2º de bachillerato Matemáticas II
Bloque 1 de 4 - Álgebra

www.ebaumatematicas.com

Autor de esta recopilación: Juan Antonio Martínez García, profesor de matemáticas en el I.E.S. Vicente Medina de Archena (Murcia)

Cualquier error o ausencia en este documento, por favor, comunicarlo al correo ebaumatematicas@gmail.com

Tema 1. Matrices

1. Definición de matriz. Tipos de matrices

Se define la matriz ***A*** de dimensión ***mxn*** al conjunto de números reales dispuestos en ***m*** filas y ***n*** columnas de la siguiente forma:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ siendo a_{ij}=elemento de la matriz A situado en la fila i y columna j

La matriz A se denota también como $A=\left(a_{ij}\right)$

La dimensión ***mxn*** de una matriz es el número de filas y columnas de la misma (el primer número indica el número de filas (***m***) y el segundo el número de columnas (***n***)).

Ejemplos:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz de dimensión 2x3.

$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz de dimensión 1x4.

$C=\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ es una matriz de dimensión 2x1.

Tipos de matrices:

1. **Matrices cuadradas:** son las matrices que tienen igual número de filas que de columnas (***m***=***n***). Cuando se habla de su dimensión se dice matriz cuadrada de orden ***n***.

Ejemplos:

$D=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2.

$$E=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$$ es una matriz cuadrada de orden 3.

Elementos de las matrices cuadradas:

a. Diagonal principal: elementos de la forma a_{ii}.

En la matriz $A=\begin{pmatrix}0&2&2&1\\1&2&3&4\\5&2&2&1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}$ Son los elementos rodeados.

b. Diagonal secundaria: elementos de la forma a_{ij} donde $i+j=n+1$.

En la matriz $A=\begin{pmatrix}0&2&2&1\\1&2&3&4\\5&2&2&1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}$ Son los elementos rodeados.

2. **Matrices triangulares superiores e inferiores**: son las matrices cuadradas tal que:
   Superior: elementos por debajo de la diagonal principal son nulos $a_{ij}=0 \ si \ i>j$
   Inferior: elementos por encima de la diagonal principal son nulos $a_{ij}=0 \ si \ i<j$

Ejemplos:

$$TS=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&-2\end{pmatrix}$$ es una matriz triangular superior.

$$TI=\begin{pmatrix}1&0&0\\-5&-1&0\\0&-3&-2\end{pmatrix}$$ es una matriz triangular inferior.

3. **Matrices simétricas**: matrices cuadradas donde $a_{ij}=a_{ji}$.

Ejemplos:

$$S=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-1&12\\3&12&2\end{pmatrix} \quad SS=\begin{pmatrix}-1&23\\23&4\end{pmatrix} \quad SSS=\begin{pmatrix}-1&2&3\\2&-1&4\\3&4&-1\end{pmatrix}$$

4. **Matrices diagonales**: matrices cuadradas donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero.

Ejemplos:

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad R=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. **Matriz escalar**: matriz diagonal en el que todos los términos de la diagonal son iguales:

Ejemplos:

$$E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad EE=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

6. **Matriz unidad o matriz identidad**: matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1. Se denota como *I* o *Id*.

Ejemplos:

$$Id_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ matriz identidad de orden 2

$$Id_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ matriz identidad de orden 3

$$Id_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ matriz identidad de orden 4

7. **Matriz nula** (o cero): la matriz con todos los elementos iguales a 0.

Ejemplo:

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. **Matriz columna**: toda matriz con una sola columna.

Ejemplo:

$$C=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. **Matriz fila**: toda matriz con una única fila.

Ejemplo:

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observaciones:

1. Toda matriz diagonal es triangular, tanto superior como inferior, pues los elementos por encima y por debajo de la diagonal son nulos.
2. Toda matriz escalar es diagonal.
3. La matriz identidad es una matriz escalar.

2. Operaciones con matrices

2.1. Igualdad de matrices

Dos matrices M y N se dicen que son iguales (M = N) si se cumplen:
- misma dimensión
- elementos que ocupan la misma posición son iguales.

2.2. Suma de matrices

Solo se pueden sumar matrices de la misma dimensión.
Veamos en qué consiste la suma de matrices:

La suma de dos matrices A y B de la misma dimensión es otra matriz que se denota como A+B con misma dimensión que las otras dos y definida como:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Es decir A+B se obtiene sumando los elementos que ocupan la misma posición en las dos matrices que se están sumando.

Ejemplo:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ No se puede sumar

b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+2 \\ 1-3 & 0+1 \\ 3+0 & 5+1 \end{pmatrix}$ Si se puede sumar

2.3. Producto de una matriz por un número (escalar)

Sea *k* un número real (escalar) y $A=\left(a_{ij}\right)$ una matriz de dimensión *mxn*. El producto de k por A es otra matriz $k \cdot A$ de misma dimensión tal que:

$$k \cdot A = k\left(a_{ij}\right) = \left(k \cdot a_{ij}\right)$$

, es decir la matriz $k \cdot A$ se obtiene de multiplicar por *k* cada elemento de la matriz *A*.

Ejemplos:

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$

b) $-4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -12 & 0 & -4 \\ -8 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Observaciones:

- Se puede sacar factor común en una matriz:

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 3 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -8 & -11 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -5/4 \\ 5/4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

- Una matriz escalar se puede expresar en función de la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4. Producto de matrices

El producto de matrices es una operación más compleja que las anteriores.

Si A y B son dos matrices, para poder realizar $A \cdot B$ es necesario que el nº de columnas de la primera matriz (A) del producto sea igual al nº de filas de la segunda matriz (B).

El producto de la matriz $A=\left(a_{ij}\right)$ de dimensión *mxn* y $B=\left(b_{ij}\right)$ de dimensión *nxp* es otra matriz $C=A\cdot B$, con igual nº de filas que *A* y de columnas que *B*, tal que el elemento c_{ij} de la matriz *C* se obtiene multiplicando la fila i-esima de la primera matriz (*A*) con la columna j-esima de la segunda (*B*).

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}=\left(1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 0\right)=\left(14\right)$$

$$1\text{x}\boxed{3\ =\ 3}\text{x}1 \longrightarrow 1\text{x}1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot(-1)+3\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1+(-2)\cdot(-1)+(-3)\cdot 2 \\ 0\cdot 1+2\cdot(-1)+0\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$3\text{x}\boxed{3\ =\ 3}\text{x}1 \longrightarrow 3\text{x}1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 1 & 1\cdot(-2)+2\cdot(-1)+3\cdot 2 \\ 0\cdot 1+(-1)\cdot 0+(-2)\cdot 1 & 0\cdot(-2)+(-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2\text{x}\boxed{3\ =\ 3}\text{x}2 \longrightarrow 2\text{x}2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\text{ ¡¡No se puede realizar el producto!!}$$

$$3\text{x}\boxed{2\ \neq\ 3}\text{x}2$$

Ejercicios.

Ejercicio 1. Escribir matrices de los siguientes tipos:

a) De dimensión 3x2
b) Cuadrada de dimensión 4
c) Triangular inferior de dimensión 3
d) Diagonal de dimensión 4
e) ¿Qué tipo de matriz es de dimensión 1x1? Pon un ejemplo. ¿Cuál será la matriz identidad de orden 1?

Ejercicio 2. Decir que tipo y de que dimensión son las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Calcule el valor de a, b, c y d para que se cumpla la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 & 7+a+b \\ -2+c+d & 3d+4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, realice las siguientes operaciones: a) $A+B$ b) $A-B-C$ c) $3A+5B-6C$

Ejercicio 5. Realice todos los productos posibles con las siguientes matrices y calcúlelos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Realiza los dos productos siguientes: A·B y B·A, ¿Se obtiene el mismo resultado?

Ejercicio 7. Calcular A^2, B^2, $A^2 - B^2$, $(A+B)^2$ y $(A-B)^2$ siendo *A* y *B* las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8. Calcular los valores de las incógnitas que verifican las siguientes igualdades:

a) $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 9. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ calcule A^2, A^3, A^4. Calcule A^{50}, A^{100}.

Ejercicio 10. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n.

Soluciones:

1. a. $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

   e. 1 fila y 1 columna. Los números reales, ejemplos 2,-1.3. La identidad de orden 1 es el número 1.
2. A es una matriz cuadrada, triangular superior, dimensión 3x3 o cuadrada de orden 3. B es una matriz columna de dimensión 4x1. C es una matriz rectangular de dimensión 2x3. D es una matriz cuadrada, escalar de dimensión 3x3 o simplemente matriz cuadrada de orden 3.
3. 2a=a+5 → a=5
   2b=7+a+b → b=12
   2c=-2+c+d → c=d-2 →c=-6
   2d=3d+4 → d = -4

4. a) $A+B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A-B-C=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ c) $3A+5B-6C=\begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -25 \end{pmatrix}$

5. $A\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A\cdot B=\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 15 & 8 \end{pmatrix}$ $C\cdot B=\begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$

6. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 20 & 12 & 14 \\ 32 & 18 & 20 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 30 & 36 & 42 \end{pmatrix}$

No es el mismo resultado. No siempre se cumple que A·B = B·A, es decir no se cumple la propiedad conmutativa del producto de matrices. Existen algún tipo de matrices que si conmutan. A·B = B·A, si esto ocurre se dice que A y B conmutan.

7. $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2-B^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=\begin{pmatrix} 2 & 15 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 12 & 7 \end{pmatrix}$, $(A-B)^2=(A-B)(A-B)=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Nota: Al no ser conmutativo el producto de las matrices las igualdades notables no son ciertas cuando A y B son matrices.

8. a) $x=y=0$ *b)* $a=2; b=1; c=0; d=-1$

9. $A^2=-Id;\quad A^3=-A;\quad A^4=Id$

Cada 4 se repite la secuencia. Luego $A^{50}=A^{48}\cdot A^2=Id\cdot A^2=A^2=-Id$ $\qquad A^{100}=Id$

10. $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Trasposición de Matrices.

Sea **A** una matriz de dimensión *mxn* se llama matriz traspuesta y se escribe como **A^t** a la matriz que resulta de cambiar las filas por las columnas.

Ejemplo:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Observaciones:

- $\left(A^t\right)^t = A$
- Si B es una matriz simétrica cumple que $B^t = B$
- Si A es una matriz escalar cumple que $A^t = A$

4. Matriz inversa

Se habla de matriz inversa solo para matrices cuadradas.

La matriz inversa de una matriz cuadrada A es otra matriz cuadrada de la misma dimensión que se denota como A^{-1} tal que se cumple:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id$$

El método más sencillo para el cálculo de la inversa se realiza con ayuda del determinante de la matriz que se verá en el tema siguiente.

Aunque para matrices 2x2 podemos calcular la inversa a partir de la definición:

Ejemplo:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ calculemos su inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Debe cumplirse:

$$A \cdot A^{-1} = Id \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+2c & 2b+2d \\ 3a+7c & 3b+7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a+2c=1 \\ 2b+2d=0 \\ 3a+7c=0 \\ 3b+7d=1 \end{cases}$$

Pudiendo separar las 4 ecuaciones en 2 sistemas de 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a+2c=1 \\ 3a+7c=0 \end{cases} \xrightarrow{3\cdot \text{Ecuación } 1^{a} - 2\cdot \text{Ecuación } 2^{a}} \begin{cases} 6a+6c=3 \\ -6a-14c=0 \end{cases}$$

$$-8c=3 \rightarrow \boxed{c=-3/8}$$

$$\rightarrow 2a-6/8=1 \rightarrow \boxed{a=7/8}$$

$$\begin{cases} 2b+2d=0 \\ 3b+7d=1 \end{cases} \xrightarrow{3\cdot \text{Ecuación } 1^{a} - 2\cdot \text{Ecuación } 2^{a}} \begin{cases} 6b+6d=0 \\ -6b-14d=-2 \end{cases}$$

$$-8d=-2 \rightarrow \boxed{d=2/8}$$

$$\rightarrow 6b+12/8=0 \rightarrow \boxed{b=-12/8}$$

La matriz inversa es:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/8 & -12/8 \\ -3/8 & 2/8 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

Se podría comprobar que también se cumple:

$$A^{-1} \cdot A = Id$$

5. Resolución de ecuaciones matriciales

Las ecuaciones matriciales son ecuaciones algebraicas donde los coeficientes y las incógnitas son matrices.

Ejemplos:

a) Resuelve la ecuación $X \cdot B + B = B^{-1}$ siendo $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Encuentra la matriz B que cumple la ecuación $P^{-1}\cdot B\cdot P=A$ siendo

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\ y\ A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Resolver una ecuación matricial es obtener la matriz incógnita, que generalmente se denota como X, despejándola de la igualdad.

Para conseguirlo tenemos las siguientes reglas:

1) Si una matriz está sumando a un lado de la igualdad pasa restando al otro lado de la igualdad y al revés.

$$X+B=C\rightarrow X=C-B$$

$$X-B=C\rightarrow X=C+B$$

2) Si multiplicamos una matriz por la izquierda a un lado de la igualdad también lo tenemos que hacer en el otro lado de la igualdad por la izquierda. Igual por la derecha.

$$A\cdot X=B\rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\rightarrow Id\cdot X=A^{-1}\cdot B\rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

$$X\cdot A=B\rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}\rightarrow X\cdot Id=B\cdot A^{-1}\rightarrow X=B\cdot A^{-1}$$

Ejemplos:

Veamos la resolución de los dos anteriores ejemplos:

a) Resuelve la ecuación $X\cdot B+B=B^{-1}$ siendo $B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

$$X\cdot B+B=B^{-1}\Rightarrow X\cdot B=B^{-1}-B\Rightarrow X=\left(B^{-1}-B\right)\cdot B^{-1}\Rightarrow X=B^{-1}\cdot B^{-1}-Id$$

Necesitamos calcular la inversa de B:

$B^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Debe cumplirse:

$$\mathrm{B}\cdot\mathrm{B}^{-1}=Id\rightarrow\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2a-c&2b-d\\-a+2c&-b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}2a-c=3\\2b-d=0\\-a+2c=0\\-b+2d=3\end{cases}$$

Pudiendo separar las 4 ecuaciones en 2 sistemas de 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a - c = 3 \\ -a + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 2a - 3 \\ -a + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow -a + 4a - 6 = 0 \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow c = 4 - 3 = 1$$

$$\begin{cases} 2b - d = 0 \\ -b + 2d = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 2b \\ -b + 2d = 3 \end{cases} \rightarrow -b + 4b = 3 \rightarrow 3b = 3 \rightarrow b = 1 \rightarrow d = 2$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Así la solución es

$$X = B^{-1} \cdot B^{-1} - Id = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Encuentra la matriz B que cumple la ecuación $P^{-1} \cdot B \cdot P = A$ siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejemos B en la ecuación

$$P^{-1} \cdot B \cdot P = A \xrightarrow[\text{Multiplicamos por } P^{-1} \text{ por la derecha}]{\text{Multiplicamos por P por la izquierda}} B = P \cdot A \cdot P^{-1}$$

Necesitamos calcular la inversa de P:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}.$$

Debe cumplirse:

$$\mathrm{P} \cdot \mathrm{P}^{-1} = Id \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+k \\ -a+g & -b+h & -c+k \\ -d+g & -e+h & -f+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} a+d+g=1 \\ b+e+h=0 \\ c+f+k=0 \\ -a+g=0 \\ -b+h=1 \\ -c+k=0 \\ -d+g=0 \\ -e+h=0 \\ -f+k=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+d+g=1 \\ b+e+h=0 \\ c+f+k=0 \\ a=g \\ -b+h=1 \\ k=c \\ d=g \\ h=e \\ -f+k=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g+g+g=1 \\ b+e+e=0 \\ c+f+c=0 \\ -b+e=1 \\ -f+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{g=1/3} \\ b=-2e \\ f=-2c \\ b=e-1 \\ c=f+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2e=e-1 \\ c=-2c+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{e=1/3} \\ \boxed{c=1/3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b=-2/3} \\ \boxed{f=-2/3} \\ \boxed{a=g=1/3} \\ \boxed{d=g=1/3} \\ \boxed{h=e=1/3} \\ \boxed{k=c=1/3} \end{cases}$$

Así queda la inversa de P como

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la matriz B solución de la ecuación matricial es:

$$B = P \cdot A \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Nota: Se observa en este último ejemplo que es necesario un método más ágil y cómodo para el cálculo de la inversa. Lo volveremos a ver con el uso de determinantes (¿qué será?).

Ejercicios

1. Calcular la inversa de las siguientes matrices:

   a) $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $D=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

2. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   Calcule ***k*** tal que se cumpla la siguiente igualdad $\left(A-k\cdot Id\right)^2=0$

3. Calcule la matriz X, en la ecuación matricial $B\left(2A+Id\right)=AXA+B$ siendo

   $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Sea I la matriz identidad de orden 2 y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Halle X para que $BX+B=B^2+I$.

5. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Calcula A^tA y AA^t, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

   b) Encuentra las matrices de la forma $Y=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, tales que $A^tAY=Y$

   c) Encuentra todas las matrices de la forma $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tales que: $AA^tX=X$

6. Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde a, b y c son tres números reales.

   a) Encuentra A^n para todo natural n.

   b) Calcula $\left(A^{35}-A\right)^2$

7. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula A^n, siendo n un número natural.

8. Si I es la matriz identidad de orden 2 y $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, halla el valor que deben tener x e y para que se cumpla la igualdad $A^2 - xA - yI = 0$.

9. Calcula los valores de x para que la matriz $A=\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}$ verifique la ecuación $A^2 - 6A + 9I = 0$, donde I y 0 son, respectivamente, las matrices identidad y nula de orden tres.

10. Siendo $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, halla los valores de a y b de forma que $A^2 - 2A = B$.

Soluciones:

1. $B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ $C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ La matriz D no tiene inversa.
2. *K* = *1*
3. $X = 2\begin{pmatrix}2 & 5 & -9\\ 3 & 9 & -16\\ -4 & -11 & 19\end{pmatrix}$
4. $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
5. $A^tA = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $AA^t = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix}0\\ b\\ 0\end{pmatrix}$, *donde* $b \in \mathbb{R}$ $X = \begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}$, *donde* $x \in \mathbb{R}$
6. A^n= 0 para $n \geq 3$. $\left(A^{35} - A\right)^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & ac\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$
7. $A^n = \begin{pmatrix}3^n & \frac{3^n - 1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
8. $x = 3,\ y = -8$
9. x = 3
10. $Si\ a = 0;\ b = \frac{-1}{2}.\ Si\ a = 2;\ b = \frac{1}{2}$

Tema 2. Determinantes

¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.

1. Definición general de determinantes

Solo se habla de determinantes en matrices cuadradas.

A cada matriz **cuadrada** A se le asigna un escalar denominado **determinante de A**, denotado por |A| o por det(A). Este escalar se obtiene como combinación lineal de los elementos que componen la matriz.

La definición de determinante es más compleja, pero nos limitamos a determinantes de matrices de orden 2 y 3. Aprenderemos una forma cómoda y rápida de calcular dicho determinante de la matriz.

2. Determinante de matrices de orden 1, 2 y 3.

2.1. Determinante de matrices cuadradas de orden 1

$|a_{11}| = a_{11}$ El determinante es el propio número

2.2. Determinante de matrices cuadradas de orden 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

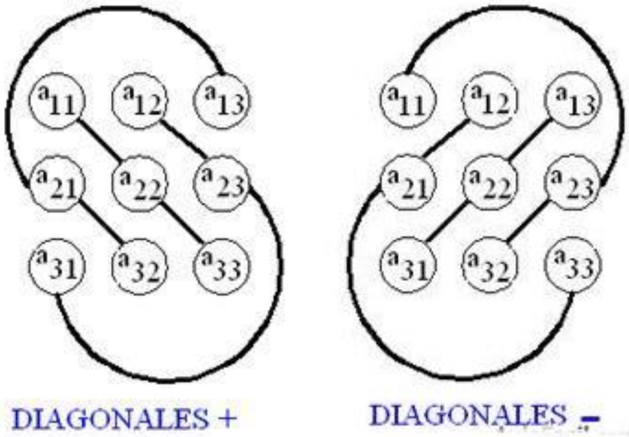
(*El producto de la diagonal principal - el producto de la diagonal secundaria*)

2.3. Determinante de matrices cuadradas de orden 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$$

Existen dos métodos para calcular este determinante de orden 3:

1. Regla de Sarrus



Los términos con signo + están formados por los elementos de la diagonal principal y los de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto.
Los términos con signo − están formados por los elementos de la diagonal secundaria y los de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto.

Ejemplo:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1{\cdot}5{\cdot}9 + 2{\cdot}6{\cdot}7 + 3{\cdot}4{\cdot}8 - 3{\cdot}5{\cdot}7 - 2{\cdot}4{\cdot}9 - 1{\cdot}6{\cdot}8 = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-6 + 0 + 0) = 6$

2. <u>Otro método</u>

Para calcular el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Escribes a continuación, detrás de la 3ª columna, las **dos** primeras:

$$\left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

Ahora realizas las sumas de los productos de los 3 elementos de la diagonal principal y diagonales paralelas a la misma (que son las líneas azules del dibujo). Y restas los productos de 3 elementos en la diagonal secundaria y paralelas a ella (son las líneas rojas del dibujo).

$$\left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}\right)$$

Ejemplo:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 4 & -4 & -2 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 4 & -4 & -2 \end{array}\right| = -4-24+0-(0-6+8) = -30$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right| = -4+0+0-(0+0+0) = -4$

Ejercicio 1. Calcular los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1-a^2 & a-1 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{vmatrix}$

Solución: a) a^2+25 *b) 23* *c)* $2-2a^2$ *d)* -2 *e) 79* *f)* $-m^2-4m+1$

3. Determinante de algunas matrices especiales

En este apartado calcularemos de forma sencilla el valor de los determinantes de algunas matrices cuadradas especiales.

1. Determinante de la matriz nula.

La matriz cuadrada nula es aquella en la que todos los coeficientes son cero, se denota como 0. Su determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-(0+0+0) = 0$$

2. Determinante de la matriz identidad

Recordemos que la matriz identidad es aquella donde todos los elementos fuera de la diagonal son nulos y los de la diagonal vale 1. Su determinante es 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-(0+0+0) = 1$$

3. Determinante de la matriz diagonal

Matrices diagonales son aquellas donde los elementos fuera de la diagonal principal son nulos, pudiendo valer cualquier valor los elementos de la misma. Su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4+0+0-(0+0+0) = -4$$

4. Determinante de la matriz triangular

El valor de un determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4+0+0-(0+0+0) = -4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -4+0+0-(0+0+0) = -4$$

4. Propiedades de los determinantes

En este apartado veremos las propiedades más importantes de los determinantes, a partir de las cuales será fácil calcular el valor de los determinantes de algunas matrices.

Propiedad 1: el determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta:

$$det(A) = det(A^t)$$

Importante: a partir de esta propiedad todas las propiedades de los determinantes que relacionen columnas serán ciertas también para las filas y al revés.

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-5)-(-4)\cdot 2 = \boxed{23} \Rightarrow |A^t| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-5)-2\cdot(-4) = \boxed{23}$$

$$!!IGUALES!!$$

Propiedad 2: si los elementos de una fila (o columna) de una matriz se multiplican por un número el determinante de la nueva matriz queda multiplicado por dicho número.

Ejemplo:

Sí $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to |A| = 13$.

- Si multiplicamos la columna 3ª de la matriz A por 2 obtenemos otra matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ cuyo determinante valdrá 2 veces el determinante de A.

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & -3 & 10\\ 2 & 3 & 12\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=26 \rightarrow |B|=2\cdot|A|$$

- Si cambiamos el signo (multiplicamos por -1) de los elementos de la 2ª fila de la matriz obtenemos otra matriz $C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ -2 & -3 & -6\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ cuyo determinante valdrá lo mismo que el de A pero cambiado de signo.

$$|C|=\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ -2 & -3 & -6\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-13 \rightarrow |C|=-|A|$$

Propiedad 3: Si a una matriz cuadrada A de orden **n** la multiplicamos por un número **k** (B=k·A), el determinante de la nueva matriz, B, es $\mathbf{k^n}$ veces el determinante de A:

$$det(k\cdot A)=k^n\cdot det(A)$$

Ejemplo:

$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow|A|=13$ Obtenemos una matriz B al multiplicar la matriz A por 3.

$$B=3\cdot A=\begin{pmatrix}3 & -9 & 15\\ 6 & 9 & 18\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\rightarrow|B|=3^3\cdot|A|=27\cdot13=351$$

Propiedad 4: Si los elementos de una columna i-esima (o una fila) de una matriz cuadrada se puede descomponer como suma de dos números, su determinante será igual a la suma de los determinantes de las matrices que tienen las demás columnas (filas) iguales y la columna i-esima de cada uno de ellas uno de las elementos de la suma.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow|A|=13$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3+2\\ 2 & 3 & 5+1\\ 0 & 1 & 1+0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1 & -3 & 3+2\\ 2 & 3 & 5+1\\ 0 & 1 & 1+0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -3 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=[3-0+6-0+6-5]+[0+0+4-0-0-1]=10+3=13$$

Propiedad 5: El determinante del producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices.

$$det(A\cdot B)=det(A)\cdot det(B)$$

Propiedad 6: Si una matriz permuta dos columnas (filas), su determinante cambia de signo.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

Intercambiamos la fila 3ª y la 1ª. Comprobamos que el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0+6-6-3-10 = -13 = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Propiedad 7: Si una matriz tiene una fila o una columna formada por ceros su determinante es cero.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 8: Si en una matriz tiene dos filas o columnas iguales o proporcionales su determinante es cero.

Ejemplo:

$$\{\text{Fila } 1^a = \text{Fila } 3^a\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 15-18-30-(15-30-18) = 0$$

$$\{\text{Fila } 3^a = 2\cdot\text{Fila } 1^a\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -16+4-(-16+4) = 0$$

Propiedad 9: Si en una matriz cuadrada los elementos de una fila (o columna) son combinación lineal de las restantes filas (o columnas) entonces su determinante es cero. Y viceversa.

Ejemplo:

$$\{\text{Fila } 3^a = \text{Fila } 1^a + \text{Fila } 2^a\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 33-54-(45-66) = 0$$

Propiedad 10: El determinante de la matriz A^{-1} es:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Ejemplo:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \rightarrow B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos sus determinantes respectivos:

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3$$

$$\left|B^{-1}\right|=\begin{vmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{vmatrix}=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}=\frac{1}{|B|}$$

Propiedad 11: Si a los elementos de una fila (columna) se les suma una combinación lineal de otras filas (o columnas), su determinante no varía.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=13$$

Si le sumo a la fila 2ª la fila 1ª multiplicada por -2

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 3 & 6 \\ + & -2 & 6 & -10 \\ \hline & 0 & 9 & -4 \end{array}$$

Con la nueva fila 2ª el determinante queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=9+4=13$$

5. Cálculo de la matriz inversa.

Una **matriz es regular** si tiene inversa.

Una matriz tiene inversa si su determinante **no** es cero. En caso contrario la matriz no tiene inversa.

$$|A|\neq 0 \rightarrow A \text{ es regular o inversible } \left(\text{existe } A^{-1}\right)$$

$$|A|=0 \rightarrow A \text{ es singular o no tiene inversa } \left(\text{no existe } A^{-1}\right)$$

La fórmula del cálculo de la inversa de una matriz es:

$$A^{-1}=\frac{\left[Matriz\ adjunta(A)\right]^{t}}{|A|}=\frac{Matriz\ adjunta\left(A^{t}\right)}{|A|}$$

Para utilizar esta fórmula necesitamos definir varios conceptos:

Menor complementario

Se llama menor complementario de un elemento a_{ij} al valor del determinante de orden n−1 que se obtiene al suprimir en la matriz la fila i y la columna j.

Adjunto

Se llama adjunto del elemento a_{ij} al menor complementario anteponiendo:

- El signo + si i+j es par.
- El signo − si i+j es impar.

Matriz adjunta

Se llama matriz adjunta a la compuesta por todos los adjuntos de cada elemento de la matriz inicial.

Ejemplos:

a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ veamos si se puede calcular su inversa, para ello comprobamos si su determinante es 0 o no.

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=4\neq 0 \rightarrow$Existe la inversa de A y proseguimos con su cálculo.

Para hacer el adjunto de cada elemento de la matriz basta con aplicar esta plantilla de cambio de signos:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Vamos cambiando el signo al menor complementario de la posición con un menos (—) y dejamos sin cambio de signo el de posición con un más (+).

$$\text{Adjunto de } a_{11}=\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{-1} & 0 & 3 \\ \cancel{2} & -1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=3$$

$$\text{Adjunto de } a_{12}=-\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ -1 & \cancel{0} & 3 \\ 2 & \cancel{-1} & 4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-(-10)=10$$

$$\text{Adjunto de } a_{13}=\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ -1 & 0 & \cancel{3} \\ 2 & -1 & \cancel{4} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1$$

$$\text{Adjunto de } a_{21} = -\begin{vmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ \cancel{2} & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{Adjunto de } a_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \cancel{0} & 1 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 2 & \cancel{-1} & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{Adjunto de } a_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 2 & -1 & \cancel{4} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$$

$$\text{Adjunto de } a_{31} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{-1} & 0 & 3 \\ \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Adjunto de } a_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & \cancel{0} & 1 \\ -1 & \cancel{0} & 3 \\ \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{4} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$\text{Adjunto de } a_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ -1 & 0 & \cancel{3} \\ \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La matriz adjunta de A queda:

$$Adjunta(A) = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Y la traspuesta de la matriz adjunta de A queda:

$$Adjunta(A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 10 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de *A* es $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 10 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Procedemos al cálculo de su inversa.

1º. Calculo del determinante: $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ Existe la inversa.

2º. Traspuesta de *B* → $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

3º. Matriz adjunta de B^t → $Adjunta(B^t) = \begin{pmatrix} |2| & -|4| \\ -|0| & |1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4º. Inversa de B → $B^{-1} = \frac{1}{|B|} Adjunta(B^t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

6. Rango de una matriz

Menor de orden k de una matriz A de dimensión *mxn* es toda submatriz con *k* filas y *k* columnas pertenecientes a la matriz *A*, obtenida quitando filas y columnas de la matriz original.

Ejemplo:

Dada la matriz A de dimensión 3x4, vamos a detallar distintos menores de distinto orden de dicha matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

- Menores de orden 4:

  No existen. La matriz es de dimensión 3x4, no puedo extraer una matriz de orden 4.

- Menores de orden 3: Debo de quitar una columna, obteniendo 4 menores.

$$\text{Quito la columna } 4^{a} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \qquad \text{Quito la columna } 3^{a} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Quito la columna } 2^{a} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{pmatrix} \qquad \text{Quito la columna } 1^{a} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

- Menores de orden 2 (hay muchos, detallamos algunos):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}; \ldots.$$

- Menores de orden 1 (hay doce, cada uno de los elementos de la matriz):

  (1); (2); (3); (4); (5);…

Rango de una matriz A de dimensión *mxn* es el orden del mayor menor con determinante no nulo de la matriz A.
También se define como el número de filas o columnas linealmente independientes de la matriz A.

Una forma de obtener el rango de una matriz:

1) Calculamos todos los menores de mayor dimensión de la matriz A.
   k = mínimo(m,n)
   1.a. Si algún menor es distinto de cero → rang(A) = k
   1.b. Si todos los menores son iguales a cero → rang(A) < k

2) Calculamos los menores de dimensión k – 1.
   2.a Si algún menor es distinto de cero → rang(A) = k – 1
   2.b Si todos los menores son nulos → rang(A) < k – 1

Y así sucesivamente….

Esto termina cuando algún menor es distinto de cero, siendo nulos los calculados antes de mayor dimensión.

Una segunda forma:
Observar las filas y columnas de la matriz buscando líneas nulas, iguales o proporcionales. También buscar si una línea es combinación lineal de las otras.

Ejemplos:

1. Calcular el rango de $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Comparando las filas las tres son iguales, su rango es 1.
2. Calcular el rango de $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Comparando las filas las tres son iguales, su rango es 1.
3. Calcular el rango de $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Comparando las filas o las columnas hay 2 iguales, su rango es 2.
4. Calcular el rango de $E=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Como hay una columna nula su rango es como mucho 2. $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-2-6=-8\neq 0$ y su rango es 2.

5. Calcular el rango de $F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Como hay dos columnas nulas su rango es 1.

6. Calcular el rango de $G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Su rango como mucho es 3, veamos el valor de su determinante $|G|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=9+2=11\neq 0$. El rango es 3.

7. Calcular el rango de $H=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Su rango como mucho es 3, veamos el valor de su determinante $|H|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}=3-3=0$. El rango no es 3. Busquemos un menor de orden 2 no nulo, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$. El rango es 2. Puedes observar que en la matriz H la 2ª y 3ª filas son proporcionales, por ello no puede ser 3 y el determinante de la matriz sale 0.

8. Calcular el rango de $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. No se observa igualdad o proporcionalidad entre filas o entre columnas. Procedemos con el método del determinante.

   ¿Rango de M es 3? $|M|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}=-1-2+3=0$ El rango no es 3.

   ¿Rango de M es 2? De $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ sacamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$.

   El rango de M es 2.

9. Calcular el rango de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \end{pmatrix}$. En este caso requiere más trabajo.

   Buscaremos el menor de la matriz más grande posible con determinante no nulo.

<u>Paso 1.</u> Calculamos el determinante de los menores de orden 3 = mínimo(3,4):

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{vmatrix} = 0 \text{ la columna } 3^{\text{a}} \text{ es tres veces la columna } 1^{\text{a}} \\[2ex]
\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 \\ -3 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ la columna } 2^{\text{a}} \text{ es tres veces la columna } 1^{\text{a}} \\[2ex]
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \\ -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ la columna } 2^{\text{a}} \text{ es dos veces la columna } 1^{\text{a}} \\[2ex]
\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 9 \\ -6 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 \\ -3 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 9 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ la columna } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \text{ son iguales}
\end{array}\right\} \rightarrow \text{rang}(A)<3$$

<u>Paso 2.</u> Calculamos el determinante de los menores de orden 2, en busca de uno no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{.... Pero hay uno que} \quad \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 81 = 87 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A)=2$$

Ejercicios

1. Calcular los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1-a^2 & a-1 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{vmatrix}$

2. Calcula la matriz inversa, si es posible, de las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Averigua para que valor de x las matrices son regulares:

$A = \begin{pmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 0 \\ x+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -x \\ 2 & x & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot X + 2 \cdot B = 3 \cdot C$

5. Calcule el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

6. Discútase, según el valor de a, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

7. Discutir, en función del número real m, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

8. Determina el rango de las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

9. Indica el rango de la matriz identidad de orden 3 y de la matriz nula.

10. Determina el rango de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

11. Resuelve la ecuación matricial $2A = AX + B$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

12. Estudia el rango de la matriz M según los valores de a. ¿Existe algún valor de a que haga que $ran(M) = 1$?

$$M=\begin{pmatrix}a & 1 & 4\\ a & 2 & 4\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix}$$

Soluciones:

1. *Solución: a)* a^2+25 *b) 23* *c)* $2-2a^2$ *d)* -2 *e) 79* *f)* $-m^2-4m+1$

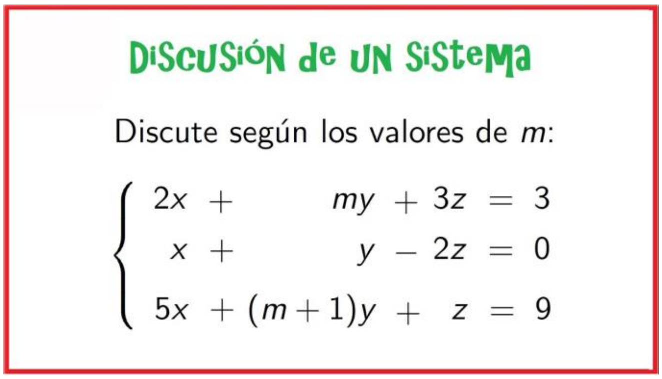
2. $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & -2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ $\mathrm{B}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ $\mathrm{C}^{-1}=\frac{1}{130}\begin{pmatrix}10 & 20 & 6\\ -10 & -20 & 20\\ 25 & -15 & 2\end{pmatrix}$ $\mathrm{D}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$

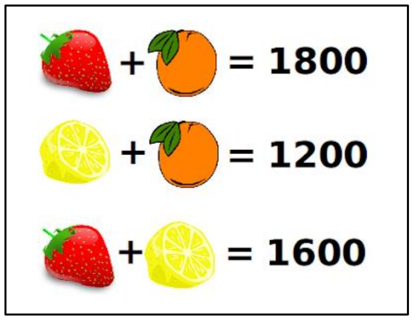
3. *A es regular para cualquier valor de x distinto de 0 y 1.*
   B es regular para cualquier número distinto de 6.
   C es regular para cualquier valor de x distinto de 0 y 6.

4. $X=\begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\ -5 & 5 & 2\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix}$

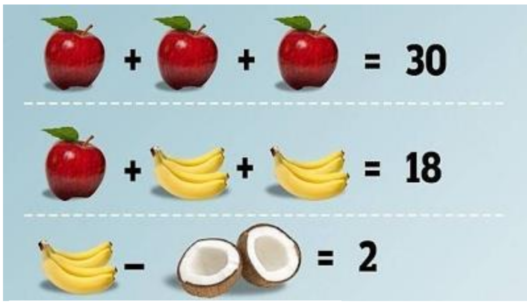
5. *Rango es 2*
6. *Si a = –1/3 el rango es 2 y si a es distinto de –1/3 el rango es 3.*
7. *Si m = 3 o m = –2 el rang(A) = 2 y si m es distinto de –2 y 3 el* rang(A)=3.
8. *El rango de A es 1 y el de B es 2.*
9. *El rango de* Id_3 *es 3 y el de la matriz nula es 0.*
10. *El rango de A es 3 y el de B es 2*
11. $X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$
12. *Si* $4 - a^2 = 0 \rightarrow a = 2, a = -2$*: Las dos últimas filas coinciden →* $ran(M) = 2$.
    Si $4 - a^2 \neq 0 \rightarrow a \neq 2, a \neq -2$*:* $ran(M) = 3$*. El rango de M no puede ser igual a 1 para ningún valor de a, ya que las dos primeras filas son linealmente independientes para cualquier a.*

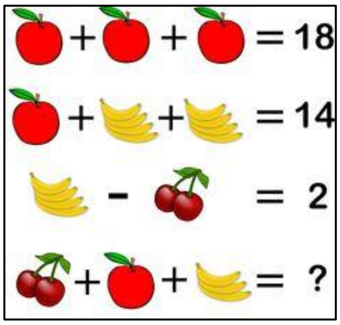
Tema 3. Sistemas de ecuaciones lineales

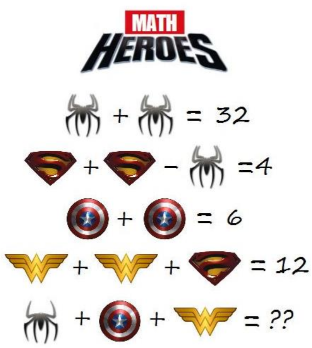


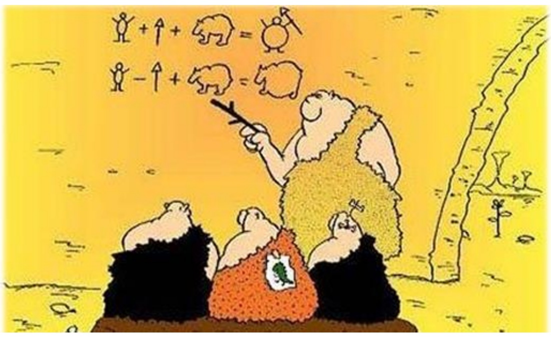


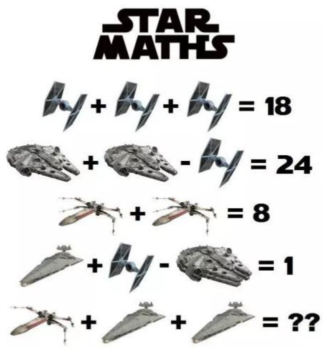
¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.











1. Definiciones, tipos de sistemas y distintas formas de expresarlos

1.1. Definición, sistemas equivalentes

Se llama **sistema de ecuaciones lineales** al conjunto formado por **m** ecuaciones con **n** incógnitas.

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}\cdot x_2 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 & (2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m & (m) \end{array}\right\} \text{Siendo} \left\{\begin{array}{l} a_{ij} \textit{ coeficientes del sistema} \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \textit{ incógnitas} \\ b_i \textit{ términos independientes} \end{array}\right.$$

Ejemplos:

1.
$$\left.\begin{array}{ll} 3x-4y+5z=13 & (1) \\ 2x+3y=2 & (2) \\ -x+y-z=-3 & (3) \end{array}\right\} 3 \textit{ ecuaciones y } 3 \textit{ incógnitas}$$

2.
$$\left.\begin{array}{ll} 2x+3y+t=6 & (1) \\ x-t=0 & (2) \end{array}\right\} 2 \textit{ ecuaciones y } 3 \textit{ incógnitas}$$

Resolver un sistema es obtener todas sus posibles soluciones.
Debiendo ser solución de todas las ecuaciones.

Ejemplos:

1. La solución es $x=1;\ y=0;\ z=2$
2. Las soluciones son $x=t;\ y=2-t$

Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Formas de obtener sistemas equivalentes:

1) Sumar una constante a ambos miembros de la igualdad de una o varias ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 3x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+10=1+10 \\ 3x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+10=11 \\ 3x+y=3 \end{array}\right\}$$

2) Multiplicar por una constante, distinta de cero, a ambos lados de la igualdad de una o varias ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 3x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3(x+y=1) \\ 3x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+3y=3 \\ 3x+y=3 \end{array}\right\}$$

3) Sustituir una ecuación por una combinación lineal de la misma con las restantes ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 3x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 2(x+y=1)-(3x+y=3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ -x+y=-1 \end{array}\right\}$$

4) Añadir o quitar ecuaciones que sean combinación lineal de las restantes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 3x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 3x+y=3 \\ 2(x+y=1)-(3x+y=3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 3x+y=3 \\ -x+y=-1 \end{array}\right\}$$

1.2. Tipos de sistemas de ecuaciones.

Existen dos criterios para clasificar los sistemas de ecuaciones lineales:

Los sistemas se pueden clasificar según el *valor de los términos independientes*:

- **Homogéneos**: todos los términos independientes son nulos.
- **No homogéneos**: algún término independiente es diferente de cero.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ 3x+y=2 \end{array}\right\} \textit{No homogéneo}$$

$$\left.\begin{array}{r} -5x+y=0 \\ 3x+y=0 \end{array}\right\} \textit{Homogéneo}$$

Los sistemas se pueden clasificar según el *número de soluciones*:

- Compatibles: tienen solución
  - **Compatibles Determinados**: tienen una única solución
  - **Compatibles Indeterminados**: tienen infinitas soluciones
- **Incompatibles**: no tienen solución.

Ejemplos:

1) $\left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ 2x+y=3 \end{array}\right\}$ Tiene una única solución → $x=1;\ y=1$

2) $\left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ 3x-3y=0 \end{array}\right\}$ Tiene infinitas soluciones → $x=y$

3) $\left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$ No tiene solución

1.3. Expresión de sistemas en forma matricial

Una manera más cómoda y útil de trabajar con los sistemas de ecuaciones lineales es de forma matricial.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_2 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}\right\}$$ de forma matricial se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

Asignando a cada matriz una letra:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

El sistema queda: $AX = B$

La matriz **A** es la **matriz de los coeficientes**.
La **matriz ampliada A/B** es la matriz que resulta de añadirle a la matriz de los coeficientes una columna con los términos independientes:

$$A/B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 3z = 2 \\ -x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

La expresión matricial del sistema es:

$$AX = B, \text{ es decir, } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Sistemas de Cramer

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es de Cramer si cumple las siguientes condiciones:
- Mismo número de ecuaciones que de incógnitas *n=m*
- El determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero |A|≠0

Los sistemas de Cramer son todos compatibles determinados (una sola solución).

Existen dos métodos de resolución de los sistemas de Cramer.

Método 1: a partir de la matriz inversa.

El sistema de Cramer se puede escribir en forma matricial como **AX=B**, y tal que **A** tiene inversa al ser una matriz cuadrada con determinante distinto de cero.
Así podemos expresar las soluciones como:

$$\mathbf{X=A^{-1}\cdot B}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ x-y&=0 \\ x-z&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3 \text{ } ecuaciones = 3 \text{ } incógnitas. |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{El sistema es de Cramer}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{La solución es } x = y = z = 1$$

Método 2: por fórmula

En este método no tendremos que calcular la matriz inversa, sino tantos determinantes como incógnitas.

Ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ x-y&=0 \\ x-z&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0; \text{ la fórmula es:}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3}=\frac{3}{3}=1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3}=\frac{3}{3}=1 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{3}=\frac{3}{3}=1$$

Ejercicio 1: Resuelve el sistema con el método de Cramer, si es posible.

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-z=-5 \\ -x-2y+z=4 \\ 5x+4z=8 \end{array}\right\}$$

3. Teorema de Rouchè-Fröbenius. Discusión de un sistema

Sea un sistema con m ecuaciones lineales y n incógnitas, el sistema es compatible (tiene soluciones) si, y sólo si, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada

$$Sistema\ compatible \Leftrightarrow rang\left(A\right)=rang\left(Ampliada\right)$$

Según la relación entre el rango y el número de incógnitas tenemos que el sistema será compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Veámoslo en la siguiente tabla resumen:

Rang(A) ≠ Rang(Am) → El sistema no tiene solución

Rang(A) = Rang(Am) → El sistema tiene solución, pero hay dos opciones:

- **Rang(A) = Rang(Am) = nº incógnitas** → El sistema tiene una solución única
- **Rang(A) = Rang(Am) < nº incógnitas** → El sistema tiene infinitas soluciones

4. Discusión y resolución de sistemas por Gauss.

El método de Gauss también nos permite discutir los sistemas en función de los distintos valores del parámetro.

Apliquémoslo a un ejemplo:

$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases}$ Su matriz ampliada es $Am=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Vamos a transformarla hasta conseguir una matriz triangular:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Fila } 3^a - a\cdot\text{Fila } 1^a]{\text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

El sistema equivalente queda:

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ \quad (a-1)y+(1-a)z=0 \\ \qquad (2-a-a^2)z=1-a \end{cases}$$

Mirando la tercera ecuación los casos distintos aparecen al considerar cuando $2-a-a^2=0$. Resolviendo esta ecuación: $a=1 \text{ o } a=-2$

Distinguimos tres casos:

- Caso 1. $a \neq 1 \text{ y } a \neq -2$. El sistema tendrá una única solución ya que se podrá hallar el valor de z y después el de las otras incógnitas.

- Caso 2. $a=1$ El sistema queda:
  $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$ El sistema tiene infinitas soluciones $\begin{cases} x=1-y-z \\ y=y \\ z=z \end{cases}$

- Caso 3. $a=-2$ El sistema queda:
  $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ -3y+3z=0 \\ 0=3 \end{cases}$ El sistema no tiene solución al aparecer una igualdad imposible.

5. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por Cramer.

Hemos resuelto sistemas con igual número de incógnitas que de ecuaciones cuando el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero (método de Cramer).

Vamos a ser más genéricos, resolviendo por Cramer todo tipo de sistema compatible; es decir sistemas en los que **rang(A) = rang(Am)** tanto si son compatibles determinados como indeterminados.

5.1. Sistemas compatibles determinados

Para que un sistema sea compatible determinado es necesario que el número de ecuaciones sea mayor o igual que el de incógnitas, y que se cumpla que ***rang(A)=rang(Am)=número de incógnitas***.

De esta forma hay ecuaciones sobrantes y podemos eliminarlas. Es importante comprobar que las ecuaciones que no se eliminan sean independientes, lo cual se comprueba viendo que el rango del nuevo sistema continúe siendo el mismo. El nuevo sistema se puede resolver por Cramer.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ 2x-y=-7 \\ 7x-2y=-14 \end{array}\right\}$$

El sistema no es de Cramer, **número de incógnitas ≠ número de ecuaciones**

Pero estudiemos si es compatible o no, utilizando los rangos:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El menor } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2=-3 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de A es 2}$$

$$Am=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -7 \\ 7 & -2 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El menor de orden 3 } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -7 \\ 7 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{El rango de Am es 2}$$

Luego ***rang(A) = rang(Am) = 2 = número de incógnitas*** → El sistema es compatible

Como el rango es 2, tenemos sólo 2 ecuaciones linealmente independientes, de forma que podemos eliminar una de las 3 ecuaciones, el rango del sistema continua siendo 2.
Vamos a quitar la tercera ecuación pues, cuando calculamos el rango de A comprobamos que, para los coeficientes de las dos primeras ecuaciones, el determinante es distinto de cero.

$\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ 2x-y=-7 \end{array}\right\}$ Este nuevo sistema, equivalente al anterior, es de Cramer, ya que cumple que Rang(A) = rang(Am) = número de ecuaciones = número de incógnitas = 2

La solución es $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}}{-3}=\dfrac{0}{-3}=0 \qquad y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}}{-3}=\dfrac{-21}{-3}=7$

Ejercicio 2: Resuelve el sistema con el método de Cramer si es posible.

$$\left.\begin{array}{l} x+3y=-5 \\ -x-y=2 \\ 5x+3y=-7 \end{array}\right\}$$

5.2. Sistemas compatibles indeterminados

Sea un sistema con m ecuaciones y n incógnitas, tal que **rang(A) = rang(Am) = r < n**, entonces el sistema es compatible indeterminado.
Tenemos que buscar un sistema equivalente con r ecuaciones y r incógnitas:

1. Tomamos **r** ecuaciones independientes (rango del sistema es **r**)
2. Pasamos **n-r** incógnitas a la derecha de la igualdad y las tratamos como parte del término independiente.
3. El sistema se resuelve por Cramer, dependiendo la solución de esos parámetros.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ -x-y+2z=0 \\ x+y+4z=6 \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad Am=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

Si calculamos los rangos se cumple que **rang(A) = rang(Am) = 2**. Luego el sistema es compatible indeterminado con un parámetro.
Como no observamos que ninguna ecuación sea igual o proporcional a otra, tomaremos la **z** como parámetro y las 2 primeras ecuaciones como independientes entre sí:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=3-z \\ -x-y=-2z \end{array}\right\}$$

$A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ por lo tanto el rango de la matriz de los coeficientes no será 2, tenemos que o bien coger la otra ecuación o cambiar de parámetro. Cambiaremos de parámetro tomando la **y**:

$$\left.\begin{array}{l} x+z=3-y \\ -x+2z=y \end{array}\right\}$$

$A''=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A''|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2+1=3\neq 0$ El rango de la matriz de los coeficientes es **2 = número de incógnitas = número de ecuaciones**. El sistema es de Cramer y podemos dar sus soluciones:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3-y & 1\\ y & 2\end{vmatrix}}{3}=\frac{6-2y-y}{3}=\frac{6-3y}{3}=2-y$$
$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3-y\\ -1 & y\end{vmatrix}}{3}=\frac{y+3-y}{3}=\frac{3}{3}=1$$
$$y=y$$

6. Resolución de sistemas homogéneos.

Recordemos que los sistemas homogéneos son los que tienen todos sus términos independientes nulos.

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=0 & (1)\\ a_{21}\cdot x_2+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=0 & (2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=0 & (m)\end{array}\right\}$$

Una de las características más relevantes es que todo sistema homogéneo es compatible, ya que la última columna de la matriz ampliada es nula, con lo que siempre **rang(A) = rang(Am)**.
Además, es fácil ver que todo sistema homogéneo tiene como solución la denominada solución trivial $\boldsymbol{x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0}$.

Para discutir y obtener la solución del de un sistema homogéneo tenemos el siguiente esquema **rang(A) = rang(Am) = r** con **n** incógnitas:

- Si **r = n**, compatible determinado. La única solución la solución trivial.
- Si **r < n**, compatible indeterminado.

Ejemplos:

1. Estudiar el número de soluciones del siguiente sistema en función de m, resolver cuando sea posible.
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0\\ x+my+mz=0\\ 2x+(m+1)y+2z=0\end{array}\right\}$$

Solución:
Obtengamos la matriz de coeficientes asociada al sistema y estudiemos su rango.
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0\\ x+my+mz=0\\ 2x+(m+1)y+2z=0\end{array}\right\}\rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m & m\\ 2 & m+1 & 2\end{pmatrix}$$
Veamos el rango de A en función de *m* igualando a 0 el determinante:

$$|A| = -m^2 + 2m - 1 \qquad -m^2 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-1)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2} = 1$$

Según el valor de *m* el sistema de ecuaciones puede ser de las 2 formas siguientes:

a) Si **m ≠ 1** → |A|≠0 y **rang(A) = 3**, sistema compatible determinado.

b) Si **m = 1** → |A| = 0 y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ → rang (A) = 1, sistema compatible indeterminado

Resolvamos el sistema en cada caso de los estudiados.

a) Si $m \neq 1$ (compatible determinado): La única solución es la trivial **x = y = z = 0**

b) Si $m = 1$ (compatible indeterminado):

$$\left.\begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{matrix}\right\} \to x + y + z = 0 \to z = -x - y \to \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x - y \end{cases}$$

---

2. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$$ donde *a* es un parámetro real

a) Discutir el sistema en función del valor de *a*
b) Resolver el sistema para *a = 0*
c) Resolver el sistema para *a = 1*

Solución:

a) Consideremos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema del problema:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & 2 & a^2 \end{array}\right)$$

Determinemos el rango de ambas.

- Rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 0 - (1 + 0 + 0) = 0; \text{ El rango de A} < 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \text{ El rango de A es 2}$$

Independientemente del valor de *a*.

- Rango de Matriz ampliada A/B:

Cambiamos la columna tercera de A por la de los términos independientes y veamos si se anula el determinante: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 0 - (-1+0+0) = a^2 - 2a + 1$

Si igualamos a 0 nos sale *a* = *1*.

Hay dos situaciones diferentes a estudiar, en función del valor de *a*:

- $a \neq 1$ →Rango de A/B = 3 distinto del rango de A = 2. Sistema sin solución.
- *a* = *1* → Rango de A = Rango de A/B = 2 < número de incógnitas. El sistema tiene infinitas soluciones (dependientes de 1 parámetro)

b) Para *a* = *0* el sistema es sin solución según lo visto en el apartado anterior.
c) Para *a* = *1* el sistema es con infinitas soluciones. Las determinamos:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$ Quitamos la primera ecuación y nos quedamos con el sistema:

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{La solución es } \begin{cases} y = 2 - z \\ x = 1 - 2z \\ z = z \end{cases}}$$

---

3. Sea *a* un parámetro real. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 + a \\ (1-a)x + y + 2z = 1 \\ ax - y - z = 1 - a \end{cases}$$

a) Discutir el sistema en función del valor de *a*.
b) Resolver el sistema para *a* = *0*.
c) Resolver el sistema para *a* = *1*.

Solución:

a) Consideremos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema del problema:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 + a \\ (1-a)x + y + 2z = 1 \\ ax - y - z = 1 - a \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2+a \\ 1-a & 1 & 2 & 1 \\ a & -1 & -1 & 1-a \end{array}\right)$$

Determinemos el rango de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2a^2 - 1 + a - (a - a + a^2 - 2) = a^2 + a = 0 \rightarrow a(a+1) = 0;$$

El determinante de A es 0 cuando $a = 0$ y cuando $a = -1$

Hay tres situaciones diferentes, en función del valor de a:

- $a \neq 0 \ y \ a \neq -1$ →Rango de A = Rango de A/B = número de incógnitas = 3. El sistema tiene una única solución.

- $a=0$ → $|A|=0;\quad A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&-1&-1\end{pmatrix}$ →Rango de A = 2 ya que $\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$

  $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\1&1&2&1\\0&-1&-1&1\end{array}\right)$ →Probamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 3ª columna $\begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=1+0-2-(0+0-1)=0$ →Rango de A/B=2

  Rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = número de incógnitas
  El sistema tiene infinitas soluciones.

- $a=-1$ → $|A|=0;\quad A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ → Rango de A = 2 ya que $\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=3\neq 0$

  $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\2&1&2&1\\-1&-1&-1&2\end{array}\right)$ Como la 3ª columna y la 1ª son iguales, probamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna

  $\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&2&1\\-1&-1&2\end{vmatrix}=-4-1-1-(-2+2+1)=-7\neq 0$ →Rango de A/B=3

  Rango de A ≠ Rango de A/B. El sistema no tiene solución.

b) Para $a=0$ el sistema tiene infinitas soluciones. Debemos eliminar una ecuación y la solución dependerá de un parámetro.

$\begin{cases}x+z=2\\x+y+2z=1\\-y-z=1\end{cases}$ quitamos la ecuación 2ª que es 1ª - 3ª y queda $\begin{cases}x+z=2\\-y-z=1\end{cases}$

Despejando la z la solución es $\boxed{\begin{cases}x=2-z\\y=-1-z\\z=z\end{cases}}$

c) Para $a=1$ el sistema tiene una única solución.

El sistema queda $\begin{cases}x+y+z=3\\y+2z=1\\x-y-z=0\end{cases}\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&-1&-1\end{pmatrix};\quad A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&2&1\\1&-1&-1&0\end{array}\right)$

Resolviendo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3&1&1\\1&1&2\\0&-1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&-1&-1\end{vmatrix}}=\frac{-3-1+1+6}{-1+2-1+2}=\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&3&1\\0&1&2\\1&0&-1\end{vmatrix}}{2}=\frac{-1+6-1}{2}=2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\1&-1&0\end{vmatrix}}{2}=\frac{1-3+1}{2}=\frac{-1}{2}$$

4. Discútase, en función del parámetro real k, el siguiente sistema de ecuaciones lineales. Resolver cuando sea posible.

$$\begin{cases}kx+3y=0\\3x+2y=k\\3x+ky=0\end{cases}$$

Solución:

Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}k&3\\3&2\\3&k\end{pmatrix}$; $A/B=\begin{pmatrix}k&3&0\\3&2&k\\3&k&0\end{pmatrix}$

Estudiemos el rango de A/B que puede ser 3 y el de A solo puede llegar a ser 2.

$$\begin{vmatrix}k&3&0\\3&2&k\\3&k&0\end{vmatrix}=9k-k^3=0\rightarrow k\left(9-k^2\right)=0\rightarrow\begin{cases}k=0\\9-k^2=0\rightarrow 9=k^2\rightarrow k=\pm3\end{cases}$$

Estudiemos por separado cada uno de los cuatro casos posibles:

CASO 1. $k\neq0;\ k\neq-3;\ k\neq3$ →$|A/B|\neq0$ →El rango de A/B es 3 y como el rango de A es 2 o menos, entonces el sistema <u>no tiene solución</u>.

CASO 2. $k=0$ →El sistema queda $\begin{cases}3y=0\\3x+2y=0\\3x=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=0\\x=0\end{cases}$ →El sistema tiene <u>una única solución</u>: $\boxed{x=y=0}$

CASO 3. $k=3$→El sistema queda $\begin{cases} 3x+3y=0 \\ 3x+2y=3 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$ La ecuación 1ª y 3ª son iguales,

podemos suprimir la 1ª ecuación y el sistema queda $\begin{cases} 3x+3y=0 \\ 3x+2y=3 \end{cases}$ Lo podemos

resolver utilizando reducción: $\begin{cases} 3x+3y=0 \\ -3x-2y=-3 \\ \hline y=-3 \end{cases} \rightarrow 3x+3\cdot(-3)=0 \rightarrow 3x=9 \rightarrow x=3$

El sistema tiene <u>una única solución</u> $\boxed{x=3;\ y=-3}$

CASO 4. $k=-3$→El sistema queda $\begin{cases} -3x+3y=0 \\ 3x+2y=-3 \\ 3x-3y=0 \end{cases}$ La ecuación 1ª y 3ª son iguales,

podemos suprimir la 1ª ecuación y el sistema queda $\begin{cases} -3x+3y=0 \\ 3x+2y=-3 \end{cases}$

Lo podemos resolver utilizando sustitución:

$$\begin{cases} -3x=-3y \\ 3x+2y=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y \\ 3x+2y=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y \\ 3y+2y=-3 \end{cases} \rightarrow 5y=-3 \rightarrow y=-\frac{3}{5} \rightarrow x=\frac{-3}{5}$$

El sistema tiene <u>una única solución</u> $\boxed{x=\frac{-3}{5};\ y=\frac{-3}{5}}$

5. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} (a+1)x+2y+(a-1)z=1+a \\ (a+1)y+(a+1)z=2 \\ x+y+az=a \end{array}\right\}$$

a) Estudia su compatibilidad en función de los valores de **a**.
b) Resuélvelo cuando **a = 0**

Solución:

Vamos a discutirlo de dos formas distintas:

PRIMER MÉTODO (Gauss) Triangulando la matriz

$$\left.\begin{array}{r}(a+1)x+2y+(a-1)z=1+a\\(a+1)y+(a+1)z=2\\x+y+az=a\end{array}\right\}\Rightarrow \text{La matriz asociada al sistema de ecuaciones es}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a+1&2&a-1&a+1\\0&a+1&a+1&2\\1&1&a&a\end{array}\right)\Rightarrow\{\text{Cambio fila 1ª por fila 3ª}\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&a&a\\0&a+1&a+1&2\\a+1&2&a-1&a+1\end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3ª la cambio por Fila 3ª - (a+1) · Fila 1ª}\\\begin{array}{ccc|c}a+1&2&a-1&a+1\\-a-1&-a-1&-a^2-a&-a^2-a\\\hline 0&-a+1&-a^2-1&-a^2+1\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&a&a\\0&a+1&a+1&2\\0&1-a&-a^2-1&1-a^2\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3ª la cambio por (a-1) · Fila2ª + (a+1) · Fila3ª}\\\begin{array}{ccc|c}0&a^2-1&a^2-1&2a-2\\0&1-a^2&-a^3-a^2-a-1&1-a^2+a-a^3\\\hline 0&0&-a^3-a-2&-a^3-a^2+3a-1\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&a&a\\0&a+1&a+1&2\\0&0&-a^3-a-2&-a^3-a^2+3a-1\end{array}\right)$$

Una vez obtenida la matriz equivalente triangular, igualamos los elementos de la diagonal a 0:

a + 1 = 0 → $\boxed{a=-1}$

$$-a^3-a-2=0\rightarrow \text{Resolviendo por Ruffini}\ \begin{array}{r|rrrr}&-1&0&-1&-2\\-1&&1&-1&2\\\hline&-1&1&-2&\lfloor 0\end{array}\ \text{una de las raices es } a=-1$$

y resolviendo la ecuación de 2º grado del cociente $-a^2+a-2=0$ obtenemos

a= $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4(-1)(-2)}}{-2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-7}}{-2}=$ No tiene solución

La única solución es $\boxed{a=-1}$

NOS PLANTEAMOS **dos** CASOS DISTINTOS:

- CASO 1. a ≠ –1. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO, ya que ningún elemento de la diagonal de la matriz equivalente es nulo y por tanto tiene una única solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & a-1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -a^3-a-2 & -a^3-a^2+3a-1 \end{array}\right)$$

- CASO 2. a = –1

La matriz ampliada queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & a-1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -a^3-a-2 & -a^3-a^2+3a-1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

El sistema de ecuaciones equivalente al inicial queda asi:

$$\left.\begin{array}{l} 2y-2z=0 \\ 0=2 \\ 0=-4 \end{array}\right\}$$ Este sistema es INCOMPATIBLE (las ecuaciones 2ª y 3ª son absurdas)

SEGUNDO MÉTODO (Rouché - Frobenius) con el uso de los rangos

Estudiamos los rangos de la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada,los comparamos entre si y con el número de incógnitas (3).

$$A=\begin{pmatrix} a+1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Para obtener el rango de esta matriz, estudiamos primero el valor de su determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a(a+1)(a+1)+2(a+1)+(a-1)\cdot 0\cdot 1-\left((a-1)(a+1)+0+(a+1)(a+1)\right)=$$

$$=a^3+2a^2+a+2a+2-\left(a^2-1+a^2+2a+1\right)=a^3+\cancel{2a^2}+a+\cancel{2a}+2\cancel{-a^2}+1\cancel{-a^2}\cancel{-2a}-1$$

$$|A|=a^3+a+2$$

Para averiguar cuando se anula este determinante necesitamos usar Ruffini

$$a^3+a+2=0\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \underline{|0} \end{array}$$ una de las raices es $a=-1$

y resolviendo la ecuación de 2º grado del cociente $a^2-a+2=0$ obtenemos

$$a=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot 2}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{2}=$$ No tiene solución

La única solución es $\boxed{a=-1}$

NOS PLANTEAMOS **dos** CASOS DISTINTOS:

- CASO 1. a ≠ –1

En este caso no se anula el determinante de la matriz de los coeficientes, luego su rango es 3.

El rango de la matriz ampliada como máximo puede ser 3, luego es también 3.
Rango de la matriz de los coeficientes = Rango de la matriz ampliada = Número de incógnitas (3 = 3 = 3)
El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO para a ≠ −1.

- CASO 2. a = – 1

El rango de la matriz de los coeficientes es 2

$$A=\begin{pmatrix} a+1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ esta matriz tiene rango 2,

ya que hay un menor de orden 2 con determinante no nulo $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$

La matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & a-1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & a & a \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

Su rango es 3, ya que puedo elegir el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª con determinante $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0+4+0-(0+0+0)=4\neq 0$

Rango de la matriz de los coeficientes ≠ Rango de la matriz ampliada (2≠3) luego el sistema es INCOMPATIBLE para a = –1

Ejercicios

1. Discute y resuelve en función del parámetro a y resuelve cuando sea posible:

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ 4x+6y-az=2 \\ x+y+az=10 \end{cases}$$

2. Dado el sistema:

$$\begin{cases} ax-ay+z=2 \\ 3x+2y-2z=a \\ -ax+3y-z=2 \end{cases}$$

   a. Estudia sus soluciones en función de a.
   b. Resuelve para a = 1

3. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ (1+a)y+z=4 \\ x+2y+az=4 \end{cases}$$

   a) Discútase el sistema según el valor del parámetro real a.
   b) Resuélvase el sistema para a = 2.

4. Sea k un número real. Considérese el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=4 \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}.$$

   a) Discútase según los valores de k e interprétese geométricamente el resultado.
   b) Resuélvase el sistema para k = 2.

5. a) Discútase el sistema

$$\begin{cases} x+ay-z=2 \\ 2x+y+az=0 \\ 3x+(a+1)y-z=a-1 \end{cases}$$

   , en función del valor de a.

   b) Para el valor a=1, hállese, si procede, la solución del sistema.

6. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+ay+3z=2 \\ 2x+(2+a)y+6z=3 \end{cases}$$

   a) ¿Existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea incompatible?
   b) ¿Existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea compatible determinado?
   c) Resuélvase el sistema para a = 0.

7. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=1 \\ x+\lambda y+z=1 \end{cases}$$

a) Discútase según los valores del parámetro λ.
b) Resuélvase para $\lambda=-3$.
c) Resuélvase para $\lambda=1$.

8. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x+y+az=4 \\ ax+y-z=0 \\ 2x+2y-z=2 \end{cases}$$, donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor de a.
b) Resolver el sistema para a=1.

Soluciones:

1. *Si a = 8 el sistema tiene infinitas soluciones y si a es distinto de 8 el sistema tiene una única solución. Para a=8 la solución es x=114–112z; y=–19+20z*
2. *a) a = 3 o a = –3/2 no tiene solución y a distinto de 3 y –3/2 el sistema tiene una única solución. b) x=1; y=2; z=3*
3. *a) Para a = 1 o a = –1 el sistema no tiene solución y para un valor distinto tiene una única solución b) x=0; y=1; z=1*
4. *a) k= –2 el sistema no tiene solución; k=1 el sistema tiene infinitas soluciones y si k es distinto de 1 y –2 el sistema tiene una única solución* b) x = –3/4, y = 1/4, z = 9/4.
5. *a) Si a = 0 o a=1/2 el sistema no tiene solución y si a es distinto de 0 y 1/2 el sistema tiene una única solución b)* $x=-6,\ y=10,\ z=2$
6. *a) a=2 b) a≠2 c)* $x=2-3z;\ y=-1/2$
7. *a)* Para $\lambda=1$ *el sistema tiene infinitas soluciones y para valor distinto de 1 el sistema tiene una única solución. b) x = y = z =–1. c) x = 1–y–z; y = y; z = z*
8. *a) Si a=–0,5 el sistema no tiene solución; si a=1 el sistema tiene infinitas soluciones y para todo valor de a distinto de 1 y -0'5 tiene una única solución*
   b) $x=x;\quad y=2-x;\quad z=2$

Ejercicios de matrices y sistemas de ecuaciones en pruebas EBAU de Murcia

Estas son las preguntas correspondientes al bloque de algebra (Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones) que han aparecido en las pruebas EBAU o PAU de los últimos años en Murcia. Si se desea ver la resolución de los ejercicios ir al archivo correspondiente a la PAU o EBAU de ese año en la web www.ebaumatematicas.com.

EXTRAORDINARIA 2022

1: [2,5 p.] Un conocido defraudador fiscal tiene distribuido su dinero negro en tres paraísos fiscales, las Islas Caimán, Panamá y Fiji. La suma total de este dinero es de 150 millones de euros. Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán, seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá. Además, el dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán. Calcule cuánto dinero tiene en cada uno de los paraísos fiscales.

Solución:
En las Islas Caimán tiene 80 millones de euros, en Panamá 20 y en Fiji tiene 50 millones.

2: Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$

a) **[0,75 p.]** Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022}.
b) **[0,75 p.]** Si A es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.
c) **[1 p.]** Determine para que valores de a y b la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Solución:
a) $A^{2022} = A$ *b) El determinante de A es 1. c) Los valores son a = 0 o a = 1 y b = 0 o b = 1.*

ORDINARIA 2022

1: [2,5 p.] La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.

Solución:
La edad de Carmela es 26, la de Esperanza es 23 y la de Aurora es 19.

2: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Si I denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3 = -I$ y calcule A^{2023}.

b) **[0,5 p.]** Calcule la inversa de A.

c) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX - B^T = A^2$, donde B^T denota la matriz traspuesta de *B*.

Solución:

a) $A^{2023} = A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *b)* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ *c)* $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -9 & -14 \\ 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

EXTRAORDINARIA 2021

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x + ay - z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \\ x + 5y - az = a + 1 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución:
a) El sistema tiene solución única para $a \neq -1$ *y* $a \neq 3$
b) Para $a = -1$**.** *Las soluciones son x = –2t; y = t, z = –3t.*
c) Para $a = 3$

2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **.**

a) **[1 p.]** Si se denota por tr(A) la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por |A| el determinante de A, compruebe que, para cualquier valor de *a*, se cumple la ecuación $A^2 = tr(A)A - |A|I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

b) **[0.5 p.]** Determine para qué valores de *a* la matriz A es regular (o inversible).

c) **[1 p.]** Para *a* = –3, resuelva la ecuación matricial $AX - A^t = A$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución:
a) Se comprueba que es cierto.
b) La matriz A es regular para cualquier valor de a distinto de –4.
c) $X = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

ORDINARIA 2021

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} ax+y+\ z=4 \\ x-ay+z=1 \\ x+\ y+z=a+2 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única.
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución:

a) *Cuando* $a \neq 1 \quad y \quad a \neq -1$.

b) Cuando $a=-1$. $x=-\dfrac{3}{2}; \quad y=t; \quad z=\dfrac{5}{2}-t$

c) Para $a=1$

2: Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que la matriz *A* es regular (o inversible) y calcule su inversa.
b) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX-B=C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de *C*.

Solución:

a) $|A|=1\neq 0$. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

EXTRAORDINARIA 2020

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x+\ y+\ z=2 \\ x-ay+a^2z=-1 \\ -ax+a^2y-a^3z=2 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Comprueba que el sistema nunca tiene solución única**.**
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones.
c) **[0,5 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor de *a* = *2*.

Solución:

a) $|A|=0$, *independientemente del valor de a y el rango de la matriz A nunca va a ser 3.*

*b) El sistema tiene infinitas soluciones para **a = 2**.*

c) Para a = 2 las soluciones son $x=1-2t; \quad y=1+t; \quad z=t$

2: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ **.**

c) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5, A^6.
d) **[1 p.]** Calcule A^{2020}.
e) **[0,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}; A^3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}; A^4=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}; A^5=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}; A^6=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

b) $A^{2020}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

c) $|A|=1\neq 0$. $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

ORDINARIA 2020

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x+\ y-\ z=4\\ x+a^2y-\ z=3-a\\ x-\ y+\ az=1\end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 0.***
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución: a) *Para* $a\neq 1$ *y* $a\neq -1$. *Para* ***a = 0*** *la solución es* $x=2;\ y=1;\ z=-1$.
b) *Para* $a=-1$. *Las soluciones son* $x=\frac{5}{2}+t;\quad y=\frac{3}{2};\quad z=t$. ***c)*** *El sistema no tiene solución para* $a=1$.

2: Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o inversibles) y calcule sus matrices inversas.
b) **[1,5 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXB=A^t-3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución: *a)* $|A|=-1\neq 0\to$ La matriz A es regular. $|B|=1\neq 0\to$ La matriz B es regular.
$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ *b)* $X=\begin{pmatrix}28 & 38\\ -18 & -23\end{pmatrix}$

SEPTIEMBRE 2019

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + z = a \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 2.***
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución:

a) Para $a \neq -1$ *y* $a \neq 1$. *Para a = 2 la solución es* $x = 1;\ y = 0;\ z = 1$

b) Para $a = -1$. *La solución es* $x = \dfrac{1+3t}{-2};\ y = \dfrac{-1+t}{2};\ z = t$

c) Para $a = 1$

B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.
b) **[0,5 p.]** Para $a = 1$, calcule la inversa de A.
c) **[1 p.]** Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA + 2I = 2A$, donde I es la matriz identidad 3x3.

Solución:

a) Cuando a es distinto de $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *y de* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *b)* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *c)* $X = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

JUNIO 2019

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 0.***
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución:

a) $a \neq 1;\ a \neq -2$ →*El sistema es compatible determinado.*

a=0→ *La solución es x = –1, y = 2, z = 1*

b) $a = -2$ → *El sistema es compatible indeterminado. La solución es x = t, y = 1+t, z = t.*

c) *para a =1 el sistema es incompatible.*

B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **.**

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas $A^2, A^3 \ y \ A^4$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

c) **[1 p.]** Determine si existe la inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $|A| = 1 \neq 0$. *La inversa existe y vale* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

SEPTIEMBRE 2018

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

a) **[1 p.]** Compruebe que la matriz ***A*** es regular (o invertible) y calcule su inversa.

b) **[1,5 p.]** Determine la matriz X que cumple la ecuación $AX = A + A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de ***A***.

Solución:

a) $|A| = 1 \neq 0 \rightarrow A$ *es regular* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} ax + y + az = 0 \\ x + y + az = 0 \\ 2x + (a-1)y + az = 0 \end{cases}$$

a) **[1,25 p.]** Determine los valores del parámetro ***a*** para los que el sistema tiene únicamente la solución trivial (0, 0, 0).

b) **[1,25 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor del parámetro $a = 2$.

Solución:

a) El sistema tiene una única solución (0, 0, 0) cuando a es distinto de 0, 1 y 2.

b) La solución es $x=0;\ y=-2z;\ z=z$.

JUNIO 2018

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

a) **[1,5 p.]** Calcule las potencias sucesivas $A^2, A^3\ y\ A^4$.

b) **[1 p.]** ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de $n\in\mathbb{N}$?

Solución:

a) $A^2=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}1&0&6\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A^4=\begin{pmatrix}1&0&8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ *b)* $A^n=\begin{pmatrix}1&0&2\cdot n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases}x-y+z=4a\\ \quad\ \ y+z=-4\\ x\quad\ +2z=a^2\end{cases}$$

a) **[1 p.]** Justifique que el sistema nunca es compatible determinado.

b) **[1,5 p.]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

Solución:

a) El sistema no puede ser compatible determinado pues el rango de la matriz de los coeficientes es menor que el número de incógnitas.

b) *a=2; La solución es* $x=4-2z;\ y=-z-4;\ z=z$

SEPTIEMBRE 2017

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2&1\\-2&0\end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) **[1 punto]** Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB=A+B$.

Solución:

a) $|A|=|B|=2\neq 0$ por lo que las matrices A y B son invertibles

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $X = \begin{pmatrix} 3/2 & -5/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ x + 2ay + z = 2 \\ x + 2y + az = -3 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Determine para qué valores del parámetro ***a*** el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.
b) **[1,25 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución:

a) Para $a \neq 1, a \neq -2$ *el sistema tiene una única solución*

b) Para a = – 2 el sistema tiene infinitas soluciones. La solución es

$x = \dfrac{1+6y}{3}$; $y = y$; z = $\dfrac{5+6y}{3}$

c) *Para a = 1 el sistema no tiene solución*.

JUNIO 2017

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.
b) **[1 punto]** Determine la matriz X que cumple la ecuación AXB = C.

Solución:

a) $|A| = |B| = -4 \neq 0$. *Por lo tanto las matrices A y B son invertibles.*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

b) $X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & -3/4 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x - y + a^2 z = a - 1 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Determine para qué valores del parámetro ***a*** el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.
b) **[1,25 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución:

a) $a \neq 1$ *y* $a \neq -1$

b) *Para a = 1.* La solución es $x = -z;\ y = 0;\ z = z$

c) *a = –1*

SEPTIEMBRE 2016

CUESTIÓN A.1: Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) **[1 punto]** Calcule el determinante de A.
b) **[1,5 puntos]** Calcule las potencias sucesivas $\mathbf{A^2}$, $\mathbf{A^3}$, $\mathbf{A^4}$ y $\mathbf{A^5}$. Calcule $\mathbf{A^{2016}}$.

Solución:

a) $|A| = -1$

b) $A^2 = Id;\quad A^3 = A;\quad A^4 = Id;\quad A^5 = A.\ A^{2016} = Id$

CUESTIÓN B.1: Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2$, calcule razonadamente los siguientes determinantes:

a) **[1 punto]** $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

b) **[1,5 puntos]** $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Solución: *a)* -12 *b) 6*

JUNIO 2016

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Compruebe que ambas matrices son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.
b) **[1 punto]** Determine la matriz X que cumple la ecuación AXB = A+B.

Solución:

a) $|A| = 6 \neq 0$ Por lo que la matriz A es invertible

$|B| = -2 \neq 0$ Por lo que la matriz B es invertible

$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \frac{-1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-5}{3} & \frac{-4}{3} \end{pmatrix}$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \end{cases}$$

a) **[1 punto]** Determine para qué valores del parámetro ***a*** el sistema tiene solución única. Calcule dicha solución para ***a = 1***.
b) **[1 punto]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución:

a) Para $a \neq -1$ *y* $a \neq 0$ *La solución del sistema cuando* ***a = 1*** *es* ***x = –2, y = 2 , z = 1***

b) Para a= 0. La solución es $x = 5 - 3y; \quad y = y; \quad z = 0$

c) Para a= –1

SEPTIEMBRE 2015

CUESTIÓN A.1: Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) **[1,25 puntos]** Calcule $\mathbf{C = A^t \cdot A - B \cdot B^t}$, donde $\mathbf{A^t}$ y $\mathbf{B^t}$ denotan, respectivamente, las matrices traspuestas de A y B.
b) **[1,25 puntos]** Halle una matriz X tal que X ·C = D, siendo

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN B.1: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.
Se dice que una matriz cuadrada A es **idempotente** si cumple que $\mathbf{A^2 = A}$.

a) **[0,5 puntos]** Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente $\mathbf{A^{2015}}$.
b) **[2 puntos]** Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es idempotente

$$A=\begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Solución:
a) $A^{2015}=A$
b) *a=0 o a=1/2 y b=0 o b=1.*

JUNIO 2015

CUESTIÓN A.1:

a) **[1,5 puntos]** Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\}$$

b) **[1 punto]** Si es posible, resuélvalo para el valor de a = −2.

Solución:
a) Para "a" distinto de 1 y –2 el Sistema es Compatible Determinado. Para a=1 el sistema es compatible indeterminado. Para a=–2 el sistema es compatible indeterminado.
b) La solución es $x=\lambda;\ y=1+\lambda;\ z=\lambda$

CUESTIÓN B.1: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.
Se dice que una matriz cuadrada A es **involutiva** si cumple que $A^2 = I$, donde I denota la matriz identidad.

a) **[0,5 puntos]** Justifique razonadamente que toda matriz involutiva es regular (o invertible).

b) **[2 puntos]** Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es involutiva

$$A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Solución:
a) Se cumple que la inversa de la matriz A es ella misma y por tanto tiene inversa y es regular.
b) $a=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ *o* $b=\pm 1$

SEPTIEMBRE 2014

CUESTIÓN A.1:

a) **[1,25 puntos]** Compruebe que la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$, es regular (o invertible) y calcule su matriz inversa.

b) **[1,25 puntos]** Resuelva la ecuación matricial AXA = B, siendo A la matriz anterior y $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

¡OJO!: El producto de matrices NO es conmutativo.

Solución:

a) $|A|=-1\neq 0$, *la matriz es regular.* $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

b) La solución es $X=\begin{pmatrix}68 & 25\\ -49 & -18\end{pmatrix}$

CUESTIÓN B.1:

a) **[1,5 puntos]** Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} ax+2z=0\\ ay-z=a\\ x-y+z=0\end{array}\right\}$$

b) **[1 punto]** Si es posible, resuélvalo para el valor de a = 0.

Solución:

a) Si a = 3 El sistema es incompatible. Si a = 0 El sistema es compatible indeterminado. Si a ≠ 0 y a ≠ 3 el sistema es compatible determinado.

b) Para a=0 el sistema es compatible indeterminado. La solución es x=λ; y=λ; z=0

JUNIO 2014

CUESTIÓN A.1: Sabiendo que $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ 0 & 2 & 4\end{vmatrix}=4$, calcule, sin desarrollar ni utilizar la regla de Sarrus, los siguientes determinantes, indicando en cada paso qué propiedad de los determinantes se está utilizando.

a) $\begin{vmatrix}3x & 3y & 3z\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$ **[1 punto]** b) $\begin{vmatrix}x & y & z\\ 3x & 3y+2 & 3z+4\\ x+2 & y+2 & z+2\end{vmatrix}$ **[1,5 puntos]**

Solución: *a) –6* *b) 8*

CUESTIÓN B.1:

a) **[1,5 puntos]** Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} ax+3y+z=a\\ x+ay+az=1\\ x+y-z=1\end{cases}$$

b) **[1 punto]** Si es posible, resuélvalo para el valor de a = −1.

Solución:

a) Para $a \neq -1, a \neq 2$ *el sistema es Compatible Determinado*

Para a = –1 el sistema es compatible indeterminado.

Para a = 2 el sistema es compatible indeterminado.

b) La solución del sistema es $x = x;\ y = 0;\ z = -1 + x$

SEPTIEMBRE 2013

CUESTIÓN A.1: [2,5 puntos] Clasifique y resuelva, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ 4x + 5y + 2z = 2 \end{cases}$$

Solución:

El sistema es Compatible Indeterminado. La solución del sistema es $x = \dfrac{1-z}{2};\ y = 0;\ z = z$

CUESTIÓN B.1: Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

calcule, sin desarrollar ni utilizar la regla de Sarrus, los siguientes determinantes, indicando en cada paso qué propiedad de los determinantes se está utilizando.

a) **[1,25 puntos]** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$.

b) **[1,25 puntos]** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+6 & 2b & 2c+3 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$

Solución: *a) –2* *b) 2*

JUNIO 2013

CUESTIÓN A.1: [2,5 puntos] Discuta, en función del parámetro ***a***, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - ay + z = 1 \\ ax + y + z = 4 \end{array}\right\}$$

No hay que resolverlo en ningún caso.

Solución:

Si $a \neq 1$ *y* $a \neq -1$ *el sistema es compatible determinado.*

Si a = 1 el sistema es Incompatible.
Si a = –1 el sistema es Compatible Indeterminado.

CUESTIÓN B.1:

a) **[1,25 puntos]** Compruebe que la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, es regular (o inversible) y calcule su matriz inversa.

b) **[1,25 puntos]** Resuelva la ecuación matricial **AX +A^2 = B**, siendo A la matriz anterior y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

¡OJO!: El producto de matrices NO es conmutativo.

Solución:

a) $|A|=-1\neq 0,$ luego tiene inversa $\Rightarrow \mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

b) $X=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -12 & -21 \end{pmatrix}$

SEPTIEMBRE 2012

CUESTIÓN A.1:

a) **[1,25 puntos]** Determine para qué valores del parámetro a el conjunto de vectores $S=\{(1,a,1),(1-a,a-1,0),(1,1,a)\}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$.

b) **[1,25 punto]** Estudie el rango del conjunto de vectores S en los casos en que no forme una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

a) Para $a\neq 1$ *y* $a\neq -2$ *si forman una base de* $\mathbb{R}^3$

b) Si a = 1 el rango de la matriz S es 1. Si a = –2 el rango es 2.

CUESTIÓN B.1:

a) **[1,25 puntos]** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcule las potencias A^2, A^3 y A^4.

b) **[1,25 puntos]** Calcule A^{2012}.

Solución:

a) $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ $A^3=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $A^4=-A$

b) $A^{2012}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

JUNIO 2012

CUESTIÓN A.1:

a) **[1,5 puntos]** Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+ay+a^2z=-1 \\ ax+a^2y+a^3z=2 \end{cases}$$

b) **[1 punto]** Resuelva el sistema cuando sea compatible.

Solución:
a) Cuando a = –2 el sistema es Compatible Indeterminado. Cuando a ≠ –2 el sistema es Incompatible
b) Cuando a= - 2 la solución del sistema es $x=1-2\lambda;\ y=1+\lambda;\ z=\lambda$

CUESTIÓN B.1: [2,5 puntos]

Se dice que una matriz cuadrada A es **ortogonal** si cumple que $A^t \cdot A = I$, donde I denota la matriz identidad y A^t es la traspuesta de A.
Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es ortogonal

$$\begin{pmatrix} a & -a & b \\ a & a & 0 \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $a=\pm\sqrt{0'5}\ y\ b=0$

SEPTIEMBRE 2011

CUESTIÓN A.1: Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=6$, calcule, sin utilizar la regla de Sarrus, el valor del siguiente determinante, indicando en cada paso qué propiedad (o propiedades) de los determinantes se está utilizando.

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2}+3a & \frac{y}{2}+3b & \frac{z}{2}+3c \end{vmatrix}$$ **[2.5 puntos]**

Solución: *15*

CUESTIÓN B.1:

a) Determine para qué valores del parámetro a la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

es regular. **[1.25 puntos]**

b) Estudie el rango de la matriz A en los casos en que no sea regular. **[1.25 puntos]**

Solución:
a) Para todo a distinto de 0, 1 y – 1
b) Para a = 0 el rango de A es 2. Para a = 1 el rango de A es 1. Para a = –1 el rango es 1.

JUNIO 2011

CUESTIÓN A.1: Demuestre, sin utilizar la regla de Sarrus y sin desarrollar directamente por una fila y/o columna, que

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$$

Indique en cada paso qué propiedad (o propiedades) de los determinantes se está utilizando. **[2.5 puntos]**

Solución: *La 3ª columna se obtiene como la suma de la 1ª y 2ª columna, por tanto el determinante es 0.*

CUESTIÓN B.1: Discuta, en función de los parámetros a y b, el siguiente sistema de ecuaciones. **No hay que resolverlo**. **[2.5 puntos]**

$$\left.\begin{aligned} x+ay+2z&=3 \\ x-3y-z&=-1 \\ -x+8y+4z&=b \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Para a ≠ 2 el sistema compatible determinado. Para a = 2 y b ≠ 5 el sistema es incompatible.
Para a = 2 y b = 5 el sistema es compatible indeterminado.

SEPTIEMBRE 2010

CUESTIÓN A.1: Definición de rango de una matriz. Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro k. **[2.5 puntos]**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Solución:
K≠-1 → el rango de A es 3 K=-1→El rango de A es 2

CUESTIÓN B.1: Discutir y resolver el sistema siguiente en función de los posibles valores del parámetro k. **[2.5 puntos]**

$$\left.\begin{aligned} x+2y+4z&=0 \\ -2x-4z&=0 \\ x-y+z&=k \end{aligned}\right\}$$

Solución:
k≠0 El sistema es incompatible.
k=0 El sistema es compatible indeterminado. $x=-2z;\ y=-z;\ z=z$

JUNIO 2010

CUESTIÓN A.1: Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A. **[2.5 puntos]**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Solución:

$|A|=-1\neq 0$ *y por tanto tiene inversa:* $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

CUESTIÓN B.1: Enunciar el teorema de Rouche-Fröbenius. Aplicar dicho teorema para discutir si el sistema siguiente tiene solución y si la solución es única en función de los posibles valores del parámetro k (no es necesario resolver el sistema). **[2.5 puntos]**

$$\left.\begin{array}{l}x-y+z=k\\ 3x-3y=0\\ x+ky+3z=1\end{array}\right\}$$

Solución:
El sistema es incompatible para k= –1. El sistema es compatible determinado para k≠ –1.

Orientaciones EBAU. Bloque de Álgebra.

Cuestión 1 y 2. Bloque de Números y Álgebra (2,5 puntos)

a) Planteamiento, discusión y, en su caso, resolución de sistemas de ecuaciones lineales dependientes, a lo más, de un parámetro.

- Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes.

- Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

- Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

Ejemplo.
Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ ax \quad +2z=0 \\ \quad ay-z=a \end{cases}$$

a) Determine para qué valores del parámetro **a** el sistema tiene solución única.
Calcule dicha solución para a = 1.
b) Determine para qué valor del parámetro **a** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) Determine para qué valor del parámetro **a** el sistema no tiene solución.

Ejemplo.
Un cajero automático contiene solo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe total de 3000 euros. Sabiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcule cuántos billetes hay de cada tipo.

b) Operaciones con matrices. Resolución de ecuaciones matriciales. Cálculo de matrices inversas.

- Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales.

- Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente.

- Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado.

Ejemplo.
Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
a) Compruebe que ambas matrices son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = A + B$.

Ejemplo.

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$?

c) Estudio del rango de una matriz, hasta orden 4, dependiente a lo más de un parámetro.