LÍMITES. REGLA DE L'HOPITAL

EJERCICIOS RESUELTOS

Calcula los valores de *k* de modo que sean ciertas las siguientes igualdades:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2kx^2-7x+5}{7x^2-3} = -1$ **b)** $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{kx^2-k}{x^2+3x+2} = 4$

a) El límite de una función racional, cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$, es igual al límite del cociente de los términos de mayor grado. Luego:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2kx^2-7x+5}{7x^2-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2kx^2}{7x^2} = \frac{2k}{7} = -1 \quad \Rightarrow \qquad k = -\frac{7}{2}$$

b) El cálculo de este límite nos conduce a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Se resuelve factorizando los polinomios numerador y denominador por medio de la regla de Ruffini. Así:

$$\lim_{x\to-1} \frac{kx^2-k}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to-1} \frac{k\cdot(x^2-1)}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to-1} \frac{k\,(x-1)\,(x+1)}{(x+1)\,(x+2)} = \lim_{x\to-1} \frac{k\,(x-1)}{(x+2)} = \frac{-2k}{1} = -2k = 4$$

Por tanto, se deduce que, $k = -2$.

Dada la función $f\,(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ ax+3 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ bx^3-2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$, calcula los valores de *a* y *b* para que existan los límites $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.

Por estar definida la función a trozos, hemos de calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(x^2+1) = 2 \qquad\qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(ax+3) = a+3$$

Una función tiene límite si y sólo si existen los límites laterales y ambos son iguales. Por tanto se ha de cumplir: $a + 3 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = -1$.

Por tanto, el límite de la función cuando x tiende a 1 es: $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1} f(x) = 2$.

Procediendo de forma análoga, cuando x tiende a 2, obtenemos:

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}(ax+3) = 2a+3. \qquad\qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+}(bx^3-2) = 8b-2.$$

$$2a + 3 = 1 = 8b - 2 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{8}$$

Por tanto, el límite de la función cuando x tiende a 1 es: $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2} f(x) = 1$.

Calcula, utilizando infinitésimos equivalentes, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen}\left[\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)\right]}{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}$ **b)** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\operatorname{Ln} x}{x-1}$

a) Utilizando infinitésimos equivalentes, obtenemos:

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}\left[\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)\right]}{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg} x} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{(3)}{=} \lim_{x\to0} \frac{x}{x} = 1.$$

En las igualdades (1) y (3) hemos utilizado los infinitésimos equivalentes sen $h\,(x) \sim h\,(x)$ y en la igualdad (2) los infinitésimos equivalentes tg $h\,(x) \sim h\,(x)$.

b) En el cálculo del siguiente límite, utilizamos el infinitésimo equivalente: Ln [1 + *h* (*x*)] ~ *h* (*x*).

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{Ln} x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{Ln}\left[1+(x-1)\right]}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\ 1=1.$$

La función $f(x) = \dfrac{px^2+1}{x+1}$ tiene como asíntota oblicua la recta de ecuación $y = -2x + 2$. Determina el valor de p y estudia si la gráfica de la función corta a la asíntota.

Las asíntotas oblicuas de una función f son de la forma $y = mx + n$, donde :

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad \text{y} \qquad n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]$$

Calculemos m y n:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{px^2+1}{x^2+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{px^2}{x^2}=p \qquad \Rightarrow \qquad p=-2$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{px^2+1}{x+1}-(-2)\,x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1+2x^2+2x}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x+1}=2$$

Luego esta función tiene por asíntota oblicua $y = -2x + 2$.

Para que la gráfica de la función corte a la asíntota oblicua, el siguiente sistema debe tener solución:

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{-2x^2+1}{x+1}\\ y&=-2x+2\end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-2x^2+1}{x+1}=-2x+2 \quad \Rightarrow \quad -2x^2+1=-2x^2-2x+2x+2$$

Operando, se llega a la igualdad: $1 = 2$.

Esto es imposible, lo cual quiere decir que el sistema es incompatible, y por tanto carece de soluciones. Por esta razón, podemos decir que la gráfica de la función y su asíntota oblicua no se cortan.

Calcula los límites que se indican a continuación:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{e^{2x}}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg} x$

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'Hopital}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{e^{2x}}=\frac{+\infty}{+\infty}\xrightarrow{L'Hopital}\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2\cdot e^{2x}}=\frac{+\infty}{+\infty}\xrightarrow{L'Hopital}\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{4\cdot e^{2x}}=\frac{4}{4}=1$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg} x=0\cdot\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x}{\dfrac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{L'Hopital}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{-2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos^2 x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'Hopital}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-2\operatorname{sen} x\cos x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'Hopital}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}=-1$$

Calcula los límites que se indican a continuación:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{2x}{x-1}-\frac{3}{\text{Ln}\,x}\right]$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{2x}{x-1}-\frac{3}{Ln\,x}\right]=\infty-\infty$

En muchos casos como este, la indeterminación $\infty-\infty$, se transforma en la del tipo $\frac{0}{0}$ sin más que operar convenientemente:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x\,\text{Ln}\,x-3x+3}{(x-1)\,\text{Ln}\,x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'Hopital}\lim_{x\to 1^+}\frac{2\text{Ln}\,x+\frac{2x}{x}-3}{\text{Ln}\,x+\frac{(x-1)}{x}}=\frac{-1}{0^+}=+\infty$$

b) Este límite pertenece al caso 1^∞. Por tanto:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\cdot(x-1)}=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{1-x}\right)}=e^{-1}$$

Otra forma de resolver este límite es tomando logaritmos neperianos:

$$M=\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} \quad\Rightarrow\quad \text{Ln}\ M=\text{Ln}\left\{\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}\right\}=\lim_{x\to 1}\left\{\text{Ln}\,x^{\frac{1}{1-x}}\right\}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{1}{1-x}\cdot\text{Ln}\,x\right\}$$

Este límite pertenece al caso $0\cdot\infty$ y, operando convenientemente, lo transformamos es el caso $\frac{0}{0}$.

$$\text{Ln}\ M=\lim_{x\to 1}\frac{\text{Ln}\,x}{1-x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'Hopital}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x}=-1$$

Por tanto, Ln $M=-1$, de lo que se deduce que:

$$\text{Ln}\,M=-1\quad\Rightarrow\quad M=e^{-1}$$

Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\text{Ln}(1+x)-\text{sen}\,x}{x\cdot\text{sen}\,x}$**, siendo Ln (1 +** x**) el logaritmo neperiano de (1 +** x**).**

Si intentamos calcular el límite directamente, se llega a que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{Ln}(1+x)-\text{sen}\,x}{x\cdot\text{sen}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{Ln}(1+0)-\text{sen}\,0}{0\cdot\text{sen}\,0}=\frac{0}{0}$$

Obtenemos una indeterminación. Para resolverla, aplicamos la regla de L'Hôpital que dice:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\ \text{ y existe }\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \text{ entonces }\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{Ln}(1+x)-\text{sen}\,x}{x\cdot\text{sen}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)}-\cos x}{\text{sen}\,x+x\cdot\cos x}=\frac{\frac{1}{1+0}-\cos 0}{\text{sen}\,0+0\cdot\cos 0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)}-\cos x}{\operatorname{sen} x+x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}+\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos x-x\cdot\operatorname{sen} x}=\frac{\frac{-1}{(1+0)^2}+\operatorname{sen} 0}{\cos 0+\cos 0-0\cdot\operatorname{sen} 0}=\frac{-1}{1+1}=\frac{-1}{2}$$

Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x^2}$.

Si intentamos calcular el límite directamente, obtenemos una indeterminación que se puede resolver aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x+x\cdot\cos x}{2x\cdot(1+\operatorname{tg} x^2)}=\frac{0}{0}$$

Aplicando nuevamente la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x+x\cdot\cos x}{2x\cdot(1+\operatorname{tg} x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x+x\cdot(-\operatorname{sen} x)}{2\cdot(1+\operatorname{tg} x^2)+4x^2\cdot(1+\operatorname{tg} x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-x\cdot\operatorname{sen} x}{(2+4x^2)\cdot(1+\operatorname{tg} x^2)}=$$

$$=\frac{2\cdot 1-0\cdot 0}{(2+0)\cdot(1+0)}=\frac{2}{2}=1$$

Determina *a* sabiendo que existe y es finito el límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}+a\,x}{x-\operatorname{sen} x}$. Calcula dicho límite.

Calculemos el límite directamente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+a\,x}{x-sen\,x}=\frac{e^0-e^0+0}{0-\operatorname{sen} 0}=\frac{0}{0}$$

Obtenemos una indeterminación que podemos resolver aplicando la regla de L’Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+a}{1-\cos x}=\frac{e^0+e^0+a}{1-\cos 0}=\frac{2+a}{0}$$

Como el problema dice que existe el límite y es finito, tiene que cumplirse que:

$$2+a=0 \quad\Rightarrow\quad a=-2.$$

Si $a=-2$, obtenemos de nuevo una indeterminación que resolveremos nuevamente aplicando la regla de L’Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}=\frac{e^0-e^0}{\operatorname{sen} 0}=\frac{0}{0}$$

Aplicando otra vez la regla de L´Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{e^0 + e^0}{\cos 0} = \frac{2}{1} = 2$$