TRIGONOMETRÍA 1º BACHILLERATO

1. Siendo $\tan x = \frac{3}{5}$, con $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular $\sin x$ y $\cos x$.

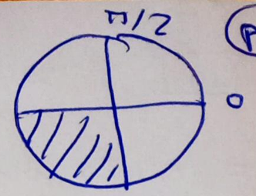
   $(\cos x = \pm\frac{5}{\sqrt{34}},\ \sin x = -\frac{3\sqrt{34}}{34})$ Mal, las + no valen

2. Resolver el triángulo $A = 32^{\circ}$ $B = 48^{\circ}$ $a = 10$ $(b = 14{,}02 \quad c = 18{,}58)$
3. Resolver el triángulo $A = 75^{\circ}$ $a = 28$ $b = 12$ $(\hat{B} = 24^{\circ}27'16" \quad c = 28{,}59)$
4. Cuando una persona que mide 170 cm arroja una sombra de 84 cm, la de un edificio es de 32 metros. ¿Qué altura tiene el edificio? (64,76 m)
5. Un globo está sujeto a un puente de 84 m de largo. Los ángulos de elevación del globo desde cada uno de los extremos del puente son 53º y 74º. ¿Cuál es la altura del globo? (80,73 m)
6. El ángulo de elevación con el que se ve la parte superior de un edificio es de 50º. Avanzando 20 m hacia él, el ángulo es de 65º. ¿Cuál es la altura del edificio? (53,66 m)
7. Desde dos torres de observación separadas entre sí 2485 m se ve un punto (alineado con ellas) bajo ángulos respectivos de 84º y 72º. ¿A qué distancia de cada una de las torres se encuentra dicho punto? (1877,63 m)
8. Calcular el área de un hexágono regular de 5 cm de lado. $(\frac{75\sqrt{3}}{2})$
9. Desde un punto del suelo se observa un repetidor de televisión situado encima de un monte de 548 m. Los ángulos de elevación de la base del repetidor y de su punto más alto son, respectivamente, 53º y 54º 30'. ¿Cuál es la altura del repetidor? (30,93 m)
10. Hallar, sin hacer uso de la calculadora, las razones de 105º. Lo mismo, con 345º.
11. Escribir como suma o diferencia el producto $\sin 3x \cdot \cos x$
12. Simplificar la expresión $\frac{1+\sec x}{\tan x + \sin x}$.
13. Demostrar que $\frac{\sec^4 x - \tan^4 x}{\sec^2 x} = 1 + \sin^2 x$
14. Resolver las ecuaciones
    a) $2\tan x \cdot \sec x - \tan x = 0$ $(x = 0^{\circ} + k \cdot 180^{\circ},\ \forall k \in \mathbb{Z})$
    b) $\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ $(x \simeq 34^{\circ}9'48" + k \cdot 360^{\circ},\ x \simeq 145^{\circ}50'12" + k \cdot 360^{\circ})$
    c) $\cos x + 2\sin x \tan x = 1$ $(x = 0^{\circ} + k \cdot 360^{\circ})$
    d) $\tan^2 x + 2\sec^2 x = 1$ (sin solución)
15. Demostrar que $\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}$ sólo es cierto si $\boxed{x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi}$
16. Simplificar $\cos 2x \cdot \cos 3x + \sin 2x \cdot \sin 3x$
17. Resuelve la ecuación $\cos 2x + \sin x = 4\sin^2 x$. (Soluciones:)
    $x = 30^{\circ} + k \cdot 360,\ x = 150^{\circ} + k \cdot 360,\ x = 199^{\circ}28'16" + k \cdot 360,\ x = 340^{\circ}31'44" + k \cdot 360^{\circ}$
18. Resuelve la ecuación $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$. $(x = 60^{\circ} + k \cdot 360)$
19. Resolver el sistema $\begin{cases} \sin^2 x + y = 1 \\ \cos^2 x + y = 2 \end{cases}$ $(x = k \cdot 180^{\circ},\ y = 1)$
20. Resolver el sistema $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} \\ \cos x \cdot \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ ~~$(x = 135^{\circ},\ y = 45^{\circ})$~~ Mal

    $(x = 135^{\circ};\ y = 315^{\circ})$

    $(x = 225^{\circ},\ y = 45^{\circ})$

(p 1)



1 $\quad tg\,x = \frac{3}{5}$ con $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ (3° cuad)

sen $-$ $\quad$ $\frac{3\pi}{2}$
cos $-$

en 3° cuad
sen y cos $\neq 0$

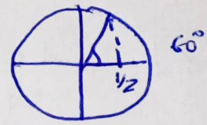
$$\left.\begin{array}{l} \frac{sen\,x}{cos\,x} = \frac{3}{5} \\ sen^2 x + cos^2 x = 1 \end{array}\right\} \quad sen\,x = \frac{3}{5}\cos x$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 cos^2 x + cos^2 x = 1;$$

$$\frac{9}{25}cos^2 x + cos^2 x = 1 \;;\; \left(\frac{9}{25}+1\right)cos^2 = 1 \;;\; \frac{34}{25}cos^2 x = 1;\; cos^2 x = \frac{25}{34}$$

$$\cos x = -\frac{5}{\sqrt{34}} = \boxed{-\frac{5\sqrt{34}}{34}} \;;\; sen\,x = \frac{3}{5}\left(-\frac{5\sqrt{34}}{34}\right) = \boxed{-\frac{3\sqrt{34}}{34}}$$

3° cuad. cos $-$



10 a) $105° = 60° + 45°$

$$\left.\begin{array}{l} sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\, sen\,\beta \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\,\alpha\, sen\,\beta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$sen(105°) = sen\,60°\cos 45° + \cos 60°\, sen\,45° = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}}$$

$$\cos 105° = \cos 60\cos 45° - sen\,60\, sen\,45° = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}}$$

b) $345° = (300° + 45°) = ((360° - 60°) + 45°) = ((-60°) + 45°)$

$$\left.\begin{array}{l} sen\,345° = sen(-60°)\cos 45° + \cos(-60°)\, sen\,45° \\ \cos 345° = \cos(-60°)\cos 45° - sen(-60°)\, sen\,45° \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} sen(-60°) = -sen\,60° \\ \cos(-60°) = \cos 60° \end{array}$$

$$sen\,345° = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(-\sqrt{3}+1)}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}}$$

$$\cos 345° = \cos(-60°)\cos 45° - sen(-60)\, sen\,45° = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}}$$

11 $\operatorname{sen} 3x \cdot \cos x = \operatorname{sen}(2x+x)\cdot \cos x =$

$= (\operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x)\cos x =$

$= (2\operatorname{sen}x\cos^2 x + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}x)\cos x =$

$= (2\operatorname{sen}x\cos^2 x + \cos^2 x\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}^3 x)\cos x =$

$= (3\operatorname{sen}x\cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x)\cos x$

$= \operatorname{sen}x\cdot\cos x\,(3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) =$

$= \boxed{\operatorname{sen}x\cdot\cos x\,(\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen}x)(\sqrt{3}\cos x - \operatorname{sen}x)}$

12 $\dfrac{1+\sec x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{sen}x} = \dfrac{1+\frac{1}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\operatorname{sen}x} = \dfrac{\frac{\cos x+1}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}x\cos x}{\cos x}} =$

para que $\exists$ $\operatorname{tg}x+\operatorname{sen}x \neq 0$ — para q. $\exists$ $\cos \neq 0$ — para q. $\exists$ $\operatorname{sen}x\,(1+\cos x)\neq 0$

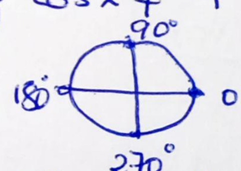
$= \dfrac{\frac{\cos x+1}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen}x\cdot(1+\cos x)}{\cos x}} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}x} = \operatorname{cosec}x$

si $\cos x \neq 0$ y $1+\cos x\neq 0$

y para que $\exists$ $\operatorname{sen}x\neq 0$.

Entonces siempre q. $\cos x\cdot\operatorname{sen}x \neq 0$; $\cos x \neq -1$

$\dfrac{1+\sec x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{sen}x} = \operatorname{cosec}x$



$x \neq 0, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ + nº entero de vueltas

13 $\dfrac{\sec^4 x - \operatorname{tg}^4 x}{\sec^2 x} = 1+\operatorname{sen}^2 x$

para que $\exists \Rightarrow \sec \neq 0$ i.e. $\dfrac{1}{\cos x}\neq 0$ cierto siempre $\forall x\in\mathbb{R}$

$\dfrac{\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^4 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \dfrac{\frac{1-\operatorname{sen}^4 x}{\cos^4 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \dfrac{(1-\operatorname{sen}^4 x)\cos^2 x}{\cos^4 x} = \dfrac{(1-\operatorname{sen}^4 x)}{\cos^2 x} =$

si $\cos x\neq 0$

$= \dfrac{(1+\operatorname{sen}^2 x)(1-\operatorname{sen}^2 x)}{\ldots}$ $\quad (1+\operatorname{sen}^2 x)\cos^2 x$

[13] continuación, entonces para q. se cumpla la igualdad $\cos x \neq 0$ ie. $\boxed{x \in \mathbb{R} - \{90° + k\,180° / k \in \mathbb{Z}\}}$

[14] Ecuaciones

a) $\boxed{2\,tg x \cdot sec x - tg x = 0}$; $tg x\,(2 \cdot sec x - 1) = 0 \iff$

$tg x = 0 \iff sen x = 0$; $x \in \{0° + 180° k / k \in \mathbb{Z}\}$

ó

$2 sec x - 1 = 0 \iff sec x = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \iff \cos x = 2$ ¡IMPOSIBLE!

$-1 \leq \cos x \leq 1$

Soluciones $\boxed{x \in \{180° + k\,/\, k \in \mathbb{Z}\}}$

b) $\boxed{sen^2 x + 3\, sen x - 2 = 0}$ $\quad sen x = a$ (cambio variable)

$a^2 + 3a - 2 = 0$; $a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-2)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

$sen x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow$ lo q. de la calculadora

o

$sen x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \rightarrow$ idem.

c) $\boxed{\cos x + 2 \sin x \tan x = 1}$; $\cos x + \frac{2 \sin^2 x}{\cos x} = 1$

para que $\exists$ $\cos x \neq 0$ (ie. $x \neq 90° + k\,180° / k \in \mathbb{Z}\}$

en ese caso $\frac{\cos^2 x + 2 sen^2 x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \left(\cos^2 + 2 sen^2 x = \underbrace{\cos^2 x + sen^2 x}_{1} + sen^2 x \right.$

$\Rightarrow \left[\frac{1 + sen^2 x}{\cos x} = 1 \right] \iff 1 + sen^2 x = \cos x$; $1 + 1 - \cos^2 x = \cos x$

$sen^2 x = 1 - \cos^2 x$

$2 - \cos^2 x - \cos x = 0$; $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$; $a = \cos x$

$a^2 + a - 2 = 0$; $a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ ó \\ \cancel{-2} \text{ IMPOSIBLE} \end{cases}$

$-1 < \cos x < 1$

Si $\cos x = 1 \iff$  $0°$ $\quad x = 0° + k\,360° / k \in \mathbb{Z}$ (p.4)

Soluciones: $\boxed{\{k \cdot 360° / k \in \mathbb{Z}\}}$

d) $tg^2 x + 2\sec^2 = 1$; $\dfrac{sen^2 x}{\cos^2 x} + 2\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1$

para que $\exists$ $\cos^2 x \neq 0$ i.e. $\cos x \neq 0$ portanto $x \neq 90° + k180° / k \in \mathbb{Z}$

en ese caso:

$$\frac{sen^2 x + 2}{\cos^2 x} = 1 \; ; \quad sen^2 x + 2 = \cos^2 x \; ; \quad sen^2 x - \cos^2 x = -2$$

$$\iff \underbrace{\cos^2 x - sen^2 x}_{\cos 2x} = 2 \; ; \quad \cos 2x = 2 \quad \text{¡imposible!}$$

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

$\Rightarrow$ No tiene solución

15 Para qué angulos se cumple la igualdad: pág 5

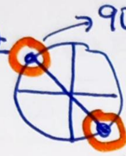
$$\boxed{\frac{1-tg\,x}{1+tg\,x}=\frac{1-\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}}$$

Solución

1°) Para q. exista la fración $\dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}=\dfrac{1-tg\,x}{1+\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}=$

$=\dfrac{1+tg\,x}{\frac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x}}$ tiene q. ocurrir $\begin{cases} 1+tg\,x\neq 0 & a) \\ \cos x+\operatorname{sen}x\neq 0 & b) \\ \cos x\neq 0 & c) \end{cases}$

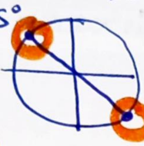
a.) $tg\,x\neq -1$?



$\to 90°+45°=135°$ $\to -45°$ + n° entero de vueltas

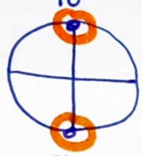
b) $\cos x+\operatorname{sen}x\neq 0$

$\operatorname{sen}x\neq-\cos x$

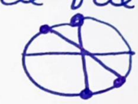


135° -45° las mismas de antes

c) $\cos x\neq 0$



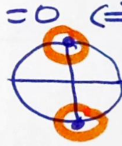
90° 270° + n° entero de vueltas



Todas juntas: $x\neq 90°, 135°, 270°, -45°, \ldots\ldots$

2°) Para q. $\exists$ $\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{\cos 2x}$ $\Rightarrow$ $\cos 2x\neq 0$

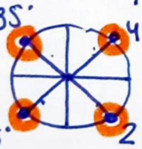
$\cos 2x=0 \iff 2x=90°, 270°, \ldots\ldots$ + media vuelta entera 180°



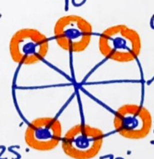
Es lo mismo q. $x=45°, 135°, \ldots\ldots$ + media vuelta entera (180°)

$x\neq\frac{90°}{2}, \frac{270°}{2}, \ldots$

$\quad\;\, 45° \quad 135°$



135° 45° 225° 215° = -45°



90° 135° 45° 225° 270° 315° = -45°

Si unimos todo nos queda

$x\notin\{45°+90°k \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{90°+180°k \mid k\in\mathbb{Z}\}$

En radianes $x\neq\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

Continuación del $\boxed{15}$

Ya sabemos que para que $\exists$ tiene q. ocurrir

que x no sea ni $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, ni $\frac{\pi}{2}+k\pi$, en ese caso:

demostremos la igualdad $A=B$

$$A = \frac{1-tgx}{1+tgx} = \frac{1-\frac{senx}{cosx}}{1+\frac{senx}{cosx}} = \frac{\frac{cosx-senx}{cosx}}{\frac{cosx+senx}{cosx}} = \frac{cosx-senx}{cosx+senx}$$

$$B \quad \frac{1-sen2x}{cos2x} = \frac{1-2senx\,cosx}{cos^2x-sen^2x} = \frac{1-2senx\,cosx}{(cosx+senx)(cosx-senx)}$$

$A=B \iff A-B=0 \Rightarrow$

$$\frac{cosx-senx}{(cosx+senx)} - \frac{1-2senx\,cosx}{(cosx+senx)(cosx-senx)} =$$

$$= \frac{(cosx-senx)(cosx-senx)-1+2senx\,cosx}{(cosx+senx)(cosx-senx)} =$$

$$= \frac{cos^2x-\cancel{2senx\,cosx}+sen^2x-1+\cancel{2senx\,cosx}}{(cos^2x-sen^2x)} = \frac{cos^2x+sen^2x-1}{(cos^2x-sen^2x)} =$$

$$= \frac{1-1}{cos^2x-sen^2x} = \frac{0}{cos^2x-sen^2x} = 0$$

por $cos^2x-sen^2x \neq 0$ según pedimos al principio.

16 Simplificar $\cos 2x \cos 3x + \sin 2x \cdot \sin 3x$ (p.7)

$$(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cos(2x+x) + 2\operatorname{sen}x\cos x\left(\sin(2x+x)\right) = (*)$$

$$\left[\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta & (\alpha = 2x, \beta = x) \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & (\alpha = 2x, \beta = x) \end{array}\right]$$

$$(*) = (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)(\cos 2x \cdot \cos x - \operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x) + 2\operatorname{sen}x\cos x\left(\operatorname{sen}(2x+x)\right)$$

$$= \underbrace{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)(\cos 2x\cos x - \operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x)}_{1} + \underbrace{2\operatorname{sen}x\cos x\left(\operatorname{sen}2x\cos x + \cos 2x\operatorname{sen}x\right)}_{2} =$$

$\Rightarrow$ separamos:

$$1 = (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2\alpha)\left[(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cos x - 2\operatorname{sen}x\cos x\operatorname{sen}x\right] =$$

$$(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\left[\cos^3 x - \operatorname{sen}^2 x\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x\cos x\right] =$$

$$(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\left[\cos^3 x - 3\operatorname{sen}^2 x\cos x\right] =$$

$$= \cos^5 x - \underbrace{3\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x - \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x} + 3\operatorname{sen}^4 x\cos x =$$

$$= \boxed{\cos^5 x - 4\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x + 3\operatorname{sen}^4 x\cos x} = 1$$

$$2 = 2\operatorname{sen}x\cos x\left[2\operatorname{sen}x\cos x\cos x + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}x\right] =$$

$$= 2\operatorname{sen}x\cos x\left[\underbrace{2\operatorname{sen}x\cos^2 x + \operatorname{sen}x\cos^2 x} - \operatorname{sen}^3 x\right] =$$

$$= 2\operatorname{sen}x\cos x\left[3\operatorname{sen}x\cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x\right] =$$

$$= \boxed{6\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x - 2\operatorname{sen}^4 x\cos x} = 2$$

$$1 + 2 = \cos^5 x - \underbrace{4\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x} + \underbrace{3\operatorname{sen}^4 x\cos x} + \underbrace{6\operatorname{sen}^2\cos^3 x} - \underbrace{2\operatorname{sen}^4 x\cos x} =$$

$$= \cos^5 x + 2\operatorname{sen}^2\cos^3 x + \operatorname{sen}^4 x\cos x =$$

$$= \cos x\left[\cos^4 x + 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x + \operatorname{sen}^4 x\right] =$$

$$= \cos x\left[(\cos^2 x + \underbrace{\operatorname{sen}^2 x})^2\right] =$$

$$= \cos x\left(\cos^2 x + \underbrace{1 - \cos^2 x}\right)^2 = \cos x(1)^2 = \boxed{\cos x}$$

Suponiendo q. se cumplen las condiciones antes (p. 8)
indicadas ¿es cierto que $\dfrac{1-tgx}{1+tgx} = \dfrac{1-sen2x}{cos2x}$?

$$[1] = \frac{1-tgx}{1+tgx} = \frac{1-\frac{senx}{cosx}}{1+\frac{senx}{cosx}} = \frac{\frac{cosx-senx}{cosx}}{\frac{cosx+senx}{cosx}} \underset{\substack{\uparrow\\ cosx\neq 0}}{=} \frac{cosx-senx}{cosx+senx}$$

$$[2] = \frac{1-sen2x}{cos2x} = \frac{1-2senx\,cosx}{cos^2x-sen^2x} = \frac{1-2senx\,cosx}{1-sen^2x-sen^2x} =$$

$$= \frac{1-2senx\,cosx}{1-2sen^2x}$$

Para q. $[1]=[2]$ tendría q. ocurrir que:

$$\frac{cosx-senx}{cosx+senx} = \frac{1-2senx\,cosx}{1-2sen^2x}$$ esto será cierto

(además por condiciones $cosx+senx\neq 0$ y $1-2sen^2x\neq 0$)

$\Leftrightarrow$
$$(cosx-senx)(1-2sen^2x) = (cosx+senx)(1-2senx\,cosx)$$

para q. sea cierto $\Leftrightarrow$

$$(cosx-senx)(1-2sen^2x) - (cosx+senx)(1-2senx\,cosx) = 0$$

Veamos si es verdad:

$$\cancel{cosx} - \cancel{2sen^2x\,cosx} - senx + 2sen^3x - \cancel{cosx} - senx + 2senx\,cos^2x + \cancel{2sen^2x\,cosx}$$

$$= -senx + 2sen^3x - senx + 2senx\,cos^2x =$$

$$= -2senx + 2sen^3x + 2senx\,cos^2x =$$

$$= 2senx\,(-1+\underbrace{sen^2x+cos^2x}_{\substack{\parallel\\ 1}\ \forall x\in\mathbb{R}}) = 2senx(-1+1) = \boxed{0}$$

Sí, es cierto

Resumen la igualdad es cierta siempre q.

$$x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$$

17 $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 4\operatorname{sen}^2 x$

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 4\operatorname{sen}^2 x$

$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^2 x = 0$

$1 - 6\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0$

$6\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$; $b = \operatorname{sen} x$; $6b^2 - b - 1 = 0$

$$\operatorname{sen} x = b = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 6\cdot(-1)}}{12} = \frac{1\pm 5}{12} \begin{cases} 1/2 \\ -1/3 \end{cases}$$

1ª) si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ 150°  30°

$180° - 30° = 150°$

Comprobación

a) $x = 30°$

$\cos 60° + \operatorname{sen} 30° - 4\operatorname{sen}^2 30° =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$

sí, VALE

b) si $x = 150°$

$\cos 300° + \operatorname{sen} 150° = 4\operatorname{sen}^2 150$?

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2$ sí, VALE

$S_1 = \{30° + k\cdot 360° / k \in \mathbb{Z}\}$

$S_2 = \{150° + k360° / k \in \mathbb{Z}\}$

2ª) si $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{3}$  $-19{,}47122°$ 4° cuad.

$180° + 19{,}47122° = 199{,}47122°$ 3° cuad.

Comprobación

a) $\cos(2\cdot(-19{,}47122°)) + \operatorname{sen}(-19{,}47122°) = 4\cdot\operatorname{sen}^2(-19{,}47122°)$

$\frac{7}{9} + \left(-\frac{1}{3}\right) = 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2$?

$S_3 = \{-19{,}47122° + k360°\}$

$-19{,}47122° = 340{,}52878°$

$\frac{7-3}{9} = 4\,\frac{1}{9}$?

$\frac{4}{9} = \frac{4}{9}$ sí, VALE //

b) $\cos(2\cdot(199{,}47122°)) + \operatorname{sen}(199{,}47122°) = 4\operatorname{sen}(199{,}47122°)$?

$\frac{7}{9} + \left(-\frac{1}{3}\right) = 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2$?

$S_4 = \{199{,}47122 + k360°\}$

$\frac{7-3}{9} = \frac{4}{9}$?

$\frac{4}{9} = \frac{4}{9}$ sí, VALE //

Soluciones $= \boxed{S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4}$

18 $\left.\begin{array}{l}\cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}\,x = 2 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1\end{array}\right\}$ $a = \cos x,\ b = \text{sen}\,x$ $\left.\begin{array}{l} a + \sqrt{3}\,b = 2 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{array}\right\}$

$\underline{a = 2 - \sqrt{3}b} \Rightarrow (2-\sqrt{3}b)^2 + b^2 = 1;\ 4 - 4\sqrt{3}b + 3b^2 + b^2 = 1$

$4b^2 - 4\sqrt{3}b + 3 = 0;\ b = \dfrac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{16\cdot 3 - 4\cdot 4\cdot 3}}{8} =$

$= \dfrac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48-48}}{8} = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \text{sen}\,x$

$a = 2 - \sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{4-3}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2} = \cos x}$

1^{er} cuad.

Soluciones $\{60° + k360° / k \in \mathbb{Z}\}$

19 $\left\{\begin{array}{l}\text{sen}^2 x + y = 1 \\ \cos^2 x + y = 2\end{array}\right. = \left\}\begin{array}{l}\text{sen}^2 x + y = 1 \\ 1 - \text{sen}^2 x + y = 2\end{array}\right.$ = llamo $a = \text{sen}\,x$

$\left.\begin{array}{l} a^2 + y = 1 \\ 1 - a^2 + y = 2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \cancel{a^2} + y = 1 \\ -\cancel{a^2} + y = 1 \\ \hline 2y = 2 \end{array} \Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow a^2 + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 0}$

$\Rightarrow \text{sen}\,x = 0$

Soluciones $x = \{k\cdot 180° / k \in \mathbb{Z}\}$
$y = 1$

20 $\left.\begin{array}{l}\text{sen}\,x\cdot\text{sen}\,y = -\dfrac{1}{2} \\ \cos x\cdot\cos y = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$ 1^a ec + 2^a ec $\Rightarrow$

$\underbrace{\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y + \cos x \cos y}_{\cos(x-y)} = -1$

$\cos(x-y) = -1$

hago 1^a Ec $- 2^a$ Ec $\Rightarrow$ $\underbrace{\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y - \cos x \cos y}_{-\cos(x+y)} = 0$

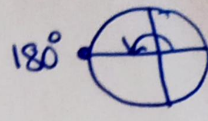
$-\cos(x+y) = 0$

Resumiendo: $\left.\begin{array}{l}\cos(x-y) = -1 \\ \cos(x+y) = 0\end{array}\right\}$

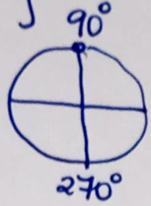
P 11

$$\left.\begin{array}{l}\cos(x-y)=-1\\ \cos(x+y)=0\end{array}\right\}$$

$\cos(x-y)=-1 \Rightarrow \boxed{x-y=180^\circ}$



$\cos(x+y)=0$



$\Rightarrow \begin{array}{l} x+y=90^\circ \\ x+y=270^\circ \end{array}$

Salen 2 posibilidades

1º)
$$\left.\begin{array}{l}x-\cancel{y}=180^\circ\\ x+\cancel{y}=90^\circ\end{array}\right\}$$
$$2x=270 \Rightarrow x=\boxed{135^\circ}$$
$$y=x-180^\circ=-45^\circ=\boxed{315^\circ}$$
$$S_1=\left\{\begin{array}{l}x=135+k\,360^\circ\\ y=315^\circ+k\,360^\circ\end{array}\Big/ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Comprobación

$\cos(135-315)=-1$ Sí, VALE

$\cos(135+315^\circ)=0$ Sí, VALE

2ª)
$$\left.\begin{array}{l}x-\cancel{y}=180^\circ\\ x+\cancel{y}=270^\circ\end{array}\right\}$$
$$2x=450^\circ \Rightarrow x=\frac{450^\circ}{2}=225^\circ$$
$$y=225^\circ-180^\circ=45^\circ$$
$$S_2=\left\{\begin{array}{l}x=225^\circ+k\,360^\circ\\ y=45^\circ+k\,360^\circ\end{array}\Big/ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Comprobación

$\left\{\begin{array}{l}\cos(225^\circ-45^\circ)=-1\\ \cos(225^\circ+45^\circ)=0\end{array}\right.$

Sí, VALE

Soluciones $=\boxed{S_1 \cup S_2}$