x+1)$

12 Deriva las funciones siguientes:

a) $y=cos^5\,(7x^2)$ b) $y=tg\,\frac{x^2}{2}$ c) $y=log_2\,\frac{1}{x}$

d) $y=\sqrt[3]{sen\,x^2}$ e) $y=\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ f) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

4) Derivadas trigonométricas.

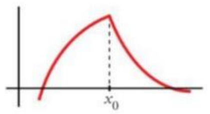
a) $y=sen(5x^2-6x+1) \longrightarrow y'=cos(5x^2-6x+1)\cdot(10x-6)$

b) $y=cos\sqrt[6]{x} \longrightarrow y'=-sen\sqrt[6]{x}\cdot\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}=\frac{-sen\sqrt[6]{x}}{6\sqrt[6]{x^5}}$

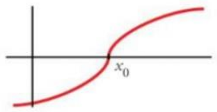
c) $y=\tan(\ln x) \longrightarrow y'=\frac{1}{cos^2(\ln x)}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\cdot cos^2(\ln x)}$

6.3 Derivabilidad y continuidad.

- Para que una función sea derivable en un punto (es decir, para que exista la derivada) primero tiene que ser continua.
- Ahora bien, una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en él.



Es continua pero no derivable porque tiene un punto anguloso.



Es continua pero no derivable porque la recta tangente en x_0 es vertical.

- Derivabilidad en una función definida a trozos.

Ejemplo 1

Comprueba si la siguiente función es derivable en x=2.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<2 \\ 3x-2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

- Continuidad en x=2.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (3x-2) = 4 \\ f(2) = 3\cdot 2-2 = 4 \end{array}\right\} \text{f(x) es continua en x=2}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<2 \\ 3x-2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

- Derivabilidad en

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{f'(2^-)} = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} 2x = 4 \\ \boxed{f'(2^+)} = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} 3 = 3 \end{array}\right\} \text{f(x) no es derivable en x=2}$$

Derivadas laterales

f(x) es continua pero no es derivable en x=2 (tiene un punto anguloso)

Ejercicios 20 y 21 pág 169.

20 a) Calcula los valores de m y n para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x+m & \text{si } x\leq 1 \\ -x^2+nx & \text{si } x>1 \end{cases}$$

b) ¿En qué puntos es $f'(x)=0$?

21 Calcula a y b para que las siguientes funciones sean derivables en todo $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x\leq 2 \\ x^2-bx-4 & \text{si } x>2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x^3-x & \text{si } x\leq 0 \\ ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$

6.4 Función derivada. Derivadas sucesivas.

Ejemplo 1

$f(x)=x^3-5x^2+6x-1$

$f'(x)=3x^2-10x+6$ ⟸ Función derivada

$f''(x)=6x-10$ ⟸ Segunda derivada

$f'''(x)=6$ ⟸ Tercera derivada

$f^{IV}(x)=0$ ⟸ Cuarta derivada

Ejemplo 2

$f(x)=3\ln x$

$f'(x)=\dfrac{3}{x}$

$f''(x)=\dfrac{-3}{x^2}$

$f'''(x)=\dfrac{6}{x^3}$

$f^{IV}(x)=\dfrac{-18}{x^4}$

7.1 Experimento aleatorio. Espacio muestral.

- Un experimento aleatorio es aquel cuyo resultado depende del azar. Conocemos el conjunto de todos los posibles resultados del experimento pero no es posible saber cual es el resultado exacto en cada una de las realizaciones del mismo.

  Ejemplo:

  El lanzamiento de un dado, la extracción de una carta de una baraja, el lanzamiento de dos monedas, etc.

- El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se conoce como espacio muestral y se designa por E.

  Ejemplos:

  En el lanzamiento de un dado, E={1,2,3,4,5,6};

  En el lanzamiento de dos monedas E={CC, CX , XC , XX};

  En la extracción de una carta de la baraja E={1B, 2B, ...,12B, 1C, 2C,..., 12C, 1E, 2E, ..., 12E,1O , 2O ,...,12O}.

7.2 Sucesos de un experimento aleatorio. Operaciones con sucesos.

- Se llama suceso a cualquier subconjunto de E.

  Ejemplos:

  En el lanzamiento de un dado podemos considerar los sucesos:

  A = "sacar un número par" = {2,4,6}

  B = "sacar número mayor que 3" = {4,5,6}.

  C = "sacar número primo" = {2,3,5}

  Entre los sucesos de un experimento aleatorio están el suceso imposible, $\emptyset$ (nunca tiene lugar) y el suceso seguro, E (siempre ocurre). En ejemplo anterior sería un suceso imposible "Sacar un número mayor que 6" y sería un suceso seguro "Sacar número menor o igual a 6".

- Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, podemos realizar las operaciones siguientes:

- Unión : $A \cup B$. Es el conjunto formado por todos los elementos de A y de B.

  En nuestro ejemplo $A \cup B$ = {2,4,5,6}. En el lenguaje natural la unión se sustituye por la conjunción o.

  Así $A \cup B$= "sacar número par o mayor que 3"

- Intersección: $A \cap B$. Es el conjunto formado por los elementos que están, a la vez, en ambos conjuntos. En nuestro ejemplo: $A \cap B$ ={4,6}. En el lenguaje natural la intersección se sustituye por la conjunción y.

  Así $A \cap B$= "sacar número par y mayor que 3"

- Complementario: $\overline{A}$. Es el conjunto formado por los elementos que no están en A.

  En nuestro ejemplo $\overline{A}$ ={1,3,5}. En el lenguaje natural se representaría por "lo contrario de A" , "lo opuesto de A".

  Así $\overline{A}$ = "No sacar un número par " o lo que es lo mismo $\overline{A}$ = "sacar un número impar"

- Diferencia: $A - B$. Es el conjunto formado por los elementos que están en A pero no están en B.

  En nuestro ejemplo $A - B$ ={2}. En el lenguaje natural se representaría por "A pero no B" , "A y no B".

  Así $A - B$= "Sacar un número par pero no mayor que 3 "

NOTA:

A y B se dicen incompatibles si $A \cap B = \varnothing$, es decir, no pueden ocurrir ambos a la vez. Por ejemplo los sucesos A = " Sacar número mayor o igual que 5" y B = "Sacar número menor que 3" son incompatibles.

7.3 Propiedades de las operaciones con sucesos.

- $\overline{\varnothing} = E$ y $\overline{E} = \varnothing$
- $\varnothing \cup E = E$, $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$ $A \cap E = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $\overline{\overline{A}} = A$, $A \cup \overline{A} = E$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
- $A - B = A \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- Estas dos últimas reciben el nombre de Leyes de Morgan

7.4 Frecuencia relativa y absoluta. Probabilidad.

- Supongamos que realizamos un total de 100 veces el experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda al aire y que los resultados que hemos obtenido son:

47 veces cara.

53 veces cruz.

Los números 47 y 53 son las frecuencias absolutas de cada uno de los sucesos. Así pues se puede definir la frecuencia absoluta de un suceso como el número de veces que ocurre dicho suceso al realizar el experimento aleatorio un número determinado de ocasiones. Escribimos f (C) = 47 , f (X) = 53.

El cociente entre la frecuencia absoluta de un suceso y el número de realizaciones del experimento se llama frecuencia relativa.

En nuestro ejemplo: $f_r(C) = \frac{47}{100} = 0'47$ (47%) , $f_r(X) = \frac{53}{100} = 0'53$ (53%).

- Pensemos ahora que aumentamos el número de veces que realizamos el experimento y vamos anotando las frecuencias relativas en cada caso:

Suceso	Lanzamientos								
	100	200	300	400	500	600	700	800	900
Cara	0'560	0'535	0'473	0'488	0'490	0'493	0'490	0'496	0'497
Cruz	0'440	0'465	0'527	0'512	0'510	0'507	0'510	0'504	0'503

Puedes observar que las frecuencias relativas de ambos se sitúan alrededor de 0'5 y tienden a estabilizarse en este valor a medida que aumenta el número de lanzamientos. Podremos entonces decir que el valor al que se aproximan las frecuencias relativas es la probabilidad de los sucesos:

$$P\ (C) = 0'5 \quad y \quad P\ (X) = 0'5$$

- En la práctica, en los experimentos equiprobables (todos los resultados elementales son igual de probables) calcularemos la probabilidad de un suceso utilizando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo:

En el lanzamiento de un dado:

$$P\ (A) = P\ (\text{"sacar un número par"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P\ (B) = P\ (\text{"sacar número mayor que 3"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P\ (C) = P\ (\text{"sacar número primo"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

7.5 Propiedades de la probabilidad.

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(E) = 1$ y $P(\varnothing) = 0$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  En particular si A y B son incompatibles, es decir, $A \cap B = \varnothing$ entonces:

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Si $A_1, A_2, A_3 ... A_n$ son incompatibles dos a dos, entonces:

  $$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n)$$

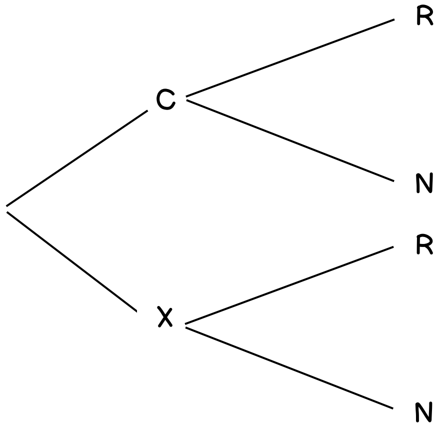
7.6 Probabilidad condicionada.

Un experimento compuesto es aquel que está formado por varias etapas.

Ejemplo:

El experimento consistente en lanzar primero una moneda, si sale cara se extrae una bola de la urna 1 (en la que hay dos bolas rojas y una negra) y si sale cruz se extrae de la urna 2 (en la que hay dos bolas negras y una roja).

Un experimento compuesto se puede describir de forma muy sencilla con un diagrama de árbol. En nuestro ejemplo resultaría:



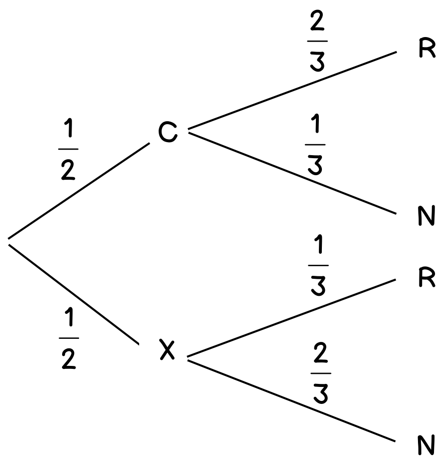
En las ramas del diagrama de árbol se colocan las probabilidades correspondientes a las dos etapas del experimento:

- En las ramas de la izquierda (que salen del punto inicial) colocamos las probabilidades de la primera etapa: P(C) y P(X).
- Las ramas de la derecha son las correspondientes a la segunda etapa y en ellas colocamos lo que se conoce como probabilidades condicionadas:

  - En la primera rama escribimos la probabilidad de extraer bola roja sabiendo que hemos sacado cara. La representamos por P(R/C) y la calculamos usando la regla de Laplace: $P(R/C) = \frac{2}{3}$

  - En la segunda rama colocamos la probabilidad de extraer bola negra sabiendo que hemos sacado cara. La representamos por P(N/C) y sería: $P(R/C) = \frac{1}{3}$

- De la misma manera podemos calcular otras dos probabilidades condicionadas y colocar los resultados sobre las ramas en el diagrama de árbol:



En el lenguaje habitual es fácil reconocer una probabilidad condicionada; frases como "probabilidad de A sabiendo que ha ocurrido el suceso B" se traducen en la práctica por P(A / B).

La fórmula que define la probabilidad condicionada y que relaciona dicha probabilidad con la probabilidad de la intersección es:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Despejando podemos conseguir una fórmula para calcular la probabilidad de una intersección en contextos de experimentos compuestos:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A / B)$$

Ejemplo:

La probabilidad de obtener cruz y luego sacar cruz y luego extraer bola roja sería:

$$P(X \cap R) = P(X) \cdot P(R / X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Observa que sólamente tenemos que multiplicar las dos ramas correspondientes.

- Dados dos sucesos A y B se dice que son independientes si P(A / B) = P(A). Es decir, el que haya o no haya ocurrido uno de ellos no afecta en la probabilidad del otro.

Cuando dos sucesos son independientes la probabilidad de la intersección es igual al producto de las probabilidades.

$$A \text{ y } B \text{ independientes} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo:

En el experimento compuesto que consiste en sacar dos cartas de una baraja sin devolución, los sucesos: A = "obtener un basto en la primera extracción" y B = "obtener un oro en la segunda extracción" no son independientes.

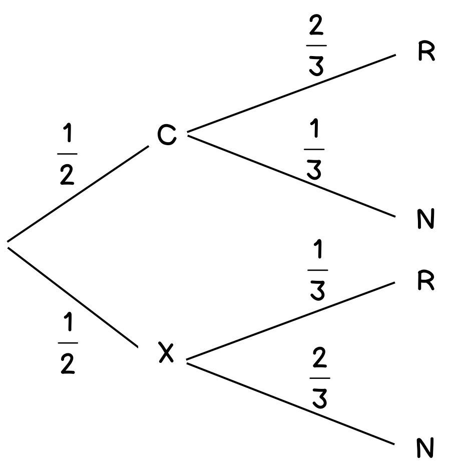
7.7 Teorema de las probabilidades totales.

- Supongamos ahora una serie de sucesos $A_1, A_2, A_3 ... A_n$ que son incompatibles dos a dos (es decir, no es posible que ocurran dos de ellos a la vez) y cuya unión es el espacio muestral (es decir, entre ellos recubren el conjunto de todas las posibilidades). Consideremos otro suceso B. Su probabilidad se calcula:

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + ... + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

Ejemplo:

En el ejemplo del inicio, calcular la probabilidad de obtener bola negra.



Uusando el teorema de las probabilidades totales:

$$P(N) = P(C) \cdot P(N/C) + P(X) \cdot P(N/X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

7.8 Regla de Bayes.

Supongamos ahora que sabemos que hemos sacado una bola negra, y nos preguntan cual es la probabilidad de que la hayamos sacado de la urna 1 (es decir, que hayamos sacado cara en el lanzamiento de la moneda). Se trata también de una probabilidad condicionada que escribiríamos:

$$P(C/N)$$

Se llama probabilidad a posteriori puesto que nos preguntan la probabilidad de un suceso anterior a otro que sabemos que ha ocurrido.
Para calcularla echaremos mano de la fórmula de probabilidad condicionada:

$$P(C/N) = \frac{P(C \cap N)}{P(N)} = \frac{P(C) \cdot P(N/C)}{P(N)}$$

Es decir:

$$P(C/N) = \frac{P(C) \cdot P(N/C)}{P(N)} = \frac{1/2 \cdot 1/3}{1/2} = \frac{1}{3}$$

TABLA DE DERIVADAS

	FUNCIÓN	DERIVADA
POTENCIAS Y RADICALES	$y = k$	$y' = 0$
	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
	$y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$
	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
	$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS	$y = e^x$	$y' = e^x$
	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
TRIGONOMÉTRICAS	$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
	$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
	$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
	$y = \operatorname{cotan} x$	$y' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$
TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS	$y = \operatorname{arcsen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
	$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$
	$y = \operatorname{arc\,cotan} x$	$y' = \frac{-1}{1 + x^2}$

REGLAS DE DERIVACIÓN

	FUNCIÓN	DERIVADA	DESCRIPCIÓN
SUMA O RESTA	$u \pm v$	$u' \pm v'$	**Suma o resta** de derivadas.
PRODUCTO NÚMERO POR FUNCIÓN	$\alpha \cdot u$	$\alpha \cdot u'$	Número **por** la derivada de la función.
PRODUCTO	$u \cdot v$	$u' \cdot v + v' \cdot u$	Derivada de la primera por la segunda sin derivar **más** derivada de la segunda por la primera sin derivar.
DIVISIÓN	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$	Derivada del numerador por el denominador sin derivar **menos** derivada del denominador por el numerador sin derivar; partido por el denominador al cuadrado.