

2º de bachillerato Matemáticas II

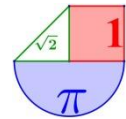
Bloque 1 de 4 - Álgebra

www.ebaumatematicas.com

Ejercicios de matrices en pruebas EBAU de ESPAÑA	2
ANDALUCÍA	2
ARAGÓN	5
ASTURIAS.....	11
BALEARES	15
CANARIAS	19
CANTABRIA.....	22
CASTILLA LA MANCHA.....	25
CASTILLA - LEÓN.....	29
CATALUÑA	32
EXTREMADURA	35
GALICIA.....	38
LA RIOJA	42
MADRID	47
MURCIA	50
NAVARRA.....	53
PAÍS VASCO	56
VALENCIA	59
Ejercicios de sistemas de ecuaciones en pruebas EBAU de ESPAÑA	64
ANDALUCÍA	64
ARAGÓN	67
ASTURIAS.....	70
BALEARES	73
CANARIAS	76
CANTABRIA.....	79
CASTILLA LA MANCHA.....	83
CASTILLA - LEÓN.....	86
CATALUÑA	89
EXTREMADURA	91
GALICIA.....	94
LA RIOJA	97
MADRID	100
MURCIA	104
NAVARRA.....	108
PAÍS VASCO	112
VALENCIA	115

Autor de la recopilación: Juan Antonio Martínez García, profesor de matemáticas en el I.E.S. Vicente Medina de Archena (Murcia)

Cualquier error o ausencia en este documento, por favor, comunicarlo al correo ebaumatematicas@gmail.com



Ejercicios de matrices en pruebas EBAU de ESPAÑA

La resolución de cada ejercicio está publicado en www.ebaumatematicas.com

ANDALUCÍA



1. (Andalucía Extraordinaria 2022) BLOQUE B. EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa. **(0,5 puntos)**
 b) Para $a = 1$ calcula X tal que $AXB = C$, si es posible. **(2 puntos)**

Solución: a) La matriz B no tiene inversa cuando $a = 0$ o $a = 2$. b) $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

2. (Andalucía Extraordinaria 2022) BLOQUE B. EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$.

a) Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$ **(1 punto)**

b) Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$ **(1,5 puntos)**

Solución: a) 12 b) 12

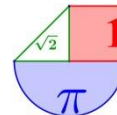
3. (Andalucía Ordinaria 2022) BLOQUE B. EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

- a) ¿Para que valores de m tiene inversa la matriz A ? **(1 punto)**
 b) Para $m = 4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX = 12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1,5 puntos)**

Solución: a) La inversa de la matriz A existe para cualquier valor de m distinto de 0 y 1.

b) $X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$


4. (Andalucía Extraordinaria 2021) BLOQUE B. EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- a) Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$. (1.25 puntos)
 b) Dadas las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz X que verifica $A^4 X + B = AC$. (1.25 puntos)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $X = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$

5. (Andalucía Extraordinaria 2020) Ejercicio 7 (2.5 puntos)

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

- a) Halla los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (1.25 puntos)
 b) Para $\lambda = 1$, resuelve el sistema dado por $(A - \lambda I)X = 0$. ¿Existe alguna solución tal que $z = 1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. (1.25 puntos)

Solución: a) Los valores de λ son $\lambda = 1$; $\lambda = -1$; $\lambda = 2$. b) No hay ninguna solución con $z = 1$.

6. (Andalucía Ordinaria 2020) Ejercicio 3.- (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

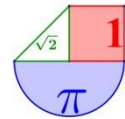
- a) Estudia el rango de A según los valores de m . (1.5 puntos)
 b) Para $m = 2$, calcula la inversa de $2020A$. (1 punto)

Solución: a) El rango es 3 para $m \neq 1$ y $m \neq -2,5$. Para $m = -2,5$ o $m = 1$ el rango es 2.

b) $(2020A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3636} & -\frac{1}{3636} & \frac{7}{18180} \\ -\frac{1}{3030} & \frac{1}{6060} & \frac{1}{6060} \\ \frac{1}{9090} & \frac{1}{9090} & -\frac{1}{18180} \end{pmatrix}$

7. (Andalucía Junio 2019) Opción A Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula todas las matrices

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



Solución: $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ o $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

8. (Andalucía Septiembre 2018) A.3. Considera las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determina, si existen, los parámetros de a, b y c para los que las matrices A y B conmuten.
- Calcula A^2 , A^3 , A^{2017} , A^{2018} .
- Calcula, si existe, la matriz inversa de A.

Solución: a) $a=0$ $b=0$ y $c=-1$ b) $A^2=Id$, $A^3=A$, $A^{2017}=A$, $A^{2018}=Id$ c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. (Andalucía septiembre 2017) B.3. Considera

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}.$$

- [1,5 puntos] Discute el rango de A según los valores de k.

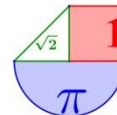
Solución: a) rango de A es 3 si k es distinto de 0, -1 y -1/2. El rango de A es 2 en el resto de valores de k

10. (Andalucía junio 2017) B.3. Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- [1 punto] Determina los valores de λ para que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa (I es la matriz identidad).
- [1,5 puntos] Resuelve $AX = -3X$. Determina, si existe, alguna solución con $x = 1$.

Solución: a) $\lambda = 3$; $\lambda = 2$; $\lambda = -3$ b) $z = 0$ $y = t$ $x = 2t$



ARAGÓN



1. (Aragón Extraordinaria 2022) 5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que se verifique $A^2 = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) (1 punto) Calcula, para $k = 0$, la matriz B^n con $B = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2, y $n \in \mathbb{N}$.

Solución: a) $k = -2$ b) $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 \cdot n & 1 \end{pmatrix}$

2. (Aragón Extraordinaria 2022) 6) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1-m & -1 \\ 2 & 2m \\ m-1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudia, según los valores de $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz $P = AB^T + C$, donde B^T es la matriz traspuesta de B .

b) (1 punto) Para el valor $m = 1$, calcula la inversa de la matriz P del apartado anterior.

Solución: a) Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$ el rango de P es 3. Si $m = 0$ o $m = 2$ el rango de P es 2.

b) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

3. (Aragón Ordinaria 2022) 5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

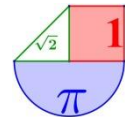
a) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $AX - 2I = A^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1 punto) Analiza el rango de la matriz $A - mB$, según los valores de $m \in \mathbb{R}$, siendo A la matriz del apartado anterior y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: a) $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) El rango de $A - mB$ es 3 si $m \neq \pm 1$ y es 2 si $m = 1$ o $m = -1$.



4. (Aragón Ordinaria 2022) 6) Dada la siguiente matriz:

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2$, calcula justificadamente $\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

b) (1 punto) Comprueba que la matriz B es invertible y calcula su inversa, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución: a) 3 b) $B^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -5 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5. (Aragón Extraordinaria 2021) 5) Dada la siguiente matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudie el rango de la matriz $A = I + P$, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) Para $k = 1$, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

Solución: a) Si $k \neq -1$ y $k \neq -\frac{1}{2}$ el rango de A es 3. Si $k = -1$ o $k = -\frac{1}{2}$ el rango de A es 2.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$

6. (Aragón Extraordinaria 2021) 6) Dadas las siguientes matrices:

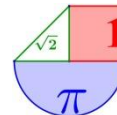
$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.

b) (1 punto) Calcule la matriz X que verifica la siguiente ecuación matricial: $I + BX = C_1 C_2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución: a) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$

7. (Aragón Ordinaria 2021) 5) Dada la siguiente matriz:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Estudie el rango de la matriz $A - kI$ según los valores de $k \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (0,75 puntos) Calcule la inversa de $A - kI$ para $k = 0$.

Solución: a) Para $k \neq 1$ y $k \neq 2$ el rango es 3; para $k = 1$ el rango es 2 y para $k = 2$ el rango es 1

$$b) (A - kI)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. (Aragón Ordinaria 2021) 6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$

b) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A - \frac{1}{2}A^T\right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ donde A^T es la

matriz traspuesta de A .

$$\text{Solución: a) } -10 \text{ b) } X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

9. (Aragón Ordinaria 2021) 7) a) (1 punto) Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

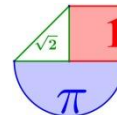
b) (1 punto) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Solución: a) } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ b) } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ -(2^n - 1) & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

10. (Aragón Extraordinaria 2020) 3) Resuelva la ecuación matricial $XA + XA^t = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**11. (Aragón Ordinaria 2020) 2).**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule, si es posible, $(A \cdot B^t)^{-1}$.

b) (1 punto) Compruebe que, $C^3 = I$, donde es la matriz identidad, y calcule C^{16} .

$$\text{Solución: a) } (A \cdot B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \text{b) } C^{16} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. (Aragón Septiembre 2019) Opción B 1.

a) (1,5 puntos) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$$

b) (1,5 puntos) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m = -1$.

Solución: a) Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$ el rango de A es 3, si $m = 1$ o $m = 2$ el rango de A es 2.

$$\text{b) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & -1/6 & -1/6 \\ -1 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

13. (Aragón Junio 2019) Opción A 1.

a) Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k . (2 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $k=1$.

Solución: a) Si $k \neq 0$; $k \neq -2$ y $k \neq -1$ el rango es 3. En el resto de casos el rango es 2.

$$\text{b) } A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

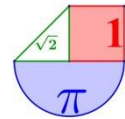
14. (Aragón Junio 2019) Opción B. 1. b) (1,5 puntos) Sabiendo que $a = -2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

Solución: -8

15. (Aragón Junio 2018) A.1.c. Considere las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = (1 \quad 2 \quad -1)$$



Determine el rango de la matriz producto CD.

Solución El rango es 1

16. (Aragón Junio 2018) B.1. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores del parámetro K para los que la matriz A-kI tenga inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.
 b) Encuentre la matriz X que verifica que: $(A - 3I)X = 2I$

Solución: a) para k distinto de 0, 2 y 4 b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

17. (Aragón Septiembre 2017) Opción B. 1. Sea k una constante real y considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & k & 3k+2 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

- a) Estudie la existencia de inversa de la matriz A según los diferentes valores de k.
 b) Si $k = 2$, calcule la inversa de A, si existe.
 c) Determine el rango de la matriz A según los diferentes valores de k.

Solución a) Existe la inversa para todo valor de k distinto de -4 y 0 b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ -2/3 & 1/2 & 2/3 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}$

c) rango de A es 3 para todo valor de k distinto de -4 y 0. Rango de A es 2 para $k=0$ y $k=-4$

18. (Aragón Junio 2017) Opción B. 1. (3 puntos)

a) (2 puntos) Sea A una matriz de dimensión 3×3 y denotamos por $|A|$ el determinante de la matriz.

a.1) (1 punto) Considere la matriz $B = \left(\frac{1}{2}\right)A$. Si $|B| = 1$, calcule el determinante de A, es decir: $|A|$.

a.2) (1 punto) Si

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine los valores de x para los que se cumple que $|B| = 1$, siendo $B = \left(\frac{1}{2}\right)A$.

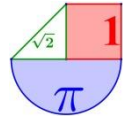
b) (1 punto) Determine las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

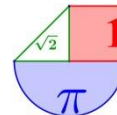
que verifiquen que

$$MM' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

donde M' representa la matriz traspuesta de M.



Solución a.1) 8. a.2) Para x igual a 3 o a -3 . b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$



ASTURIAS

**1. (Asturias Extraordinaria 2022) Bloque 1.A.**

Dado $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = (1 \ -1 \ 1)$.

- (a) **(1 punto)** Calcula los valores de x para los cuales la matriz A no posee inversa.
 (b) **(0.75 puntos)** Calcula el rango de A según los valores de x .
 (c) **(0.75 puntos)** Para $x = 1$, calcula en caso de que sea posible $A \cdot B$ y $A \cdot C$ o indica por qué no se puede realizar.

Solución: a) $x = 1$ b) Si $x \neq 1$ el rango de A es 3 y si $x = 1$ el rango de A es 2. c) $A \cdot B$ es posible pues coinciden el número de columnas de A con el número de filas de B . $A \cdot C$ no es posible pues no coinciden el número de columnas de A con el número de filas de C

2. (Asturias Ordinaria 2022) Bloque 1.A.

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

- (a) **(1 punto)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a .
 (b) **(1 punto)** Para $a = 1$ ¿existe P^{-1} ? En caso afirmativo calcúlala.
 (c) **(0.5 puntos)** Calcula, en caso de que exista, los valores de a tal que $\det(P) = \det(P^{-1})$.

Solución: a) Si $a = 2$ el determinante de P es 0 y su rango es 2. Si $a \neq 2$ el determinante de P es no nulo

($|P| = -a + 2$) y su rango es 3. b) Existe y vale $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) Para $a = 1$ o $a = 3$

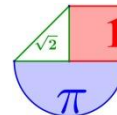
3. (Asturias Extraordinaria 2021) Bloque 1.B Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

- a) Si existe, su inversa. (1 punto)
 b) La matriz X cuadrada de orden 3 que verifica:
 $(X + A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3$ (I_3 matriz identidad de orden 3). (1.5 puntos)

Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

4. (Asturias Ordinaria 2021) Bloque 1.B. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- a) Escribe el sistema de ecuaciones $AX = X$ en la forma $BX = 0$. (0.5 puntos)
 b) Estudia para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones. (1 punto)



c) Para $a = 0$ calcula, si existe, la inversa de A.

(1 punto)

Solución: a)
$$\begin{cases} (a-1)x & -z = 0 \\ -x & -y & = 0 \\ y+(a-1)z & = 0 \end{cases}$$
 b) Cuando $a = 2$ o $a = 0$. c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. (Asturias Extraordinaria 2020) Bloque 1.B Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{pmatrix}$ $x \in \mathbb{R}$

a) Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuándo es invertible la matriz.

(1.5 puntos)

b) Para $x=1$, calcula su inversa

(1 punto)

Solución a) $|A| = -2x^2 + 3x + 2$. Es invertible cuando $x \neq 2$ y $x \neq -\frac{1}{2}$. b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$

6. (Asturias Ordinaria 2020) Bloque 1.B. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

(1 punto)

b) ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A \cdot X = B$? (0.5 puntos)

c) Calcula la matriz X del apartado anterior para $m=0$.

(1 punto)

Solución: a) El rango de la matriz A es 3 si $m \neq \pm 1$ y vale 2 si $m = -1$ o $m = 1$. b) La matriz X debe ser de dimensión 3×2 . c) $X = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

7. (Asturias Julio 2019) Opción B 1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ $x \in \mathbb{R}$

a) Estudia para qué valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I matriz identidad y O matriz nula). (1 punto)

b) Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior.

(0.75 puntos)

c) Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A.

(0.75 puntos)

Solución: a) $x=0$ b) $A^{12} = I$ c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

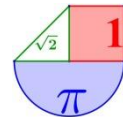
8. (Asturias Junio 2019) Opción B 1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$D = (1 \ 0 \ 1)$$

a) Razona, sin hacerlos, si son posibles los siguientes productos matriciales y, si es el caso, indica las dimensiones de las matrices resultantes.

(1 punto)

$$A \cdot A, \quad A \cdot B, \quad A \cdot B \cdot C, \quad C \cdot D$$



b) Calcula las inversas, si existen, de las matrices cuadradas posibles del apartado anterior. (1.5 puntos)

Solución: a) $A \cdot A$ si, es 3×3 . $A \cdot B$ si, es 3×2 . $A \cdot B$ no. $C \cdot D$ si, es 3×3 b) $(A \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C \cdot D$ no tiene

inversa (determinante nulo), $A \cdot B$ no es cuadrada.

9. (Asturias Julio 2018) Opción B 1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula:

- a) Su rango. (1.5 puntos)
 b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)
 c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

Solución: a) El rango es 3. b) La segunda columna es el triple de la tercera. c) No existe combinación lineal de las filas pues el rango es 3.

10. (Asturias Junio 2018) Opción A. 1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ donde m es un

número real.

- a) Estudiar el rango de A según los valores de m . (1.5 puntos)
 b) Para $m = -1$, calcula la solución, si existe, del sistema (1 punto)

$$A^t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A^t \text{ matriz traspuesta})$$

Solución: a) Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ el rango es 3. Si $m = -1$ el rango es 2. Si $m = 2$ el rango es 1. b) $x = y = z = \alpha$ siendo $\alpha \in \mathbb{R}$

11. (Asturias Julio 2017) Opción B. 1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ donde x es un número real.

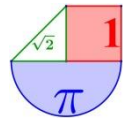
Halla:

- a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa. (1 punto)
 b) La inversa de A para $x = 2$. (1 punto)
 c) Con $x = 5$, el valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $b \cdot A$ tenga determinante 1. (0.5 puntos)

Solución: a) Para los valores de x distintos de 1 y 3. b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $b = -\frac{1}{2}$

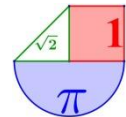
12. (Asturias Junio 2017) Opción B. 1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Estudia, en función de los valores reales de k , si la matriz $B \cdot A$ tiene inversa. Calcúlala, si es posible, para $k = 1$. (1.5 puntos)
 b) Estudia, en función de los valores reales de k , si la matriz $A \cdot B$ posee inversa. (1 punto)

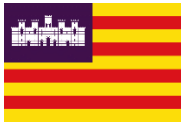


Solución: a) Tiene inversa para cualquier valor de k . Si $k = 1 \rightarrow (B \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 \\ -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$

b) No posee inversa para ningún valor de k .



BALEARES



1. (Balears Extraordinaria 2022) 1. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad B = (\lambda \quad 3\lambda \quad 6)$$

- (a) Calcule el determinante de la matriz A. (1 punto)
 (b) En función del parámetro λ , halle el rango de la matriz A. (3 puntos)
 (c) Para el valor de $\lambda = 1$, halle la matriz inversa de A, A^{-1} . (3 puntos)
 (d) Para el valor de $\lambda = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA = B$. (3 puntos)

Solución: (a) $|A| = -\lambda^2 + 2\lambda$ (b) Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 2$ el rango de A es 3 y si $\lambda = 2$ o $\lambda = 0$ el rango

de A es 2. (c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $X = \begin{pmatrix} -22 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

2. (Balears Ordinaria 2022) 1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y λ un parámetro real cualquiera.

- (a) Calcule la matriz $A - \lambda I$. (2 puntos)
 (b) Calcule la matriz $(A - \lambda I)^2$. (3 puntos)
 (c) Halle, si existen, los valores del parámetro λ para los cuales se satisface la relación $(A - \lambda I)^2 = B$ (5 puntos)

Solución: (a) $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ (b) $(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 2+\lambda^2 & 1-2\lambda & -2\lambda \\ 1-2\lambda & \lambda^2-2\lambda+2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$ (c) $\lambda = 2$

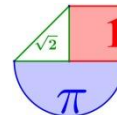
3. (Balears Extraordinaria 2021) 1. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcula'n els determinants: $\det(A)$, $\det(B)$. (2 punts)
 (b) Calcula la matriu producte $B \cdot A$, la matriu transposada $(B \cdot A)^t$. (3 punts)
 (c) Perqué es compleixi la relació $A \cdot X = B \cdot A$, quantes files i columnes ha de tenir la matriu X? (2 punts)
 (d) Calcula la matriu X que satisfà la relació (3 punts)

$$A \cdot X = B \cdot A$$

Solución: (a) $|A| = -2$, $|B| = -17$ (b) $(B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$



(c) La matriz X debe ser una matriz cuadrada de orden 2. (d) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7/2 & 1 \end{pmatrix} = X$

2. (Balears Ordinaria 2021) 1. Donat la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

- (a) Estudia el rang de la matriu A segons els valors de a . (6 punts)
 (b) Determina per a quins valors de a la matriu A és invertible. (1 punt)
 (c) Per al valor de $a = -1$ calcula la solució, X , de l'equació matricial

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ punts})$$

Solució: (a) Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1$ el rango de A es 3, si $a = 0$ el rango de A es 2 y si $a = \pm 1$ el rango de A

es 1. (b) La matriz tiene inversa cuando $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1$ (c) $X = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$; con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

3. (Balears Ordinaria 2021) 2. Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcula A^t , A^2 i A^{-1} , on A^t es la matriu transposada i A^{-1} la inversa. (3 punts)
 (b) Sigui I la matriu identitat. Resol X de l'equació

$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ punts})$$

- (c) Calcula totes les matrius B per a les quals es té que

$$A \cdot B = B \cdot A^t \quad (4 \text{ punts})$$

Solució: (a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (c) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

4. (Balears Extraordinaria 2020) Opció A 1. Donada l'equació matricial

$$M \cdot X + N = P,$$

on X és la matriu incògnita i

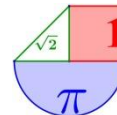
$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Per a quins valors del paràmetre a existeix la matriu inversa de M ? (1 punt)
 (b) Calcula la matriu inversa de M . (3 punts)
 (c) Per a $a = 2$, resol l'equació matricial, si és possible. (3 punts)
 (d) Per als valors de a per als quals existeix la matriu inversa de M , resol l'equació matricial. (3 punts)

Solució: a) Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ la matriz M tiene inversa.

$$b) M^{-1} = \frac{1}{a+a^2} \begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \text{ siendo } a \neq 0 \text{ y } a \neq -1. \quad c) X = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad d) X = \frac{2}{1+a} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. (Balears Extraordinaria 2020) Opció B 1. Donades les matrius A i B ,



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) calcula $A \cdot B$ i $(A \cdot B)^t$, on la "t" indica matriu transposada. (4 punts)
 (b) és possible calcular B^2 ? Si ho és, calcula-la. (1 punt)
 (c) per als diferents valors de x , calcula el rang de la matriu A . (5 punts)

Solució: (a) $(AB)^t = \begin{pmatrix} 2+x & 12 & 18 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix}$ (b) No es posible. (c) Cuando $x = 4$ el rango de A es 1. Cuando $x \neq 4$ el rango de A es 2.

- 6. (Balears Julio 2019) OPCIÓ B 1.** Considerem la matriu i els vectors següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

Trobau x , y i z perquè es satisfaci:

$$A \cdot b - 2c = d \quad (10 \text{ punts})$$

Solució: $x = y = z = 1$

- 7. (Balears Junio 2019) OPCIÓ B 1.** Considerem la matriu i els vectors següents:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calculau x i y perquè es verifiqui:

$$b - A \cdot c = A \cdot d \quad (10 \text{ punts})$$

Solució: $x = \frac{1}{9}$ e $y = \frac{3}{2}$; $x = \frac{1}{13}$ e $y = -\frac{1}{2}$

- 8. (Balears Julio 2018) B.1.** Determinau quines relacions han d'existir entre a , b , c i d perquè es verifiqui $AM = MA$, sent A i M les matrius següents: (10 punts)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

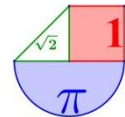
Solució: La relació es: $c = -b$ y $d = a - b$, siendo a y b dos números cualesquiera.

- 9. (Balears Junio 2018) B.1.** Considerem les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trobau la matriu X

que verifica: $A \cdot X \cdot B = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (10 punts)

Solució: $X = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

- 10. (Balears septiembre 2016) B.1.** Calculau la matriu X tal que: $A \cdot X \cdot A = B$, on



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (10 \text{ punts})$$

Solució: $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 8 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

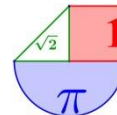
11. (Balears junio 2016) B.1. Sigui A la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \text{on } a \text{ es un valor real.}$$

Calculau A^2 , A^3 i A^4 (4 punts) i donau una fórmula general per a l'expressió de A^n . (6 punts)

Solució: $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a & a^2 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2 & a^3 & 0 \\ 3a & 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 0 & 0 \\ 4a^3 & a^4 & 0 \\ 6a^2 & 4a^3 & a^4 \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1} & a^n & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} & na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$



CANARIAS

**1. (Canarias EBAU Extraordinaria 2022) 2A.** Resuelve los siguientes apartados:

a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para $k \in \mathbb{R}$ sea C la matriz dada por: 0.75 pts

$$C = A' + kB \cdot A$$

Averigua para qué valores de k , la matriz C tiene rango 2

b) Encuentra la matriz X , de dimensión 3×3 , que verifica $M^t \cdot X = I - M$, donde

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.75 pts

Solución: a) La matriz C tiene rango 2 si k es distinto de 1 y de -1 . b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

2. (Canarias EBAU Ordinaria 2022) 2A. Averigua qué dos matrices de dimensiones 3×3 , X e Y , verifican las siguientes condiciones:

- La suma de ambas matrices X e Y da como resultado la matriz I_3

(siendo I_3 la matriz identidad 3×3)

- Siendo $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 14 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de A es el resultado de realizar la resta del doble de la

matriz X y cinco veces la matriz Y

2.5 pts

Solución: $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. (Canarias Extraordinaria 2021) 2A. Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Sea la matriz $M = A + c \cdot B$, donde c es un número real cualquiera. Calcular los valores de c de forma que el rango $(M) = 1$

1 pto

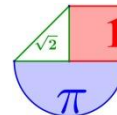
b) Sea la matriz $D = A^2 + B \cdot A$. Averiguar la matriz X que cumple la siguiente ecuación matricial:

$$D \cdot X = -30 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1.5 pts

Solución: a) Para $c = -1$ o $c = 6$ el rango de M es 1. b) $X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -12 & -2 & -2 \\ -24 & -14 & -44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 12 & 7 & 22 \end{pmatrix}$

4. (Canarias Ordinaria 2021) 2A. Calcular el valor de la matriz $M = X^2 - Y^2$, siendo X e Y las matrices que son solución del siguiente sistema:



$$\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad 2.5 \text{ pts}$$

Solución: $M = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}$

5. (Canarias Extraordinaria 2020) Grupo A. 2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Se plantea la siguiente ecuación matricial: $X \cdot A - C^t = X \cdot B$

- a. Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X. 0.5 pts
 b. Halle la matriz X que cumple la ecuación. 2 pts

Solución: a. X es de dimensión 2×3 . Tiene 2 filas y 3 columnas. b. $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. (Canarias Ordinaria 2020) Grupo A. 2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

- a. Halle los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa. 1 pto
 b. Tomando el valor $k = -1$ en la matriz A, calcule la matriz X que verifica que: $A \cdot X = 24 \cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3. 1,5 pts

Solución: a) Existe la inversa de la matriz A cuando k es distinto de 0, 1 y 5. b) $X = \begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

7. (Canarias Julio 2019) Opción B 2. Sea la matriz $C = A \cdot B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

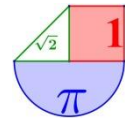
- a) Encontrar los valores de m para los que existe inversa de la matriz C (1,25 pts)
 b) Calcular la matriz inversa de C en el caso de $m = 2$ (1,25 pts)

Solución: a) Cualquier valor de m distinto de 1 y -1 b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$

8. (Canarias Junio 2019) Opción B 2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y sea } I_2 \text{ la matriz identidad de orden 2}$$

- a) Calcular el valor de x de modo que se verifique la igualdad: $B^2 = A$ (0,5 pts)
 b) Calcular el valor de x para que $A - I_2 = B^{-1}$ (1,5 pts)
 c) Calcular el valor de x para que $A \cdot B = I_2$ (0,5 pts)



Solución: a) $x = 1$ b) $x = 0$ c) $x = -1$

9. (Canarias Julio 2018) Opción A 2.- Determinar una matriz X que verifique la ecuación

$$AB - CX = I$$

siendo las matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2,5 \text{ puntos})$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1/2 & 15/2 \\ 11/2 & -13/2 \end{pmatrix}$

10. (Canarias Junio 2018) Opción B. 2.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular los valores del parámetro m para los cuales la matriz A tiene inversa. (1 pts)
 b) Para $m = 1$, calcular la matriz inversa A^{-1} (1,5 pts)

Solución: a) Para cualquier valor de m distinto de -1 y de 2 . b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

11. (Canarias Julio 2017) Opción B. 3. Hallar la matriz X que cumple la ecuación matricial

$$A^{-1}XA = B \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2,5 \text{ puntos})$$

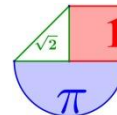
Solución: $X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$

12. (Canarias Junio 2017) Opción A. 3. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular el valor x para que se cumpla: $A + B + C^2 = 3 \cdot I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de orden 2 (1 punto)
 b) Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial: $AX + C^2 = 3 \cdot I_2$ (1,5 puntos)

Solución: a) $x = 2$. b) $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$



CANTABRIA

**1. (Cantabria Extraordinaria 2022) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]**

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A. [0,5 PUNTOS] Calcule A^2 y compruebe que es regular.

B. [0,5 PUNTOS] Calcule la matriz inversa de A^2 .

C. [1 PUNTO] Despeje X en la ecuación matricial $A^2X + B = C$.

D. [0,5 PUNTOS] Calcule la matriz X de orden 2×2 , que verifica $A^2X + B = C$.

Solución: A. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |A^2| = 4 \neq 0$ B. $(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ C. $X = (A^2)^{-1}(C - B)$

D. $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

2. (Cantabria Ordinaria 2022) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A. [0,5 PUNTOS] Compruebe que las matrices A y B son regulares.

B. [0,5 PUNTOS] Calcule las matrices inversas de A y B .

C. [0,75 PUNTOS] Despeje X en la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$ en donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

D. [0,75 PUNTOS] Calcule X .

Solución: A. $|A| = -1 \neq 0$; $|B| = 1 \neq 0$ B. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

C. $X = A^{-1}(A^t - 3B)B^{-1}$ D. $X = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}$

3. (Cantabria Extraordinaria 2021) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación matricial $XA - 2X = A$, en donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{pmatrix}$, siendo a una constante real.

1) [0.5 PUNTOS] Estudia el rango de A en función del parámetro a .

2) [0.25 PUNTOS] Indica para que valores se puede calcular la inversa de A .

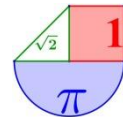
3) [0.75 PUNTOS] Despeja X de la ecuación matricial.

4) [1 PUNTO] Calcula X para $a = 2$.

Solución: 1) El rango de A es 2 si a es distinto de 4 y el rango es 1 si $a = 4$. 2) Para a distinto de 4. 3) Si

$a \neq 0$ $X = A(A - 2I)^{-1}$. Si $a = 0$ no se puede despejar. 4) $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. (Cantabria Extraordinaria 2020) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]



Considera la ecuación matricial $AX - X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, en donde a es un parámetro real.

- 1) [1 PUNTO] Despeja la matriz X de la ecuación anterior.
- 2) [0.5 PUNTOS] Halla los valores de a para los que no es posible calcular X .
- 3) [1 PUNTO] Calcula X para $a = 1$.

Solución: 1) $X = (A - I)^{-1} B$ 2) $A - I$ no es invertible cuando $a = 0$ 3) $X = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$

3. (Cantabria Ordinaria 2020) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación $AXA^t = B$ en donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y A^t denota traspuesta de A .

- 1) [0.5 PUNTOS] Despeja la matriz X en la igualdad dada.
- 2) [0.5 PUNTOS] Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.
- 3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
- 4) [1 PUNTO] Calcula X .

Solución: 1) $X = A^{-1} B (A^t)^{-1}$ 2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ 3) Es cierto. 4) $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$

4. (Cantabria Junio 2019) OPCIÓN DE EXAMEN N° 2 Ejercicio 1

Sean $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcule, razonadamente, el rango de M .
- 2) [2 PUNTOS] Determine todos los vectores v tales que $M^2 \cdot v = M^{-1} \cdot v$.

Solución: 1) El rango de M es 3 2) $x = y = z = 0$

5. (Cantabria septiembre 2018) B.1. Sean

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

- 1) [1,25 PUNTOS] Determine los valores de x e y para los cuales $AB = BA$.
- 2) [1,5 PUNTOS] Determine un valor x para el que $A^2 = 6A$ ¿Tiene A inversa en este caso?
- 3) [0,5 PUNTOS] Sean N, R, S, X matrices 2×2 que tienen todas matriz inversa. Despeje la matriz X de la expresión $N \cdot X \cdot R = S$.

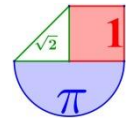
Solución: 1) $x = 1, y = 1$ 2) $x = 9$. No tiene inversa 3) $X = N^{-1} \cdot S \cdot R^{-1}$

6. (Cantabria junio 2018) A.1. Sean x, y, z números reales. Consideremos las matrices

$A = \begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 1) [2 PUNTOS] Escriba un sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z que resuelvan el problema matricial $AB = C$ y calcule todas sus soluciones.
- 2) [1,25 PUNTOS] Si $x = 0, y = 0$, calcule para qué valores de z la matriz A tiene rango 2.

Solución: 1) $x = 0, y = 1, z = 0$ 2) $z = 0, z = -1$


7. (Cantabria septiembre 2017) OPCIÓN DE EXAMEN N° 1. Ejercicio 1

Sea M la matriz $\begin{pmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{pmatrix}$

- 1) [2,25 PUNTOS] Calcule el rango de M en función del valor de x .
- 2) [1 PUNTO] Calcule la inversa de M en el caso de $x = -1$.

Solución: 1) Para $x \neq 0$ y $x \neq 1$ el rango es 3; para $x = 1$ el rango es 2 y para $x = 0$ el rango es 1. 2)

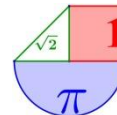
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/6 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix}$$

8. (Cantabria junio 2017) A.1. Consideremos la igualdad matricial $A \cdot M = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) [0,25 puntos] ¿Cuántas fila y columnas debe de tener la matriz M ?
- 2) [1'5 puntos] Para qué valores de t es la matriz de A invertible?
- 3) [1'5 puntos] En el caso $t = -1$, despeje la matriz M en función de las matrices A y B y calcule su valor

Solución: 1) M debe ser 3×2 2) Para cualquier valor distinto de 1 3) $M = \begin{pmatrix} 1/3 & -5/3 \\ -1 & 1/2 \\ -2/3 & -1/6 \end{pmatrix}$



CASTILLA LA MANCHA



1. (Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2022) 3. b) [1 punto] Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

donde $x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcula razonadamente (e indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

Solución: -4

2. (Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2022) 7. a) [1,5 puntos] Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo X, A y B matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = (I - A)^{-1} B$. $X = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

3. (Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2022) 1.

a) [1,5 puntos] Encuentra todas las matrices que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

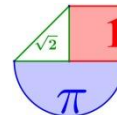
b) [1 punto] ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

Solución: a) $X = \begin{pmatrix} 3c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. (Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2022) 6. a) [1,5 puntos] Estudia el rango de la matriz M en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución: La matriz M tiene rango 2 si $m = 1$ y rango 3 si $m \neq 1$



5. (Castilla la Mancha Extraordinaria 2021) 1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) [1 punto] Calcula razonadamente la matriz inversa de A.
 b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + 3I = A$.

$$\text{Solución: a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ b) } X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 11/2 & -3/2 \\ 3/2 & -9/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

6. (Castilla la Mancha Ordinaria 2021) 1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) [1 punto] Calcula razonadamente el determinante de A^T , es decir, la matriz traspuesta de A.
 b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

$$\text{Solución: a) } 1. \text{ b) } X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

7. (Castilla la Mancha Extraordinaria 2020) 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) [1 punto] Calcula razonadamente la matriz inversa de A.
 b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$; donde I_3 es la matriz identidad.

$$\text{Solución: a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ b) } X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

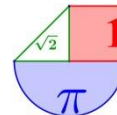
8. (Castilla la Mancha Ordinaria 2020) 1. a) [1,25 puntos] Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) [1,25 puntos] Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

$$\text{Solución: a) No tiene inversa cuando } a = 0; a = -2 \text{ o } a = 1. \text{ b) Se cumple cuando } y = 1; x = 4 + z; z \in \mathbb{R}$$

9. (Castilla la Mancha Julio 2019) 3B. Dadas las matrices



$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. (1 punto)
 b) Para $a = 1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. (1,5 puntos)

Solución: a) $a \neq 0$ y $a \neq -2$ rango es 3. En el resto el rango es 2. b) $X = \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & 1/4 \\ 1/16 & 1/2 & -1/8 \end{pmatrix}$

10. (Castilla la Mancha Junio 2019) 3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. (1 punto)
 b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X - 2B = C$. (1,5 puntos)

Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \\ -9 & -12 & -23 \end{pmatrix}$

11. (Castilla La Mancha Julio 2018) 3B. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Halla razonadamente dos parámetros a y b tales que $A^2 = aA + bI$. (1,25 puntos)
 b) Calcula razonadamente todas las matrices X que verifican que $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$. (1,25 puntos)

Solución: a) $a = 2$ y $b = -1$ b) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

12. (Castilla La Mancha Junio 2018) 3B. a) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la

siguiente matriz tenga inversa. $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (1 punto)

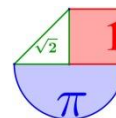
- b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. (1 punto)
 c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $|A^{-1}|$ y $|2A|$. (0,5 puntos)

Solución: a) No tiene inversa para $a=4/3$ ni para $a=1$ b) $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $1/4$ y 32

13. (Castilla La Mancha Septiembre 2017) 3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula razonadamente A^{-1} . (1 punto)
 b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X + B = C^2$. (1,5 puntos)



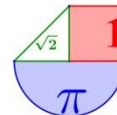
Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

14. (Castilla La Mancha Junio 2017) 3B. Dadas las matrices

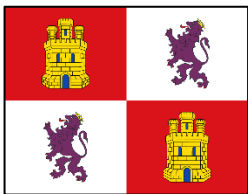
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Tiene inversa la matriz $2\mathbf{I}_3 + \mathbf{B}$? Razona la respuesta. \mathbf{I}_3 es la matriz identidad de orden 3. (1 punto)
 b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X + C = A - X \cdot B$. (1,5 puntos)

Solución: a) Si b) $X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$



CASTILLA - LEÓN



1. (Castilla - León Extraordinaria 2022) E2.- (Álgebra)

a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállese la matriz X tal que $AX + B = C$

(1.2 puntos)

b) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, explíquese cuales de los productos

MN , MP , NP pueden calcularse, y calcúlense cuando se pueda.

(0.8 puntos)

Solución: a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) MN y NP no son posibles. $MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. (Castilla - León Ordinaria 2022) E2.- (Álgebra)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de a que hace que:

$$A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Solución: debe ser $a = 1$.

3. (Castilla - León Extraordinaria 2021) E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallar la matriz P que verifica que $M^{-1}PM = N$

(2 puntos)

Solución: $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

4. (Castilla - León Ordinaria 2021) E2.- (Álgebra) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de n para los que la matriz A^2 tiene inversa. (1 punto)

b) Para $n = 2$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. (1 punto)

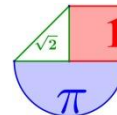
Solución: a) La matriz A tiene inversa cuando $n \neq 1$. b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

5. (Castilla - León Extraordinaria 2020) E2.- (Álgebra) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de m y n para que se verifique:

$$A^2 = A^t \quad (A^t \equiv \text{la traspuesta de } A)$$

(1,2 puntos)



b) ¿Para qué valores de m y n la matriz A no es invertible?

(0,8 puntos)

Solución: a) Los valores son: $m = n = 0$ o $m = 0$ y $n = 1$ b) Para $n = 0$ y cualquier valor de m la matriz no es invertible.

6. (Castilla - León Ordinaria 2020) E2.- (Álgebra) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$

a) Indique para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1} .

(0,5 puntos)

b) Si $a = 4$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

encuentre la matriz X que verifica que $B + XA = C$

(1,5 puntos)

Solución: a) Cuando $a \neq 0$ y $a \neq 3$ la matriz A tiene inversa. b) $X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

7. (Castilla-León Julio 2019) Opción B E1.- Dadas las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de x e y , para que el producto

AM sea igual a la inversa de la matriz N .

(2 puntos)

Solución: $x = 3$ e $y = 4$

8. (Castilla-León Junio 2019) Opción B E1.- a) Encontrar los valores de k para que la matriz

$A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible.

(1 punto)

b) Encontrar la inversa de A para $k=2$.

(1 punto)

Solución: a) $k \neq 0$ y $k \neq 1$. b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. (Castilla-León julio 2018) Opción B. E1.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Discutir, según los valores de k , cuándo A tiene inversa y calcularla para $k=2$.

(1 punto)

b) Para $k=2$, resolver la siguiente ecuación matricial: $AX + B = AB$.

(1 punto)

Solución: a) Para $k \neq 1$. Si $k = 2 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

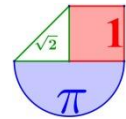
10. (Castilla-León junio 2018) Opción B. E1.- Dadas las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, calcúlense a y b para que se verifiquen $|MA|=2$ y $|M+B|=3$,

donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz.

(2 puntos)

Solución: $a = -2$ y $b = 0$.



11. (Castilla-León septiembre 2017) Opción A E1.- a) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$. Estudiar, en función del parámetro a , cuando M posee inversa. **(0,5 puntos)**

b) Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, calcular A^2 y A^{-1} . **(1,75 puntos)**

Solución: a) Para cualquier valor de a distinto de 6 existe la inversa de la matriz M .

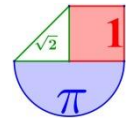
$$b) A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ 24 & 55 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

12. (Castilla-León junio 2017) Opción A E1.- Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Estudiar si A y B tienen inversa y calcularla cuando sea posible. **(1 punto)**

b) Determinar X tal que $AX = 2B + I$ siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(1,25 puntos)**

Solución: a) La matriz A tiene inversa. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ La matriz B no tiene inversa. b) $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$



CATALUÑA



1. (Cataluña PAU Extraordinaria 2022) 5.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en la que a es un parámetro real.

a) Calcule los valores del parámetro a para los cuales la matriz A es invertible. [1,25 puntos]

b) Para el caso $a = 3$, resuelva la ecuación $A \cdot X = B - 3I$ en la que $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

Solución: a) La matriz A es invertible si a es distinto de 0, 1 y 2. b) $X = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 13/3 & -3 & -1 \\ -14/3 & 7/2 & 1 \end{pmatrix}$

2. (Cataluña PAU Ordinaria 2022) 5. Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros

a , b y c .

a) Calcule las matrices X tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [1,5 puntos]

b) Determine los valores de a , b y c para que la matriz inversa de X sea $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

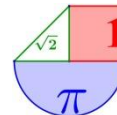
[1 punto]

Solución: a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ o $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) Los valores buscados son $a = 2$; $b = 1$ y $c = -1$.

3. (Cataluña Extraordinaria 2021) 5. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en la que a es un

parámetro real.

a) Encuentre para que valores de a la matriz A es invertible. [1 punto]



b) Compruebe que, para el caso $a = 3$, la matriz A es invertible y resuelva la ecuación matricial

$$AX = B - 3I, \text{ donde } B \text{ es la matriz } B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad [1,5 \text{ puntos}]$$

Solución: a) Tiene inversa cuando el valor de a es distinto de 0, 1 y 2. b) $X = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$

4. (Cataluña Ordinaria 2021) 5. a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial

$$A^2 X = A - 3I, \text{ donde } I \text{ es la matriz identidad.} \quad [1,25 \text{ puntos}]$$

b) Una matriz cuadrada M satisface que $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, donde I es la matriz identidad. Justifique que M es invertible y exprese la inversa de M en función de las matrices M e I . [1,25 puntos]

Solución: a) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $M^{-1} = M^2 - 3M + 3I$

5. (Cataluña Extraordinaria 2020) Série 4. 4. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un

paràmetre real.

a) Estudieu el rang de la matriu A per als diferents valors del paràmetre a . [1,25 punts]

b) Comproveu que per a $a = 4$ la matriu A és invertible i que es verifica que $A^{-1} = A^2$. [1,25 punts]

Solución: a) Para $a \neq 3$ y $a \neq 5$ el rango de A es 3, para $a = 3$ o $a = 5$ el rango de A es 2.

$$b) A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. (Cataluña Ordinaria 2020) Série 1. 5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = I - 3X$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2. [1,25 punts]

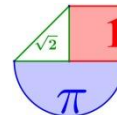
b) Comproveu que la matriu X és invertible i calculeu-ne la matriu inversa. [1,25 punts]

Solución: a) La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ b) $X^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

7. (Cataluña Septiembre 2019) Serie 5. 3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$. [1 punto]

b) Justifica que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas tiene como resultado la matriz nula, entonces el determinante de alguna de las dos matrices ha de ser cero. [1 punto]



Solución: a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

8. (Cataluña Junio 2019) Serie 1. 5. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

- a) Calcula para qué valores del parámetro a se satisface la igualdad $M^2 - M - 2I = 0$, donde I es la matriz identidad y $=$ es la matriz nula, ambas de orden 2.
 b) A partir de la igualdad del apartado anterior, encuentra una expresión general para calcular la matriz inversa de M y, a continuación, calcula la inversa de M para el caso de $a = \sqrt{2}$.

Solución: a) $a = \pm\sqrt{2}$ b) $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

9. (Cataluña Junio 2017) Considereu la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calculeu les potències A^2 , A^3 i A^6 .
 b) Calculeu la inversa de la matriu A^5 .

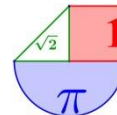
Solución: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = -Id$ $A^6 = Id$

10. (Cataluña Junio 2017) Considereu les matrius quadrades d'ordre 2 de la forma

$$M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2 + 1 & x \end{pmatrix}, \text{ amb } x \text{ i } y \text{ nombres reals.}$$

- a) Comproveu que la matriu M és sempre invertible, independentment dels valors de x i de y .
 b) Per a $x = 1$ i $y = -1$, calculeu M^{-1} .

Solución: b) $M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$



EXTREMADURA



- 1. (Extremadura EBAU Extraordinaria 2022) 1.** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- a) Estudiar el rango de la matriz $A - \lambda I$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 2×2 . (1,5 puntos)
- b) Para $\lambda = 2$ solucionar el sistema $AX = \lambda X$, donde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (0,5 puntos)

Solución: a) Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$ el rango de $A - \lambda I$ es 2. Si $\lambda = -1$ o $\lambda = 2$ el rango es 1.

b) $X = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

- 2. (Extremadura EBAU Ordinaria 2022) 1.** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- a) Calcular, cuando sea posible, las matrices $C \cdot B^t, B^t \cdot C, B \cdot C$, donde B^t es la matriz traspuesta de B . (0,5 puntos)
- b) Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que el sistema $x \cdot A + y \cdot B = C$ de tres ecuaciones y dos incógnitas x e y , sea compatible determinado y resolverlo para ese valor de a . (1,5 puntos)

Solución: a) $C \cdot B^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -8 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}; B^t \cdot C = (-3); B \cdot C$ no es posible.

b) $a = -1$. La solución es $x = \frac{7}{5}; y = -\frac{3}{5}$

- 3. (Extremadura EBAU Ordinaria 2022) 2.** Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

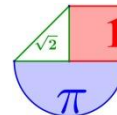
Calcular la matriz X cuadrada de orden 3 que cumple $M \cdot X - N = 2X$ (2 puntos)

Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

- 4. (Extremadura Extraordinaria 2021) 1.** Sea la igualdad matricial $M \cdot X = N$, donde

$$M = \begin{pmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz X ? (Justificar la respuesta). (0,5 puntos)



- b) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ es la matriz M invertible? (1 punto)
 c) ¿Puede ser $M \cdot N$ invertible para algún valor de $k \in \mathbb{R}$? (0,5 puntos)

Solución: a) Debe tener 3 filas y 2 columnas. b) El valor de k debe ser distinto de 1 y de -2 . c) No es invertible para ningún valor de k

- 5. (Extremadura Ordinaria 2021) 1.** Demostrar que la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = 0$ y determinar los escalares λ_1 y λ_2 de \mathbb{R} (donde I y 0 son las matrices 2×2 identidad y cero). (2 puntos)

Solución: La solución es $\lambda_1 = -4$; $\lambda_2 = 3$.

- 6. (Extremadura Extraordinaria 2020) 1.** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$
 a) Calcule los productos de matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$? (1 punto)
 b) Compruebe si es cierta la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + B^2$. (1 punto)

Solución: a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. No se cumple. b) No se cumple.

- 7. (Extremadura Ordinaria 2020) 1.** Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Estudie los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la matriz tiene inversa. (1 punto)
 b) Calcule la inversa para $k = 1$. (1 punto)

Solución: a) Cuando $k \neq 2$ y $k \neq -1$. b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

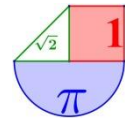
- 8. (Extremadura Julio 2019) OPCIÓN A 1.** Dadas las siguientes matrices A e I , pruebe que la inversa de A es $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

Solución: Demuestro que $I = A^3 - 3A^2 + 3A$

- 9. (Extremadura Junio 2019) OPCIÓN B 1.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$
 a) Halle los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que la matriz A tenga inversa. (1 punto)
 b) Halle, si existe, la inversa de la matriz para $\lambda = 1$. (1 punto)

Solución: a) $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq \frac{3}{2}$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/2 & -3/2 & -2 \end{pmatrix}$



10. (Extremadura Julio 2018) A.1. Sea la matriz A que depende del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \\ -2 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine el rango de la matriz A según los valores del parámetro a. (1,5 puntos)

(b) Para $a = 1$ resuelva, si existe solución, la ecuación matricial $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1 punto)

Solución a) Si $a=0$ o $a=2$ el rango es 2. Si a es distinto de 0 y 2 el rango es 3 b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

11. (Extremadura Junio 2018) A.1. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule la matriz $C = -3A + B^2$.

b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A.

Solución a) $C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ -6 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

12. (Extremadura Julio 2017) A.1.

(a) Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (0,5 puntos)

(b) Obtenga el determinante de la matriz $B = 1/3A^4$ sin calcular previamente B. (0,5 puntos)

(c) Calcule la matriz inversa de A. (1,5 puntos)

Solución a) 3 b) 3 c) $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

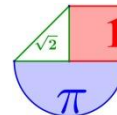
13. (Extremadura Junio 2017) B.1. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \quad -2), \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Obtenga la matriz $A \cdot B$ y calcule su rango.

b) Clasifique y resuelva el sistema de ecuaciones $A \cdot B \cdot X = 0$

Solución: a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ su rango es 1. b) $X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} y \in \mathbb{R}$



GALICIA

**1. (Galicia ABAU Extraordinaria 2022) 1. Números y Álgebra:**

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota:** a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A .

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

Solución: a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) Los valores buscados son $b_{12} = 0$ y $b_{22} = 2$.

2. (Galicia ABAU Ordinaria 2022) 1. Números y Álgebra:

Despeje X de la ecuación matricial $AB(X - I) = C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = (AB)^{-1}C + I$; $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. (Galicia Extraordinaria 2021) 1. Números y Álgebra:

Despeje X en la ecuación matricial $B(X - I) = A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcule X si

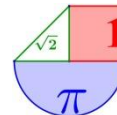
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

4. (Galicia Ordinaria 2021) 1. Números y Álgebra:

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2, \\ (-1)^j (i-1) & \text{si } i \neq 2. \end{cases}$ Explique si A y A

$+ I$ son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j , e I es la matriz identidad)



Solución: La matriz A no es invertible. $(A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

5. (Galicia Extraordinaria 2020) 1. Números y Álgebra:

Para la ecuación matricial $A^2X + AB = B$, se pide:

a) Despejar X suponiendo que A (y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4×4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Solución: a) La matriz B debe ser 4×3 y la matriz X será 4×3 . b) $X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. (Galicia Ordinaria 2020) 1. Números y Álgebra:

Sean A y B las dos matrices que cumplen $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

b) Calcular $A^2 - B^2$. (Advertencia: en este caso, $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$)

c) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA + (A+B)^T = 2I + XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $A+B$

Solución: a) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

7. (Galicia Julio 2019) Opción A 1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Despeja X en la ecuación $XA + B = C$, sabiendo que A es una matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

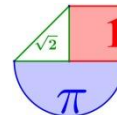
Solución: a) $X = (C - B)A^{-1}$ b) $X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$

8. (Galicia Junio 2019) Opción A 1. Da respuesta a los siguientes apartados:

a) Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A + I$ es invertible despeja X en la ecuación $A - X = AX$

b) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcula X tal que $A - X = AX$.

Solución: a) $X = (A + I)^{-1} A$ b) $X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$



9. (Galicia septiembre 2018) A.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Que relación existe entre a súa inversa A^{-1} e a súa trasposta A^t ?
 b) Estuda, segundo os valores de λ , o rango de $A - \lambda I$, sendo I a matriz identidade de orde 3. Calcula

as matrices X que verifican $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución: a) $A^{-1} = A^t$. b) Si $\lambda = -1$ el rango es 2 y si $\lambda \neq -1$ el rango es 3. $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$

10. (Galicia junio 2018) A. 1. a) Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula os valores de m para que a

matriz inversa de M sexa $\frac{1}{4}M$.

- b) Dadas as matrices $A = (-1 \ 0 \ 1)$, $B = (3 \ 0 \ 1)$ e $C = (4 \ -2 \ 0)$, calcula a matriz X que verifica: $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$, sendo B^t e C^t as traspostas de B e C respectivamente.

Solución: a) $m = -1$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}$

11. (Galicia septiembre 2017) A.1. Dadas as matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

- a) Determina, según do os valores de k , o rango das matrices AB e BA .

b) Para o valor $k = 0$, determina as matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución: a) Rango de AB es 2 y Rango de BA es 1 para $k=-2$ y 2 para $k \neq -2$ b) $X = \begin{pmatrix} -a \\ 4a \\ a \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}$

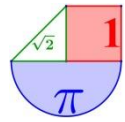
12. (Galicia junio 2017) A.1. Dada a matriz

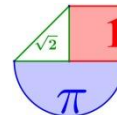
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Determina, segundo os valores de λ , o rango da matriz $AA^t - \lambda I$, sendo A^t a matriz trasposta de A e I a matriz unidade de orde 2.

b) Determina a matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica a ecuación matricial $AA^t X = 6X$.

Solución: a) si $\lambda=0$ o $\lambda=6$ el rango es 1 y si toma un valor distinto de 0 y 6 el rango es 2 b) $X = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$





LA RIOJA



1. (La Rioja EBAU Extraordinaria 2022) 5.- (2 puntos) Calcula sin desarrollar el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Justifica en cada paso la propiedad de determinante que has utilizado.

Solución: 0

2. (La Rioja EBAU Extraordinaria 2022) 6.- (2 puntos) Resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. (La Rioja EBAU Ordinaria 2022) 5.- (2 puntos) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determina para que valores de a la matriz AB tiene inversa.

(ii) Resuelve para $a = 0$ la ecuación matricial $ABX = 3I$, siendo I la matriz identidad.

Solución: (i) La matriz AB tiene inversa para los valores $a \neq -\frac{2}{3}$ (ii) $X = \begin{pmatrix} -3/2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$

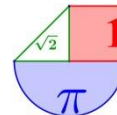
4. (La Rioja EBAU Extraordinaria 2021) 5.- (2 puntos) Hallar las matrices $A - B$, A y B , sabiendo que las matrices A y B , satisfacen las siguientes identidades:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $A - B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. (La Rioja Extraordinaria 2021) 6.- (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1}

y A^{20} , utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3 = -I$, donde I es la matriz identidad.



$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad A^{20} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

6. (La Rioja Ordinaria 2021) 5.- (2 puntos) Hallar A y B , matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3A - 5B = C, \\ -A + 3B = D \end{cases}$$

donde C y D son las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz inversa de $C^T D$, donde C^T es la matriz traspuesta de C .

$$\text{Solución: } (C^T D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & \frac{1}{54} \\ \frac{1}{162} & -\frac{13}{162} \end{pmatrix}$$

7. (La Rioja Ordinaria 2021) 6.- (2 puntos) Sabiendo que $|A| = 1$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular el determinante de la matriz B con

$$B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{pmatrix}$$

Calcular $|4B^{-1}A^T|^2$.

$$\text{Solución: } |B| = -2. \quad |4B^{-1}A^T|^2 = 1024$$

8. (La Rioja Extraordinaria 2020) 5.- (2 puntos) Calcular el siguiente determinante:

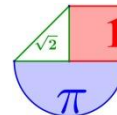
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Solución: } (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

9. (La Rioja Extraordinaria 2020) 6.- (2 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Hallar A^{-1} y A^{10} .



$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. (La Rioja Ordinaria 2020) 6.- (2 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Hallar A^{-1} y A^{10} .

$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. (La Rioja Ordinaria 2020) 4.- (2 puntos) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- a) Hallar α y β de tal forma que $A^2 = \alpha A + \beta I$, siendo I la matriz identidad.
b) Calcular A^5 utilizando la anterior igualdad.

$$\text{Solución: a) } \alpha = 4; \beta = -4. \text{ b) } A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 80m & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

12. (La Rioja Julio 2019) Propuesta A y B 4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}.$$

- (I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A .
(II) Halla la inversa de la matriz A , cuando exista.
(III) Para $a=1$ y las matrices

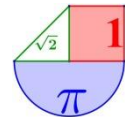
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resuelva el sistema

$$\begin{cases} BXA = Y \\ \frac{1}{3}Y + C = D \end{cases}$$

$$\text{Solución: (I) Para todo valor de } a \text{ distinto de } 0 \text{ y } 0,5. \text{ (II) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a-1} & \frac{1}{2a-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{(III) } X = \begin{pmatrix} 9 & -15 & -15 \\ -21 & 39 & 42 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$


13. (La Rioja Junio 2019) Propuesta A y B 4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera.

Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

 (I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A .

Sea el sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

 (I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a .

(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

Solución: (I) Existe la inversa de A para cualquier valor de a distinto de 1 y -2 .
(I) Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado, si $a = 1$ es compatible indeterminado y si $a = -2$ es incompatible
(II) Para $a = 1$ la solución es $x = 1 - y - z$; $y = y$; $z = z$. Para $a \neq 1$ y $a \neq -2$ la solución es $x = y = z = \frac{1}{a+2}$
14. (La Rioja Julio 2018) Propuesta A: 1.- (2 puntos) Sean I la matriz identidad de orden 2 y las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

 1. Calcule, si existe, la inversa de A .

 2. Halle las matrices X e Y que son soluciones del sistema

$$AX + BY = 3I,$$

$$AX - BY = I,$$

$$\text{Solución: 1. } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2. \quad X = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

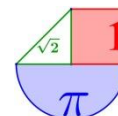
15. (La Rioja Julio 2018) Propuesta B 1.- (3 puntos)

 (I) Determine el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

 (II) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$, calcule $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix}$
Solución: (I) El rango es 2 (II) 8.
16. (La Rioja Julio 2017) Propuesta A 2.- (3 puntos)

 (I) Halle, según el valor del parámetro a , el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & a+4 \end{pmatrix}$$



(II) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 4 tales que $\det(AB) = 1$. ¿Qué se puede decir del rango de A ?

Solución: (I) Si $a \neq \frac{-5}{4}$ el rango es 3. Si $a = \frac{-5}{4}$ el rango es 2. (II) El rango es 4.

17. (La Rioja Julio 2017) Propuesta B 1.- (2 puntos) Sea m un número real y consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(I) Halle los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

(II) Determine el rango de A cuando $m = 2$.

Solución: (I) La matriz A tiene inversa cuando $m \neq 2$ y $m \neq -2$. (II) El rango es 2.

18. (La Rioja Junio 2017) Propuesta B 1.- (2 puntos) Sean las matrices

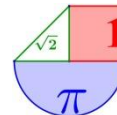
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(I) Halle, si existe, A^{-1} .

(II) Determine, si existe, la solución X de la ecuación matricial

$$A = AXA^{-1} + B$$

Solución: (I) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (II) $X = \begin{pmatrix} 35 & 61 \\ -19 & -33 \end{pmatrix}$



MADRID

**1. (Madrid Extraordinaria 2022) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.**

Se consideran las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB . Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$.
- b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k .
- c) (0.5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA .

Solución: a) La matriz AB tiene inversa si k es distinto de 0 y de 3. Para $k = 1$ $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$b) \quad BA = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} \cdot \left. \begin{array}{l} \text{El rango es 2 para cualquier valor de } k. \\ \text{c) } \begin{cases} 2x = 2 \\ -2y + 2z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \end{array} \right\}$$

2. (Madrid Extraordinaria 2020) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3, 4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

- a) (0.5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
- b) (0.5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.
- c) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
- d) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
- e) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

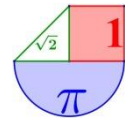
Solución: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ e)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

3. (Madrid Extraordinaria 2020) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A .
- b) (0.5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.
- c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).



Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $|D| = 0$

4. (Madrid Julio 2019) Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.
 b) (0.75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a .
 c) (0.75 puntos) Calcular, en función de a , el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

Solución: a) $a = 1$ o $a = -1$ b) a distinto de 0, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1-a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{-1+a}{a^2} \end{pmatrix}$ c) a^8

5. (Madrid Junio 2019) Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; se pide:

- a) (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a .
 b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

Solución: a) $a \neq 1$ y $a \neq -2$. Rango de A es 3. $a = 1$ o $a = -2$ el rango de A es 2. b) $(AM)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

6. (Madrid julio 2018) Ejercicio 1. Dadas las matrices

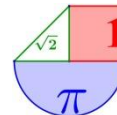
$A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1.25 puntos) Discutir el rango de la matriz A , en función de los valores del parámetro α .
 b) (0.75 puntos) Para $\alpha = 0$, calcular, si es posible, A^{-1} .
 c) (0.5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso $\alpha = 1$.

Solución: a) Si $\alpha=1$ el rango es 2 y si $\alpha \neq 1$ el rango es 3 b) $A = \frac{1}{-490} \begin{pmatrix} -20 & 40 & -70 \\ 15 & -30 & -70 \\ -21 & -56 & 98 \end{pmatrix}$

c) El sistema es compatible indeterminado y las soluciones son $x = \frac{1}{7} - \frac{5}{7}z$; $y = \frac{37}{14} - \frac{5}{7}z$; $z = z$

7. (Madrid junio 2018) B.1. Dadas las matrices



$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

- a) (1 punto) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.
 b) (1 punto) Para $m = 0$, calcular $A \cdot B$ y $A^{-1} \cdot B$.
 c) (0.5 puntos) Calcular $B \cdot B^t$ y $B^t \cdot B$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B .

Solución: a) Si $m \neq 2$ tiene inversa b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $B \cdot B^t = (4)$ y $B^t \cdot B = (4)$

8. (Madrid septiembre 2017) Opción B Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.
 b) (1.5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$.
 c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6 , en caso de que exista.

Solución: a) $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\text{Rango}(A^3 - I) = \text{Rango}(A - I) = 2$; $\text{Rango}(A^2 - I) = 1$

c) $(A^6)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$

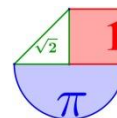
9. (Madrid junio 2017) Opción B Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- a) (1 punto) Determinar la matriz P^{-1} , inversa de la matriz P .
 b) (1 punto) Determinar la matriz B^{-1} , inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.
 c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2 , siendo $A = PJP^{-1}$.

Solución: a) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $|A^2| = 4$



MURCIA



1. (Murcia Extraordinaria 2022) 2: Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$

- a) [0,75 p.] Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022} .
 b) [0,75 p.] Si A es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.
 c) [1 p.] Determine para que valores de a y b la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Solución: a) $A^{2022} = A$. b) 1 c) Los valores serían $a = 0$ o $a = 1$ y $b = 0$ o $b = 1$.

2. (Murcia Ordinaria 2022) 2: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1 p.] Si I denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3 = -I$ y calcule A^{2023} .
 b) [0,5 p.] Calcule la inversa de A .
 c) [1 p.] Resuelva la ecuación matricial $AX - B^T = A^2$, donde B^T denota la matriz traspuesta de B .

Solución: a) $A^{2023} = A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -9 & -14 \\ 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

3. (Murcia Extraordinaria 2021) 2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) [1 p.] Si se denota por $\text{tr}(A)$ la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por $|A|$ el determinante de A , compruebe que, para cualquier valor de a , se cumple la ecuación $A^2 = \text{tr}(A)A - |A|I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.
 b) [0,5 p.] Determine para qué valores de a la matriz A es regular (o inversible).
 c) [1 p.] Para $a = -3$, resuelva la ecuación matricial $AX - A^t = A$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

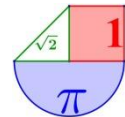
Solución: a) Se comprueba que es cierto.

b) La matriz A es regular para cualquier valor de a distinto de -4 . c) $X = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

4. (Murcia Ordinaria 2021) 2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) [1,5 p.] Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.



b) [1 p.] Resuelva la ecuación matricial $AX - B = C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C .

Solución: a) $|A| = 1 \neq 0$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

5. (Murcia Extraordinaria 2020) 2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) [1 p.] Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5, A^6 .

b) [1 p.] Calcule A^{2020} .

c) [0,5 p.] Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

Solución: a) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; A^5 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{2020} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $|A| = 1 \neq 0$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

6. (Murcia Junio 2020) 2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) [1 p.] Compruebe que las matrices A y B son regulares (o inversibles) y calcule sus matrices inversas.

b) [1,5 p.] Resuelva la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

Solución: a) $|A| = -1 \neq 0 \rightarrow$ La matriz A es regular. $|B| = 1 \neq 0 \rightarrow$ La matriz B es regular.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}$

7. (Murcia Septiembre 2019) B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) [1 p.] Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.

b) [0,5 p.] Para $a = 1$, calcule la inversa de A .

c) [1 p.] Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA + 2I = 2A$, donde I es la matriz identidad 3×3 .

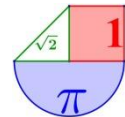
Solución: a) Cuando a es distinto de $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. (Murcia Junio 2019) B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) [1 p.] Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4 .

b) [0,5 p.] Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

c) [1 p.] Determine si existe la inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.



Solución: a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $|A| = 1 \neq 0$. La inversa existe y vale $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. (Murcia Septiembre 2018) CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

- a) [1 p.] Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.
 b) [1,5 p.] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AX = A + A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de A .

Solución: a) $|A| = 1 \neq 0 \rightarrow A$ es regular $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

10. (Murcia Junio 2018) CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) [1,5 p.] Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4 .
 b) [1 p.] ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$?

Solución: a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. (Murcia Septiembre 2017) CUESTIÓN A.1: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) [1,5 puntos] Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.
 b) [1 punto] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = A + B$.

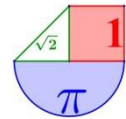
Solución: a) $|A| = |B| = 2 \neq 0$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 3/2 & -5/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

12. (Murcia Junio 2017) CUESTIÓN A.1: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) [1,5 puntos] Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.
 b) [1 punto] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = C$.

Solución: a) $|A| = |B| = -4 \neq 0$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & -3/4 \end{pmatrix}$



NAVARRA



1. (Navarra Extraordinaria 2022) P2) Demuestra que se cumple $|A \cdot B| = 0$ para toda matriz A de dimensión 3×2 , siendo B la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Solución: Es cierto

2. (Navarra Ordinaria 2022) P2) Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26} + A^{25}$ es matriz singular, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Solución: El valor buscado es $t = -1$.

3. (Navarra Extraordinaria 2021) P2) Calcula los valores de t para que se cumpla $|A \cdot B^{-1}| = 1$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Solución: La igualdad $|A \cdot B^{-1}| = 1$ se cumple cuando $t = -1$.

4. (Navarra Ordinaria 2021) P2) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A^3| = 8$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Solución: Los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A^3| = 8$ son $t = -1$ y $t = 2$.

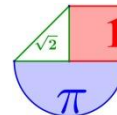
5. (Navarra Extraordinaria 2020) P5) Sabiendo que la inversa de una matriz A es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la

inversa de la matriz $A \cdot B$ es $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determina la matriz B. (2.5 puntos)

$$\text{Solución: } B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

6. (Navarra Ordinaria 2020) P5) Sean A y B dos matrices de tamaño 3×3 tales que $|A| = |B| = \frac{1}{2}$.

Calcula $|C|$ teniendo en cuenta que la matriz C es la siguiente:



$$C = (2 \cdot A^t \cdot B^{-1})^2 \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Solución: $|C| = 64$

7. (Navarra Julio 2019) Opción B. B1 Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

Solución: $t = -1$; $t = 0$ o $t = 1$

8. (Navarra Junio 2019) Opción B. B1 Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A^{35} = A^{25}$ teniendo en cuenta que A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

9. (Navarra Julio 2018) Opción B. B1 Calcula el valor del parámetro t para que se cumpla la igualdad $|A^{-1}| = -1$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & t+2 \\ -t & t & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

Solución: $t = -1$

10. (Navarra Junio 2018) Opción B. B1 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tal que $|A| = -1$. Calcula el

determinante de la matriz $A^2 \cdot B^t$ siendo $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2a-x & 2b-y & 2c-z \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{pmatrix}$ (2 puntos)

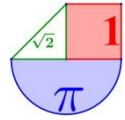
Solución: $|A^2 \cdot B^t| = -2$

11. (Navarra Julio 2017) Opción B. B1 Encuentra la matriz X que verifica $7A - A^7 = BB^t X$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

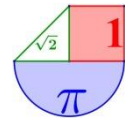
Solución: $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

12. (Navarra Julio 2017) Opción B. B1 Calcula los valores del parámetro t para los que la siguiente matriz no es regular:

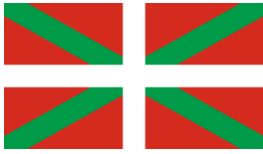


$$A = \begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

Solución: $t = 0, t = -1, t = 2$



PAÍS VASCO



1. País vasco. Extraordinaria 2022. Ejercicio B1

Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

sabiendo que

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6$$

Solución: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3$

2. País vasco. Ordinaria 2022. Ejercicio B1

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinar para qué valores del parámetro m la matriz A no tiene inversa.

Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $m=0$.

Solución: a) La matriz A no tiene inversa cuando $m=1$ o $m=2$. b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. País vasco. Extraordinaria 2021. Ejercicio B1

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

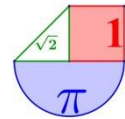
Calcular la matriz X de orden 2×2 que verifica

$$A^2 \cdot X + B = C$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

4. País vasco. Ordinaria 2021. Ejercicio B1

Sea la matriz



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinar para qué valores del parámetro α la matriz A no tiene inversa.
Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $\alpha = 2$.

Solución: a) Para $\alpha = 1$ y $\alpha = 3$ la matriz A no tiene inversa. b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

5. (País vasco Extraordinaria 2020) Ejercicio B1

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular razonadamente M^{2020} .

Solución: $M^{2020} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2020 & 1 \end{pmatrix}$

6. (País vasco Ordinaria 2020) Ejercicio B1

Sea $M(\alpha)$ la matriz dada por $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

Determinar para qué valores de α la matriz no tiene inversa.

Calcular, si es posible, la matriz inversa para $\alpha = 0$, y en caso de que no sea posible razonar por qué no es posible.

Solución: a) La matriz $M(\alpha)$ no tiene inversa para $\alpha = -1$ o $\alpha = 1$. b) $(M(0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. (País vasco julio 2019) Ejercicio B1

Dada una matriz de tamaño 3×3 cuyo determinante es igual a 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

- se cambian entre sí la primera y segunda fila,
- se multiplica a la tercera columna por -2 ,
- se multiplica a toda la matriz por 2 y
- se traspone la matriz.

Calcular de forma razonada el valor del determinante de la matriz obtenida.

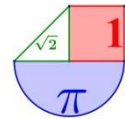
Solución: El determinante valdrá 80.

8. (País vasco julio 2018) A.1. Calcula el rango de la siguiente matriz según el valor de a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: El rango siempre es 3

9. (País vasco junio 2018) A.1. Calcula el rango de la siguiente matriz según el valor de a:



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: Si a es -6 o 2 el rango es 2 y si a es distinto de esos valores es 3

10. (País vasco julio 2017) Opción B Ejercicio B1 a) Calcula para qué valor, o valores, de x admite inversa la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) En caso de existir, calcula la inversa de A para $x = -3$.

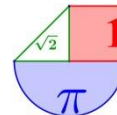
Solución: a) Para cualquier valor de x distinto de $\pm\sqrt{5}$ b) $A^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 6 & 18 & 10 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

11. (País vasco junio 2017) Opción B Ejercicio B1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$

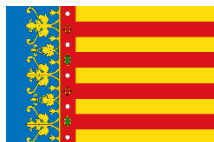
a) ¿Para qué valores de m la matriz A posee inversa? Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro m .

b) Hallar el valor m para que se cumpla la igualdad $A^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) Para $m \neq 0$ el rango de la matriz es 3 y para $m = 0$ la matriz tiene rango 1 . b) $m = 2$



VALENCIA



- 1. (Valencia Extraordinaria 2022) Problema 2.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.
- a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4 puntos)
- b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4 . (3 puntos)
- c) Calcular $\det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$. (3 puntos)

Solución: a) Los valores buscados son $a = 1$; $b = 0$ b) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $|A^{-50}| = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{50}}$

- 2. (Valencia Ordinaria 2022) Problema 1.** Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Se pide:}$$

- a) Demostrar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)
- b) Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^T X + I$, donde I es la matriz identidad. (3 puntos)
- c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n . (3 puntos)

Solución: a) $|C - AB^T| = 3 \neq 0$. Tiene inversa. $(C - AB^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$.

b) $X = (C - AB^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$ c) $(AB^T)^2 = 2^2 I$; $(AB^T)^3 = 2^3 I$; ...; $(AB^T)^n = 2^n I$

- 3. (Valencia Ordinaria 2022) Problema 2.** Dada la matriz

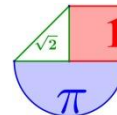
$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar:

- a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m . (4 puntos)
- b) La matriz inversa de A en el caso $m = 2$. (4 puntos)
- c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8 . (2 puntos)

Solución: a) Si $m \neq 0$ y $m \neq \frac{2}{3}$ el rango de A es 3. Si $m = \frac{2}{3}$ el rango es 2 y si $m = 0$ el rango es 1.

b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ c) $m = 1$



4. (Valencia Extraordinaria 2021) Problema 4. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{bmatrix}$ y

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 3]. \text{ Obtened}$$

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a . (3 puntos)

b) Una matriz C tal que $AC = 16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$. (4 puntos)

c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene solución. (3 puntos)

Solución: a) Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el rango de A es 3 y si $a = -2$ o $a = 2$ el rango de A es 2. b)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ c) La matriz } B \text{ tiene rango 1. El sistema tiene infinitas soluciones}$$

5. (Valencia Ordinaria 2021) Problema 4. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que

dependen del parámetro real b .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. (3 puntos)

b) Los valores de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A . (3 puntos)

c) La inversa de A^T , cuando dicha inversa exista. (4 puntos)

Solución: a) No existe la inversa de AB , independientemente del valor de b . Para cualquier valor de b distinto $\pm\sqrt{6}$ existe la inversa de BA . b) La inversa existe para cualquier valor de b . c)

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2 + 2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

6. (Valencia Extraordinaria 2020) Problema 4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

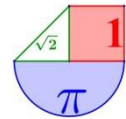
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. (3 puntos)

b) Dos constantes a, b de modo que $A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$ siendo I la matriz identidad. (3 puntos)

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones.

Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema. (2+2 puntos)



Solución: a) $|A|=1 \neq 0$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $a = -3$ y $b = 3$. c) Para $\lambda = 1$. $x = \alpha$; $y = 0$; $z = \beta$

7. (Valencia Ordinaria 2020) Problema 4. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que

dependen del parámetro real b .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. (3 puntos)

b) Los valores de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A . (3 puntos)

c) La inversa de $A^T A$, cuando dicha inversa exista. (4 puntos)

Solución: a) No existe la inversa de AB , independientemente del valor de b . Para cualquier valor de b

distinto de $\pm\sqrt{6}$ existe la inversa de BA . b) La inversa de $A^T A$ existe siempre. c) $(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

8. (Valencia Julio 2019) Problema B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ solo admite una solución. (4 puntos)

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$. (3 puntos)

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la

matriz A^{100} obtener el valor β tal que $A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 puntos)

Solución: a) $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 5$ b) $X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ c) β es 2^{100}

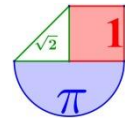
9. (Valencia Junio 2019) Problema A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del

parámetro real a , y una matriz B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$. (2+2 puntos)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$ (3 puntos)



c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$ (3 puntos)

Solución: a) $a \neq -1$ rango es 3, $a = -1$ el rango es 2 b) La solución es $x = t - 1$, $y = \frac{4t-3}{-2}$, $z = t$ c) $m=3$, $n=6$

10. (Valencia Julio 2018) B.1. Resolver los siguientes apartados, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Dadas A y B , matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$. (4 puntos)

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$

cumpla que $B^2 = B$ pero $AB \neq A$ y $BA \neq B$ (2 puntos)

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes

$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+1 & 2 & 1 \\ z+1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (4 puntos)

Solución: b) $a = 0$ y $b = 1$. c) 6 y 3

11. (Valencia Junio 2018) B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$. (3 puntos)

b) Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$. (4 puntos)

c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2. (3 puntos)

Solución: a) $a=1/3$ y $b=2/3$ b) $\alpha = -20$ y $\beta = 21$ c) $|2B^{-1}| = 1$

12. (Valencia Julio 2017) B.1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1} . (2+2 puntos)

b) La justificación de que $A^4 = I$. (2 puntos)

c) El cálculo de las matrices A^7 , A^{30} y A^{100} . (4 puntos)

Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) Por tanto, $A^7 = A^{-1}$, $A^{30} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^{100} = Id$

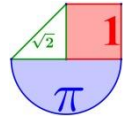
13. (Valencia Junio 2017) B.1. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

(2,5 puntos)

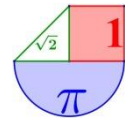
Y el valor de la matriz C^4 .

(2,5 puntos)



- b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1 . (3 puntos)
- c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $B \cdot B = B$. (2 puntos)

Solución: a) $C^4 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$ b) $81/25$ 6 c) $B=I$



Ejercicios de sistemas de ecuaciones en pruebas EBAU de ESPAÑA

Resueltos con todo detalle en www.ebaumatematicas.com

ANDALUCÍA



1. (Andalucía Ordinaria 2022) Bloque B EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el sistema:

$$2. \quad \begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de m . **(1,75 puntos)**
 b) Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible. **(0.75 puntos)**

Solución: a) Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Si $m = 1$ es incompatible. Si $m = -1$ es compatible indeterminado. b) La solución es $x = 2$; $y = 1$; $z = -2$.

1. (Andalucía Extraordinaria 2021) Bloque B EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

- a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta. **(1.25 puntos)**
 b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta? **(1.25 puntos)**

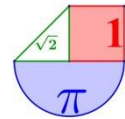
Solución: a) Se pueden encontrar muchas soluciones, pero no existe una solución única. Habrían 35 viajes en la ruta B y otros 35 entre las rutas A y C.
 b) La solución es 20 viajes en la ruta A, 35 en la ruta B y 15 en la ruta C.

2. (Andalucía Ordinaria 2021) Bloque B EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de m . **(2 puntos)**
 b) Resuelve el sistema para $m = 0$. ¿Hay alguna solución en la que $x = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(0.5 puntos)**



Solución: a) Resumiendo: Para $m \neq 0$ y $m \neq -\frac{5}{2}$ el sistema es compatible determinado, para $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado y para $m = -\frac{5}{2}$ el sistema es incompatible.

b) Las soluciones son: $x = \frac{2}{5}$; $y = t$; $z = -1 + 2t$. No existe ninguna solución con $x = 0$

3. (Andalucía Extraordinaria 2020) Ejercicio 3. (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Discute el sistema según los valores de m . (1.5 puntos)

b) Para $m = -2$, ¿existe alguna solución con $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. (1 punto)

Solución: a) Para $m \neq -2$ y $m \neq 4$ el sistema es compatible determinado. Para $m = -2$ es compatible indeterminado. Para $m = 4$ es incompatible. b) NO, pues $z = -\frac{1}{3}$.

4. (Andalucía Ordinaria 2020) Ejercicio 7.- [2,5 puntos] Considera

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

a) Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a . (1.25 puntos)

b) Para $a = 0$, resuelve el sistema dado por $AX = B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$. (1.25 puntos)

Solución: a) Si $a = 0$ El sistema es compatible indeterminado. Si $a \neq 0$ El sistema es incompatible. b) $x = -t$; $y = 0$; $z = t$. La solución particular es $x = -4$; $y = 0$; $z = 4$.

5. (Andalucía Septiembre 2019) Ejercicio 3A.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ (m+2)x + y - z = m \\ 3x + (m+2)y + z = m \end{array} \right\}$$

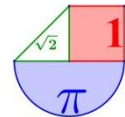
a) Discute el sistema según los valores de “m”.

b) Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 0$.

Solución: a) Si $m \neq 0$ y $m \neq -4$ el sistema es compatible determinado. Si $m = 0$ es compatible indeterminado y si $m = -4$ el sistema es incompatible. b) $x = 3t$; $y = -5t$; $z = t$ siendo $t \in \mathbb{R}$

6. (Andalucía Septiembre 2019) Ejercicio 3B.- Calcula en grados los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Solución: 40, 60 y 80 grados.


7. (Andalucía Junio 2019) Opción B Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$$

considera el sistema de ecuaciones dado por

$X^t A = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m .

Solución: Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$ tiene solución única. $m = 1$ tiene infinitas soluciones. $m = -2$ no tiene solución.

8. (Andalucía Septiembre 2018) B.3

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ y - z = m \\ x + my + z = m \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores del parámetro m
 b) Resuélvelo para $m=1$. Para dicho valor de m , calcula, si es posible, halla una solución donde $z=2$.

Solución: a) para m distinto de 0 es compatible determinado y para $m=0$ el sistema es compatible indeterminado. b) $x=0; y=0; z=1$. No es posible una solución con $z=2$

9. (Andalucía Junio 2018) A.3

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + z = 3m \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores del parámetro m
 b) Resuélvelo para $m=-2$.

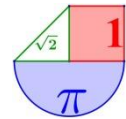
*Solución: a) Para $m \neq 3$ es compatible determinado; para $m=3$ es incompatible.
 b) $x = -73/5; y = 9; z = -2/5$*

10. (Andalucía Junio 2017) Opción B. Ejercicio 3.- Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

a) [1,5 puntos] Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.

b) [1 punto] Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

Solución: a) No se puede deducir el precio de cada artículo. La información proporcionada no es suficiente. Todos los precios quedan dependientes del precio de uno de los artículos. b) 0,5 euros cada lápiz, 3,5 euros cada rotulador y 5 euros cada carpeta.



ARAGÓN



1. (Aragón Extraordinaria 2022) 7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ x + y + a^2z = 0 \\ x + y + 2az = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

b) (1 punto) Resuelve el sistema para $a = 0$.

Solución: a) Para cualquier valor de a distinto de 0, de 1 y de 2 el sistema es compatible determinado (una única solución) y si a es 0, 1 o 2 el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) $x = -t$; $y = z = t$; $t \in \mathbb{R}$

2. (Aragón Ordinaria 2022) 7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 5 \\ 2x + az = -4 \\ 4x - 3z = a + 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).

b) (1 punto) Resuelve el sistema para $a = 1$.

Solución: a) Si $a \neq -\frac{3}{2}$ el sistema es compatible determinado. Si $a = -\frac{3}{2}$ el sistema es incompatible.

b) $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$.

3. (Aragón Extraordinaria 2021) 7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discuta según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución: a) Para $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado y para $a = 1$ el sistema es compatible

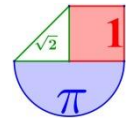
indeterminado. b) La solución es $x = \frac{7}{13}$; $y = \frac{8}{13}$; $z = 0$

4. (Aragón Extraordinaria 2020) Ejercicio 1) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$,

siendo a un número real cualquiera.

a) (1,25 puntos) Discuta el sistema $AX = b$ según los valores del parámetro a

b) (0,75 puntos) Resuelva el sistema cuando $a = 1$



Solución: a) Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 0$ es incompatible. Para $a = 1$ es compatible indeterminado. b) Las soluciones son $x = -1 + 2t$; $y = 0$; $z = t$

5. (Aragón Extraordinaria 2020) Ejercicio 2) Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las 3 mascarillas es de 0.90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.

Solución: La mascarilla desechable cuesta 0,8 €, la higiénica 1,3 € y la reutilizable 0,6 €.

6. (Aragón Ordinaria 2020) 1). Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + (m+1)z = 2 \\ x + (m-1)y + 2z = 1 \\ 2x + my + z = -1 \end{cases}$$

Discuta el sistema según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

Solución: Para $m \neq -2$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado. Para $m = -2$ el sistema es incompatible. Para $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

7. (Aragón Septiembre 2019) Opción A.1.

a) (1,5 punto) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:

$$\begin{cases} 2x - y + kz = 1 \\ -x + y - kz = 0 \\ 2x - ky + 2kz = -1 \end{cases}$$

Determine los valores del parámetro real k , para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) (1,5 punto) Resuelva el sistema cuando $k=1$.

Solución: a) Si $k \neq 0$ y $k \neq 2$ es compatible determinado, si $k = 0$ ó $k = 2$ es incompatible

b) $x = 1, y = -1, z = -2$

8. (Aragón Junio 2019) 1. a) (1,5 puntos) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

Solución: Hay 22 deportistas de esquí alpino, 15 de esquí nórdico y 23 de escalada

9. (Aragón Junio 2018) A.1.

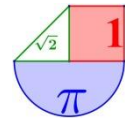
Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ mx + (m-1)y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Determine los valores del parámetro m para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) Encuentre las soluciones de ese sistema cuando $m=1$.

Solución: a) $m = 1$ es compatible indeterminado y para m distinto de 1 es compatible determinado.



$$b) x = 2 - t, \quad y = -1, \quad z = t$$

10. (Aragón Septiembre 2017) A.1.

Sea “m” una constante real. Determine para qué valores de “m” el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$5x + 4y + 2z = 0$$

$$2x + 3y + z = 0$$

$$4x - y + m^2z = m - 1$$

Solución: $m = -1$ es incompatible, $m = 1$ es compatible indeterminado y para m distinto de 1 y -1 es compatible determinado.

11. (Aragón Junio 2017) A.1. (3 puntos)

a) (2 puntos) Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones, según los diferentes valores de la constante real λ :

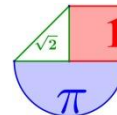
$$x + y = 1$$

$$\lambda x + z = 0$$

$$x + (1 + \lambda)y + \lambda z = \lambda + 1$$

b) (1 punto) Halle la solución, si existe, cuando $\lambda = 1$.

Solución: a) Para $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 0$ el sistema es compatible determinado y para $\lambda = -1$ o $\lambda = 0$ el sistema es compatible indeterminado. b) $x = 0, y = 1, z = 0$.



ASTURIAS

**1. (Asturias Extraordinaria 2022) Bloque 1.B.**

Dado $m \in \mathbb{R}$, se considera el sistema lineal

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= -1 \\ 3x + 3y + 2z &= m \end{aligned} \right\}$$

(a) **(1.75 puntos)** Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo en los casos en los que sea posible.

(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar una solución en la que $z = 3$.

Solución: a) Si $m = 0$ es compatible indeterminado. Si $m \neq 0$ es incompatible. b) $x = 0, y = -2, z = 3$.

2. (Asturias Ordinaria 2022) Bloque 1.B. Dado $a \in \mathbb{R}$ se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{aligned} -x + 2y &= -1 \\ -x + 2y + 2z &= 1 \\ ax - 2y + z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a .

(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar un valor de a para el cual la solución del sistema verifique que $x = 0$.

(c) **(0.75 puntos)** Si $a = 0$, resuelve el sistema si es posible.

Solución: a) Si $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Si $a = 1$ es compatible indeterminado.

b) La solución existe. Es $x = 0, y = \frac{-1}{2}, z = 1$. Para cualquier valor de a . c) $x = 0; y = -0.5; z = 1$.

3. (Asturias Extraordinaria 2021) Bloque 1.A Dado el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} ax + z &= a \\ 2x - y - z &= -1 \\ x + az &= a \end{aligned} \right\} a \in \mathbb{R}.$$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de a .

(1.5 puntos)

b) Resuélvelo para los casos en que el sistema sea compatible indeterminado.

(1 punto)

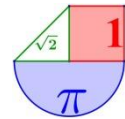
Solución: a) Para $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado, para $a = -1$ el sistema es incompatible y para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) $x = 1 - \lambda; y = 3 - 3\lambda; z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

4. (Asturias Ordinaria 2021) Bloque 1.A. Un operador turístico vende a las agencias locales viajes concertados al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia. A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Maldivas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13.000 euros. Y a una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7.000 euros. Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio del viaje a cada uno de los destinos. Y calcula, si es posible, dicho precio.

(1.5 puntos)



- b) Si le obligasen a rebajar un 20% el precio del viaje al Caribe dejando los otros iguales, ¿cuánto dinero perdería? (0.5 puntos)
- c) ¿Cuál sería el precio del viaje a las Islas Maldivas necesario para compensar la bajada del 20% del viaje al Caribe y así recaudar el mismo dinero? (se mantiene el precio del viaje a Tailandia). (0.5 puntos)

Solución: a) La solución es 300 € cada viaje al Caribe, 400 el viaje a Maldivas y 500 el viaje a Tailandia b) Se pierden 1800 €. c) 490 €

- 5. (Asturias Extraordinaria 2020) Bloque 1.A** Dado el sistema
$$\begin{cases} x + y = a \\ (2 - a)x + 2y = 1 \\ ax = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$
- a) Estudia la compatibilidad según los valores de a . (1.5 puntos)
- b) Resuélvelo cuando sea posible. (1 punto)

Solución: a) Para $a \neq 1$ es incompatible y para $a = 1$ es compatible determinado.

b) Para $a = 1$ la solución es $x = 1$; $y = 0$

- 6. (Asturias Ordinaria 2020) Bloque 1.A.** Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.
- a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? (1.25 puntos)
- b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente un 50%, un 80% y un 75% de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo. (1.25 puntos)

Solución: a) La solución es $x = 38$ € el precio del libro, pero el precio de la calculadora y del estuche queda uno en función del otro $y + z = 19$. La calculadora vale 19 € menos el precio del estuche. No es posible determinar el valor exacto de la calculadora.

b) Los precios son 38 € el libro, 15 la calculadora y 4 el estuche.

- 7. (Asturias Julio 2019) Opción A 1.** Dado el sistema
$$\begin{cases} x + y + az = a \\ x + (a - 1)y + az = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases}$$
- a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de $a \in \mathbb{R}$. (1.5 puntos)
- b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $a = 2$. (1 punto)

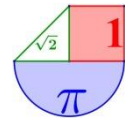
Solución: a) $a \neq -1$; $a \neq 2$ es compatible determinado. $a = -1$ es incompatible. $a = 2$ es compatible indeterminado. b) $x = t - 2$; $y = 3t - 4$; $z = t$

- 8. (Asturias Junio 2019) Opción A 1.** Dado el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} mx + y - z = 0 \\ 2x + my = m \\ x + mz = m \end{array} \right\} m \in \mathbb{R} .$$

- a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m . (1.25 puntos)
- b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m = 1$. (0.75 puntos)
- c) Para qué valores de m se tiene la solución $x = 0$; $y = 1$; $z = 1$. (0.5 puntos)

Solución: a) $m \neq 0$; $m \neq -1$ y $m \neq 1$ es compatible determinado. $m = 0$; $m = -1$ o $m = 1$ es compatible indeterminado. b) $x = 1 - t$, $y = 2t - 1$, $z = t$ c) Cualquier valor de m .

**9. (Asturias Julio 2018) A.1.**

Discutir el sistema y resolver en casos compatibles

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = 2a \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

Solución: Para a distinto de 1 es incompatible; para $a = 1$ es compatible indeterminado con soluciones $x = x$; $y = -2x$; $z = 1$

10. (Asturias Julio 2017) A.1.

Determina los valores de a para los que el sistema de ecuaciones tiene solución. Calcula las soluciones en los casos posibles. (2.5 puntos)

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ 5x + (3a - 1)y = 6 - a \end{cases}$$

Solución: Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el sistema es incompatible. Para $a = 1$ el sistema es compatible determinado con solución $x = 1$ e $y = 0$. Para $a = 2$ el sistema es incompatible.

11. (Asturias Junio 2017) A.1.

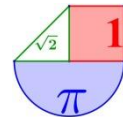
Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2016. Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros. Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil por nulo y mil por perdido, habría obtenido 72 mil euros.

a) Plantea, en el campo de los números reales, el sistema de ecuaciones que modeliza el problema en función del número de combates ganados, hechos nulos y perdidos. Y, si es posible, calcúlalos.

(1.5 puntos)

b) Estudia si hay alguna cantidad k que sustituya a los 6 mil euros por combate ganado que hiciera imposible la solución del problema dentro del campo de los números reales. (1 punto)

Solución: a) 8 ganados, 4 nulos y 8 perdidos. b) Con $k = 7$ (7000 euros) el problema no tiene solución.



BALEARES



1. (Balears Extraordinaria 2022) 2. Durante un año, cierta empresa vende 21000 vehículos de tres modelos A, B y C, al precio de 10000, 15000 y 20000 euros, respectivamente. El total de las ventas es de 332 millones de euros. Se ha observado que también se han vendido 21000 vehículos contando tan solo los del modelo B y λ veces los del modelo A.

- (a) Plantee un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de vehículos vendidos de cada modelo. (3 puntos)
 (b) Calcule el número de vehículos vendidos de cada modelo, suponiendo $\lambda = 3$. (3 puntos)
 (c) Determine si existe algún valor del parámetro λ para el cual la anterior situación no se pueda dar. (4 puntos)

Solución: (a)
$$\left. \begin{aligned} a+b+c &= 21000 \\ 2a+3b+4c &= 66400 \\ \lambda a+b &= 21000 \end{aligned} \right\} \text{ (b) Se han vendido 3400 coches del modelo A, 10800 del modelo B y } \\ 6800 \text{ del modelo C. (c) Para } \lambda = 2 \text{ la situación planteada no es posible.}$$

2. (Balears Ordinaria 2022) 2. Considere el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a ,

$$\left. \begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ ay &= -3 \\ ax + 3z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- (a) Discuta el sistema según el parámetro a . (4 puntos)
 (b) Para el valor del parámetro a para el cual el sistema tiene solución, resuélvalo. (6 puntos)

Solución: (a) Si $a \neq 0$ el sistema es compatible determinado y si $a = 0$ el sistema es incompatible.

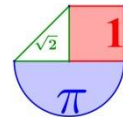
(b) Para $a \neq 0$ la solución es $x = \frac{4}{3} - \frac{2}{a}$; $y = \frac{-3}{a}$; $z = \frac{-4}{9}a + \frac{2}{3}$.

3. (Balears Extraordinaria 2021) 2. Una empresa fabrica tres tipos de bombeta: A, B i C. La bombeta tipus A té 10 punts LED, la tipus B té 20 punts LED, i la tipus C té 50 punts LED. El nombre de bombetes de 10 punts LED fabricades diàriament és λ vegades el nombre de bombetes de 50 punts LED. A l'empresa l'interessa saber quantes bombetes de cada tipus pot fabricar diàriament.

- (a) Si $\lambda = 2$, i aquesta empresa usa, diàriament, 30000 punts LED amb els quals fabrica 1300 bombetes:
 (i) planteja el sistema d'equacions lineals d'aquest problema. (3 punts)
 (ii) classifica el sistema d'equacions lineals i, si és possible, determina quantes bombetes de cada tipus es poden fabricar. (4 punts)
 (b) Si $\lambda = 3$, i l'empresa fabrica diàriament 1000 bombetes; classifica el sistema d'equacions lineals i determina el nombre de punts LED necessaris. (2 punts)
 En aquest cas, quantes bombetes de cada tipus es poden fabricar? (1 punt)

Solución: (a) (i)
$$\left. \begin{aligned} x+y+z &= 1300 \\ x+2y+5z &= 3000 \\ x &= 2z \end{aligned} \right\} \text{ (a) (ii) Es compatible determinado. Se fabrican 800 bombillas tipo A,}$$

100 de tipo B y 400 de tipo C. (b) Si $n \neq 20000$ el sistema es incompatible. Si $n = 20000$ el sistema tiene solución. La solución es $x = 3z$; $y = 1000 - 4z$; $z = z$.



4. (Balears Ordinaria 2020) OPCIÓ A.1. Donat el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ ax + z = 0, \\ x + (1 + a)y + az = a + 1, \end{cases}$$

determina el paràmetre a , i resol sempre que es pugui, de manera que el sistema:

- (a) tengui solució única, (4 punts)
 (b) tengui infinites solucions, (4 punts)
 (c) no tengui solució. (2 punts)

Solució: (a) Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el sistema tiene solución única. La solución es $x = 0$; $y = 1$; $z = 0$

(b) Para $a = 0$ y $a = -1$ el sistema tiene infinitas soluciones. Las soluciones para $a = 0$ son

$$x = 1 - t; \quad y = t; \quad z = 0 \quad t \in \mathbb{R}. \quad \text{Para } a = -1 \text{ las soluciones son } x = t; \quad y = 1 - t; \quad z = t \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Para ningún valor de a el sistema es sin solución.

5. (Balears Ordinaria 2020) OPCIÓ B.1. Una empresa té tres mines: A, B i C, i en cada una, el mineral extret conté els elements químics: níquel (Ni), coure (Cu) i ferro (Fe), en diferent concentració. Les concentracions són:

- Mina A: Ni (1%), Cu (2%), Fe (3%),
- Mina B: Ni (2%), Cu (5%), Fe (7%),
- Mina C: Ni (1%), Cu (3%), Fe (1%).

Per obtenir 7 tones de níquel, 18 de coure i 16 de ferro en total, quantes tones de mineral s'han d'extreure de cada mina?

- (a) Planteja un sistema d'equacions que interpreti l'enunciat. (4 punts)
 (b) Classifica el sistema. (2 punts)
 (c) Resol el sistema. (4 punts)

$$\text{Solució: (a) } \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 700 \\ 2x + 5y + 3z = 1800 \\ 3x + 7y + z = 1600 \end{array} \right\} \text{ (b) El sistema tiene una única solución. (c) Debe extraer 200}$$

toneladas de mineral de la mina A, 100 toneladas de la mina B y 300 toneladas de la mina C.

6. (Balears Julio 2019) OPCIÓ A 1. a) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = m \\ 6x + 6y + m^2z = -9 \end{array} \right\}; \quad (7 \text{ punts})$$

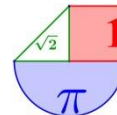
b) Resoleu-lo en el cas en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

Solució: a) Para $m \neq 3$ y $m \neq -3$ es compatible determinado, para $m = 3$ compatible indeterminado y para

$$m = -3 \text{ es incompatible. b) } x = \frac{9+5t}{2}; \quad y = -6-4t; \quad z = t$$

7. (Balears Junio 2019) OPCIÓ A 1. a) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left. \begin{array}{l} (a+2)x + (a-1)y - z = 1 \\ ax - y + z = -1 \\ 11x + ay - z = a \end{array} \right\}; \quad (7 \text{ punts})$$



b) Resoleu-lo en el cas en qué $a = 0$.

(3 punts)

Solución: a) Para $a \neq 4$ y $a \neq 5$ es compatible determinado. Para $a = 4$ o $a = 5$ es incompatible.

b) $x = -1/10$; $y = -1/10$; $z = -11/10$.

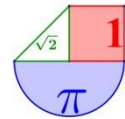
8. (Balears Julio 2018) A.1

a) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\begin{cases} 4x + my + z = m + 2; \\ mx + y - z = 0; \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}; (7 \text{ punts})$$

b) Resoleu-lo en el cas en qué $m = -2$. (3 punts)

Solución: a) para m distinto de -3 y 5 es compatible determinado; para $m = -3$ es incompatible y para $m=5$ es incompatible b) $x = y = z = 0$



CANARIAS

**1. (Canarias EBAU Extraordinaria 2022) 2B.**

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 6y + kz &= 0 \\ kx + 4y + 2z &= 2 \\ kx + 6y + 2z &= k - 2 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discute la resolución del sistema según los valores que puede tomar el parámetro k 1.5 pts
 b) Resuelve el sistema cuando el parámetro k toma el valor $k = 0$ 1 pto

Solución: a) Si $k \neq \pm 2$ el sistema es compatible determinado. Si $k = -2$ es incompatible y si $k = 2$ es compatible indeterminado. b) La solución es $x = 6$; $y = -2$; $z = 5$

2. (Canarias EBAU Ordinaria 2022) 2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones con un parámetro k :

$$\left. \begin{aligned} kx - y - z &= 1 \\ x + ky + 2kz &= k \\ x + y + z &= -1 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que pueda tomar el parámetro k 1.5 pts
 b) Resuelve el sistema para $k = 1$ 1 pto

Solución: a) Si $k \neq 0$ y $k \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Si $k = 0$ o $k = -1$ es incompatible. b) La solución es $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$

- 3. (Canarias Extraordinaria 2021) 2B.** En la liga Mate-Basket, las mujeres matemáticas con mayor puntuación son: Lovelace, Noerther y Germain. Las tres acumulan 17500 puntos. Además, lo que ha anotado Germain más 2500 puntos es equivalente a la mitad de lo anotado por Lovelace. Finalmente, Noerther anotó el doble que Germain. ¿Cuál es el ranking de puntuaciones de la liga Mate-Basket de las jugadoras Lovelace, Noerther y Germain? 2.5 pts

Solución: Lovelace ha anotado 10000 puntos, Noerther 5000 y Germain 2500.

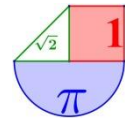
- 4. (Canarias Ordinaria 2021) 2B.** Un granjero compra un determinado mes 274€ de pienso para su ganado. Con ese dinero obtiene un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes: A, B y C. Se sabe que el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5€, 4€ y 4€, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas. 2.5 pts

Solución: Ha comprado 10 sacos de la marca A, 12 de B y 44 de C.

5. (Canarias Extraordinaria 2020) Grupo B 2. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} kx + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + ky + 4z &= 2 \\ 2x + ky + 6z &= k - 2 \end{aligned} \right\}$$

- a. Discuta el sistema según los valores del parámetro k . 1.75 pts
 b. Resuelva el sistema para $k = 0$ 0.75 pts



Solución: a. Para $k \neq 2$ y $k \neq -2$ el sistema es compatible determinado. Para $k = 2$ es compatible indeterminado. Para $k = -2$ es incompatible. b. La solución es $x = 5$; $y = 6$; $z = -2$

6. (Canarias Ordinaria 2020) Grupo B 2. Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes.

Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto? 2.5 pts

Solución: Deben fabricarse 6 cajas de bombones, 2 tabletas de chocolate y 4 de chocolate en polvo.

7. (Canarias Julio 2019) Opción A 2. Dado el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ 5x + 2y + 4z &= -1 \\ 3x + y + k^2z &= 3k \end{aligned} \right\}$$

- a) Discutirlo para los distintos valores del parámetro k (1,5 pts)
b) Resolverlo para $k = 2$ (1 pto)

Solución: a) $k \neq 1$; $k \neq -1$ es compatible determinado. $k = 1$ es incompatible. $k = -1$ es compatible indeterminado
b) $x = 1$; $y = -9$; $z = 3$

8. (Canarias Julio 2018) Opción B 2.- Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + ky + z &= 2 \\ x + y + kz &= k - 1 \end{aligned} \right\}$$

- a) Estudiar el sistema para los distintos valores de k (1,5 puntos)
b) Resolver el sistema para $k = 1$ (1 punto)

Solución: a) Para $k \neq 1$ y $k \neq 2$ el sistema es compatible determinado. Para $k = 1$ es compatible indeterminado y para $k = 2$ es incompatible. b) $x = 2$; $y = -2 - t$; $z = t$

9. (Canarias Junio 2018) Opción A 2.- Dado el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x + ky + kz &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

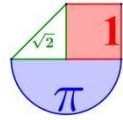
- a) Discutir el sistema según los valores del parámetro k (1,25 pts)
b) Resolver el sistema para $k = 1$ (1,25 pts)

Solución: a) Si $k \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Si $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado.
b) $x = 2\lambda$; $y = 1 - 3\lambda$; $z = \lambda$

10. (Canarias Junio 2017) Opción B 3.- Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + ky + z &= 2 \\ x + y + kz &= k - 1 \end{aligned} \right\}$$

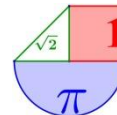
- a) Estudiarlo y clasificarlo para los distintos valores del parámetro k (1,5 puntos)



b) Resolverlo para $k = 2$

(1 punto)

Solución: a) Si $k \neq 2$ y $k \neq -5$ el sistema es compatible determinado. Si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado. Si $k = -5$ el sistema es incompatible. b) $x = -\frac{5t}{2} + 2$; $y = 3t - 3$; $z = t$



CANTABRIA

**1. (Cantabria Extraordinaria 2022) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]**

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro t .

$$\begin{cases} tx + y + z = 4 \\ x - ty + z = 1 \\ x + y + z = t + 2 \end{cases}$$

- A.** [0,75 PUNTOS] Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única.
B. [1 PUNTO] Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
C. [0,75 PUNTOS] Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Solución: A. Para $t \neq -1$ y $t \neq 1$. B. Para $t = -1$. La solución es $x = \frac{-3}{2}$, $y = \lambda$, $z = \frac{5}{2} - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

C. Para $t = 1$.

2. (Cantabria Ordinaria 2022) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro t .

$$\begin{cases} tx + y - 2z = 0 \\ x + y - tz = -1 \\ x + y + z = t \end{cases}$$

- A.** [1 PUNTO] Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única. Resuélvalo para $t = 0$ si es posible.
B. [1 PUNTO] Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
C. [0,5 PUNTOS] Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

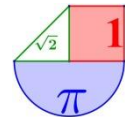
Solución: A. Cuando $t \neq -1$ y $t \neq 1$. La solución es $x = -3$, $y = 2$, $z = 1$. B. Para $t = -1$. La solución es: $x = -2 - 3t$; $y = t$; $z = 1 + 2t$ C. Para $t = 1$.

3. (Cantabria Extraordinaria 2021) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \lambda^2 x + 3y = 3\lambda \\ 3x + y = 3 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ .

- 1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.
 2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.
 3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Solución: 1) Para $\lambda = 3$ las soluciones son $x = t$; $y = 3 - 3t$, $t \in \mathbb{R}$ 2) Para cualquier valor de λ distinto de 3 y de -3. Solución: $x = \frac{3}{\lambda + 3}$; $y = \frac{3\lambda}{\lambda + 3}$ 3) Para $\lambda = -3$.



4. (Cantabria Ordinaria 2021) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 4x - \lambda y = 2\lambda - 2 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ .

- 1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.
- 2) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.
- 3) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Solución: 1) Para $\lambda = 2$ el sistema tiene infinitas soluciones. Las soluciones son $x = t$; $y = 2t - 1$ siendo $t \in \mathbb{R}$. 2) Para $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2$ el sistema tiene solución única. Las soluciones son $x = \frac{-1}{\lambda + 2}$ e $y = \frac{-2\lambda - 2}{\lambda + 2}$ 3) Para $\lambda = -2$ el sistema no tiene solución.

5. (Cantabria Extraordinaria 2020) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + (1-t)y = t \\ (1+t)x - 3y = -t \end{cases}$ dependiente del parámetro t .

- 1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de t el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro t si es necesario.
- 2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.
- 3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Solución: 1) Cuando $t \neq 2$ y $t \neq -2$ las soluciones son $x = y = \frac{t}{2-t}$ 2) Para $t = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones y tienen la expresión $x = -2 - 3t$; $y = t$ 3) El sistema no tiene solución para $t = 2$.

6. (Cantabria Ordinaria 2020) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

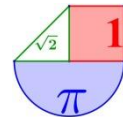
En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.

- 4) [1 PUNTO] Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.
- 5) [0.5 PUNTOS] Clasifica el sistema.
- 6) [1 PUNTO] Resuelve el sistema.

Solución: 1) $\begin{cases} x + 3y + 5z = 41 \\ y = 2x \\ y + z = 10 \end{cases}$ 2) Este sistema es **compatible determinado**. Tiene solución única.
3) Tiene 3 tanques, 6 submarinos y 4 aviones.

7. (Cantabria Julio 2019) OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1 Ejercicio 1

Considere el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} a^2x + ay + z = -1 \\ ax + ay + a^2z = 0 \end{cases}$ dependiente del parámetro a .



- 1) [1.25 PUNTOS] Clasifique, en función del parámetro a , el sistema anterior (existencia y unicidad de soluciones).
- 2) [1.25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso $a = 2$.

Solución: 1) Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado, para $a = 0$ es compatible

indeterminado y para $a = 1$ es incompatible. 2) $x = \frac{-1+3t}{2}$; $y = \frac{1-7t}{2}$; $z = t$

8. (Cantabria Julio 2019) OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2 Ejercicio 1

Consideremos el sistema dependiente del parámetro t :

$$\begin{cases} tx + y - z = 0 \\ 2ty + z = 1 \\ -x + ty + 2z = 1 \end{cases}$$

- 1) [1.5 PUNTOS] Determine razonadamente si el sistema es incompatible o compatible, determinado o indeterminado en función del valor del parámetro t .
- 2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Solución: 1) Para $t \neq 1$ y $t \neq -\frac{1}{3}$ el sistema es compatible determinado, para $t = 1$ es compatible

indeterminado y para $t = -\frac{1}{3}$ es incompatible. 2) $x = 1 - 3t$; $y = t$; $z = 1 - 2t$

9. (Cantabria Junio 2019) OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1 Ejercicio 1

Considere el sistema $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro t .

- 1) [1.5 PUNTOS] Clasifique, en función del valor de t , el tipo de sistema.
- 2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Solución: 1) Para $t \neq 0$ y $t \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Para $t = 0$ o $t = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

10. (Cantabria Septiembre 2018) OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1 Ejercicio 1

Considere el sistema dependiente del parámetro m :

$$\begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

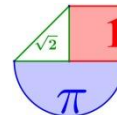
- 1) [1 PUNTO] Clasifique el sistema en función del parámetro m .
- 2) [2,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en los casos en los que el sistema sea compatible.

Solución: 1) Si $m \neq 0$ el sistema es compatible determinado y si $m = 0$ el sistema es incompatible. 2) Para

$m \neq 0$ la solución del sistema es $x = 1$; $y = \frac{-1}{m}$; $z = \frac{1-m^2}{m^2}$

11. (Cantabria Junio 2018) OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2 Ejercicio 1

Considere el sistema siguiente dependiente del parámetro $b \in \mathbb{R}$



$$\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) [2 PUNTOS] Clasifique el tipo de sistema según el parámetro b .

2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $b = -2$

Solución: 1) Si $b \neq 2$ y $b \neq -2$ el sistema es incompatible. Si $b = -2$ o $b = 2$ el sistema es compatible determinado. 2) La solución es $x = -1$; $y = -1$; $z = 0$

12. (Cantabria Septiembre 2017) OPCIÓN DE EXAMEN N° 2 Ejercicio 1

Considere el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro t :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2tx + y + (t+1)z = 1 \\ (t-1)x + ty + tz = -2 \end{cases}$$

1) [0,25 PUNTOS] Escriba el sistema de ecuaciones como un sistema matricial de la forma

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$$

2) [3 PUNTOS] Clasifique el sistema en función del valor del parámetro t , calculando todas las soluciones en los casos en los que sea compatible.

Solución: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 2) Si $t \neq 0$ el sistema es compatible determinado. La solución es

$x = 3t + 2$; $y = 3t + 2$; $z = -6t - 1$. Si $t = 0$ el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son $x = 2$; $y = 1 - t$; $z = t$.

13. (Cantabria Junio 2017) OPCIÓN DE EXAMEN N° 2 Ejercicio 1

Considere el sistema matricial

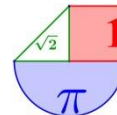
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) [2 PUNTOS] Determine los valores de a para que el sistema sea compatible.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso en el que sea compatible indeterminado y en el caso $a = 3$.

Solución: 1) Para $a \neq 0$.

2) El sistema es compatible indeterminado para $a = 1$. Las soluciones son: $x = -3$; $y = 5 - t$; $z = t$. La solución para $a = 3$ es $x = -11/3$; $y = 17/3$; $z = 0$.



CASTILLA LA MANCHA



1. (Castilla la Mancha Extraordinaria 2022) 1. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a + 1 \\ ax + z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 1$, si es posible.

Solución: a) Si $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado. b) Las soluciones son $x = -t$; $y = 1 - t$; $z = t$; $t \in \mathbb{R}$

2. (Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2022) 2. a) [1,5 puntos] Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

Solución: La única solución es: Un lápiz cuesta 50 cts, un cuaderno 150 cts y una agenda 200 cts

3. (Castilla la Mancha Extraordinaria 2021) 2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x + z = a \\ ax + 2y + z = 3 \end{cases}$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Solución: a) Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado, para $a = 0$ es incompatible y para $a = 1$ es compatible indeterminado. b) La solución es $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

4. (Castilla la Mancha Ordinaria 2021) 2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = a + 1 \\ ax + z = a - 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

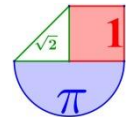
b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 0$, si es posible.

Solución: a) Para $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado, para $a = 1$ es incompatible. b) La solución es $x = 3$, $y = -1$, $z = -1$.

5. (Castilla la Mancha Extraordinaria 2020) 2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + az = a \\ x + ay + 2z = a \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.



Solución: a) Si $a \neq 2$ y $a \neq -4$ el sistema es compatible determinado. Si $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado. Si $a = -4$ el sistema es incompatible. b) $x = 0$; $y = 1 - t$; $z = t$

6. (Castilla la Mancha Ordinaria 2020) 2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax - ay - z = a \\ ax - ay = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente es sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Solución: a) Para $a \neq 0$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado. Para $a = -2$ es incompatible. b) La solución es $x = \frac{3}{4}$; $y = \frac{-1}{4}$; $z = 0$

7. (Castilla la Mancha Julio 2019) 3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{cases} x - (a - 2)y - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - 3y + az = -a^2 \end{cases} \right\} ; (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 3$. (1 punto)

Solución: a) $a \neq 3$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado. $a = 2$ el sistema es incompatible. $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado. b) $x = 6 + 3t$; $y = 5 + 2t$; $z = t$

8. (Castilla la Mancha Junio 2019) 3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{cases} ax + 2y = a^2 \\ -x + y + z = 5 \\ x - ay - z = -(4 + a) \end{cases} \right\} ; (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$. (1 punto)

Solución: a) Para a distinto de 0 y 1 el sistema es compatible determinado. $a = 0$ es incompatible. $a = 1$ es compatible indeterminado. b) $x = 1 - 2t$, $y = t$, $z = 6 - 3t$

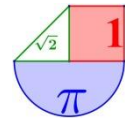
9. (Castilla la Mancha Julio 2018) 3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + 2y + z = -4 \\ x - 4y - 3z = a^2 - 3 \end{cases} \right\} (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -3$. (1 punto)

Solución: a) Para $a \neq -3$ y $a \neq 3$ el sistema es incompatible. Para $a = -3$ o $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado. b) Las soluciones son $x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t$; $y = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t$; $z = t$

10. (Castilla la Mancha Junio 2018) 3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$



$$\left. \begin{array}{l} x+3y-az=4 \\ x+ay+z=2 \\ x+4y-5z=6 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 2$. (1 punto)

Solución: a) Para $a \neq 2$ y $a \neq 7$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado y para $a = 7$ el sistema es incompatible.

b) Las soluciones son $x = -7t - 2$; $y = 3t + 2$; $z = t$ con $t \in \mathbb{R}$

11. (Castilla la Mancha Septiembre 2017) 3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=0 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 0$. (1 punto)

Solución: a) Para $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado y para $a = 1$ o $a = -2$ es

incompatible. b) La solución del sistema es $x = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{2}$

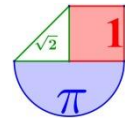
12. (Castilla la Mancha Junio 2017) 3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} ax-y+z=a-4 \\ 2x+y-az=a-1 \\ y-z=-3 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

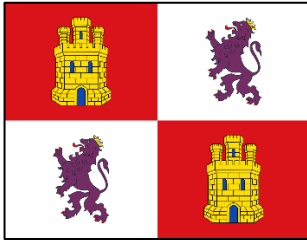
b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -1$. (1 punto)

Solución: a) Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 0$ o para $a = 1$ el sistema

es incompatible. b) La solución es $x = 8$; $y = -\frac{21}{2}$; $z = -\frac{15}{2}$



CASTILLA - LEÓN



1. (Castilla - León Extraordinaria 2022) E1.- (Álgebra)

a) Discuta según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + mz = 4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad (1.2 \text{ puntos})$$

b) Resuélvalo para $m = 2$. (0.8 puntos)

Solución: a) Si $m \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Si $m = 1$ el sistema es incompatible (sin solución). b) La solución es $x = 1, y = 1, z = 1$.

2. (Castilla - León Ordinaria 2022) E1.- (Álgebra)

Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2my - z = 0 \\ x + 2y + mz = 0 \\ x - my + mz = 0 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los distintos valores de m . (1 punto)
 b) Resuelva el sistema si $m = -2$. (1 punto)

Solución: a) Si $m \neq -\frac{1}{2}$ y $m \neq -2$ el sistema es compatible determinado, si $m = -\frac{1}{2}$ o $m = -2$ es

compatible indeterminado. b) $x = \frac{5}{4}t; y = \frac{3}{8}t; z = t; t \in \mathbb{R}$

3. (Castilla - León Extraordinaria 2021) E1.- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - \lambda y = 1 \\ 2x + \lambda z = 1 \end{cases} \quad (1,2 \text{ puntos})$$

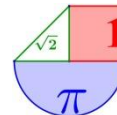
b) Resolverlo para $\lambda = 1$. (0,8 puntos)

Solución: a) Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $\lambda = 0$ es incompatible y si $\lambda = 1$ es compatible indeterminado. b) $x = t; y = t - 1; z = 1 - 2t, t \in \mathbb{R}$

4. (Castilla - León Ordinaria 2021) E1.- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases} \quad (1,2 \text{ puntos})$$



b) Resolverlo para $\lambda = -1$.

(0,8 puntos)

Solución: a) Si $\lambda \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $\lambda = 1$ es compatible indeterminado. b) La solución es $x = 0, y = t, z = t$, siendo $t \in \mathbb{R}$

5. (Castilla - León Extraordinaria 2020) E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

(1,2 puntos)

b) Resolverlo para $\lambda = 1$.

(0,8 puntos)

Solución: a) Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Para $\lambda = 0$ es incompatible. Para $\lambda = 1$ es compatible indeterminado. b) $x = 1 - t; y = t; z = 1$ con $t \in \mathbb{R}$

6. (Castilla - León Ordinaria 2020) E1.- (Álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + az = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + ay - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro real a .

(1,2 puntos)

b) Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro $a = -1$.

(0,8 puntos)

Solución: a) Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el sistema tiene solución y esta solución es única. Para $a = 0$ tiene infinitas soluciones. Para $a = -1$ tiene infinitas soluciones. b) La solución es $x = t; y = 0; z = t$

7. (Castilla- León Julio 2019) Opción A E1.- a) Discutir según los valores del parámetro el sistema de ecuaciones lineales m

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + mz = 4 \end{cases}$$

(1 punto)

b) Resolverlo para $m=1$.

(1 punto)

Solución: a) El sistema es compatible indeterminado siempre. No depende del valor de m .

b) La solución es $x = 3 - 2t, y = -2 + 3t, z = t$.

8. (Castilla-León Junio 2019) Opción A: E1.- Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

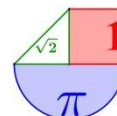
a) Estudie la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro m . (1 punto)

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior para el caso $m=2$. (1 punto)

Solución: a) $m \neq 1$ el sistema es compatible determinado. $m = 1$ el sistema es incompatible. b) $x = 1, y = 1, z = 1$

9. (Castilla- León Julio 2018) OPCIÓN A E1.- Tres números x, y, z cumplen lo siguiente:

- El primero de ellos, x , es la suma de los otros dos.
- El segundo, y , es la mitad del primero más el triple del tercero.



- a) Demostrar que hay infinitos números que cumplen estas condiciones, encontrando una expresión general de la solución. **(1,5 puntos)**
- b) Encontrar tres números concretos que cumplan estas condiciones. **(0,5 puntos)**

Solución: a) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases}; x = 8\lambda; y = 7\lambda; z = \lambda$ b) $x = y = z = 0$

- 10. (Castilla- León Junio 2018) OPCIÓN A E1.-** a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \quad \text{(1,2 puntos)}$$

- b) Resolverlo para $\lambda = 1$. **(0,8 puntos)**

Solución: a) Para $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Para $\lambda = -2$ es incompatible. Para $\lambda = 1$ es compatible indeterminado. b) $x = 1 - t; y = 0; z = t$ con $t \in \mathbb{R}$

- 11. (Castilla-León septiembre 2017) Opción B E1.-** a) Discutir según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \quad \text{(1,25 puntos)}$$

- b) Resolverlo para $m = 1$. **(1 punto)**

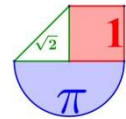
Solución: a) Es compatible indeterminado para cualquier valor de m . b) $x = t, y = 1 - t, z = 0$

- 12. (Castilla-León Junio 2017) Opción B E1.-** a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \quad \text{(1,25 puntos)}$$

- b) Resolverlo para $\lambda = 1$. **(1 punto)**

Solución: a) Si $\lambda \neq 1$, SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO. Si $\lambda = 1$, SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO. b) $x = 2t; y = 1 - 3t; z = t$



CATALUÑA

**1. (Cataluña PAU Extraordinaria 2022) 3.**

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depende el parámetro a .

a) Calcule el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro a . [1,25 puntos]

b) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resuelva la siguiente ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

Solución: a) Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el rango de A es 3 y si $a = -2$ o $a = 2$ el rango de A es 2.

$$b) X = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$$

2. (Cataluña PAU Ordinaria 2022) 2. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 2 \\ 2x + ay + z = a \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a . [1,5 puntos]

b) Resuelva, si es posible, el sistema para el caso $a = 2$. [1 punto]

Solución: a) Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado. Si $a = -1$ o $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión: $x = t$; $y = 1 - t$; $z = 0$; $t \in \mathbb{R}$

3. (Cataluña Extraordinaria 2021) 1. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real k :

$$\begin{cases} x + ky + z = 3 + k \\ kx + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

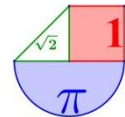
a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k . [1,25 puntos]

b) Resuelva, si es posible, el sistema para el caso $k = 1$, y haga una interpretación geométrica. [1,25 puntos]

Solución: a) El sistema es compatible determinado para $k \neq 1$ y $k \neq 3$. Es compatible indeterminado para $k =$

1. Es incompatible para $k = 3$. b) $x = -t + \frac{7}{2}$; $y = \frac{1}{2}$; $z = t$, siendo $t \in \mathbb{R}$

4. (Cataluña Ordinaria 2021) 2. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real p :



$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro p . [1,25 puntos]
 b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso $p = 2$. [1,25 puntos]

Solución: a) Para $p \neq 0$, $p \neq 1$ y $p \neq 2$ el sistema es compatible determinado. Si $p = 0$ o $p = 1$ el sistema es incompatible. Si $p = 2$ el sistema es compatible indeterminado. b) $x = \frac{3}{2} + t$; $y = -1 - 3t$; $z = t$; $t \in \mathbb{R}$

5. (Cataluña Ordinaria 2020) Série 1. 2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k :

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

- a) Discuti el sistema per als diferents valors del paràmetre k . [1,25 punts]
 b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k = 0$. [1,25 punts]

Solución: a) Para $k \neq 10$ y $k \neq -4$ el sistema es compatible determinado. Para $k = 10$ el sistema es incompatible. Para $k = -4$ el sistema es compatible indeterminado. b) $x = 1$; $y = 18$; $z = -1$

6. (Cataluña Septiembre 2019) Serie 5. 2. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

- a) Encuentra los valores del parámetro a para el que la matriz es invertible. (1 punto)
 b) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : x + (a-1)z = 0$, $\pi_2 : x + ay + z = 1$ y $\pi_3 : 4x + 3ay + z = 3$ en función de los valores del parámetro a . (1 punto)

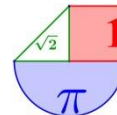
Solución: a) A es invertible si el parámetro a es distinto de 0 y de -1 . b) Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ los planos se cortan en un punto. Si $a = 0$ son planos que se cortan dos a dos. Si $a = -1$ los planos se cortan en una recta.

7. (Cataluña Junio 2019) Serie 1. 2. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro k :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro k .
 b) Resuelve el sistema para el caso de $k = -1$.

Solución: a) Para $k \neq -1$ y $k \neq 1$ el sistema es compatible determinado, para $k = -1$ es compatible indeterminado, para $k = 1$ es incompatible. b) $x = 1 - 7t$; $y = t$; $z = -1 + 2t$



EXTREMADURA



1. (Extremadura Extraordinaria 2022) 2. Discutir en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema lineal de ecuaciones: (2 puntos)

$$\left. \begin{aligned} 4x + y - 2az &= a \\ ax - y + z &= 0 \\ y - az &= -1 \end{aligned} \right\}$$

Solución: Si $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $a = 2$ el sistema es incompatible (sin solución).

2. (Extremadura Extraordinaria 2021) 2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} ax + y &= 1 \\ x + ay &= a \\ ax + 2y &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2 \text{ puntos})$$

Solución: Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es incompatible. Si $a = 1$ el sistema es compatible determinado. La solución es $x = 1; y = 0$. Si $a = -1$ el sistema es compatible determinado. La solución es $x = -1; y = 0$.

3. (Extremadura Ordinaria 2021) 2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} x - y &= \lambda \\ x - \lambda y &= \lambda \\ \lambda x - y &= \lambda \end{aligned} \right\} \quad (2 \text{ puntos}).$$

Solución: Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ el sistema es incompatible. Si $\lambda = 0$ el sistema es compatible determinado. La solución es $x = y = 0$. Si $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Las soluciones son: $x = 1 + t; y = t, t \in \mathbb{R}$,

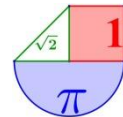
4. (Extremadura Extraordinaria 2020) 2. a) Estudie en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones. (1,25 puntos)

$$\left. \begin{aligned} x + \lambda z &= 1 \\ x + y + \lambda z &= 1 \\ \lambda x - y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

b) Resuelve el sistema (si es posible) para $\lambda = 1$. (0,75 puntos)

Solución: a) Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Si $\lambda = -1$ el sistema es incompatible. Si $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado. b) $x = 1 - t; y = 0; z = t$.

5. (Extremadura Ordinaria 2020) 2. Discuta en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones. (2 puntos)



$$\left. \begin{aligned} x + \lambda y - z &= 1 \\ -\lambda x + y &= \lambda \\ (\lambda + 3)y - 2z &= 4 \end{aligned} \right\}$$

Solución: El sistema es compatible determinado si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$. El sistema es compatible indeterminado cuando $\lambda = 1$ o $\lambda = 2$.

6. (Extremadura Julio 2019) OPCIÓN B 1. Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - az &= 2 \\ x + y &= a + 1 \\ (a + 1)x + y - z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

Solución: Para $a \neq 1$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado, para $a = 1$ es compatible indeterminado y para $a = -1$ es incompatible.

7. (Extremadura Junio 2019) OPCIÓN A 1. Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\left. \begin{aligned} 3x + 2y + az &= 1 \\ ax + y - z &= 2 \\ 5x + 3y + z &= 2a \end{aligned} \right\}$$

Solución: Si $a \neq 2$ y $a \neq \frac{1}{3}$ el sistema es compatible determinado. En el resto de casos es incompatible.

8. (Extremadura Junio 2018) OPCIÓN A 1. (a) Discuta, en función del parámetro λ el sistema lineal de ecuaciones **(2 puntos)**

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ \lambda x + y + z &= 1 \\ x + y + \lambda z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

(b) Resuelva el sistema para $\lambda = 1$.

(0,5 puntos)

Solución: (a) Si $\lambda \neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado. Si $\lambda = -1$ es incompatible. Si $\lambda = 1$ es compatible indeterminado. (b) La solución es $x = 2 - 3t$; $y = -1 + 2t$; $z = t$

9. (Extremadura Julio 2017) OPCIÓN B 1.- Considere el sistema de ecuaciones

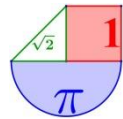
$$\left. \begin{aligned} x + y &= 0 \\ x - z &= 1 \\ ax + by + cz &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Obtenga valores de los parámetros a, b y c en los siguientes casos:

- (a) Para que el sistema sea compatible determinado. **(0,75 puntos)**
 (b) Para que el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**
 (c) Para que el sistema sea incompatible. **(0,75 puntos)**

Solución: (a) Si $b \neq a + c$. (b) Para $b = a - 1$ y $c = -1$ (c) $b = a + c$ y $c \neq -1$

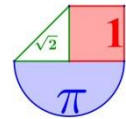
10. (Extremadura Junio 2017) OPCIÓN A 1.- (a) Estudie cómo es el sistema de ecuaciones:



$$\left. \begin{array}{rcl} 3x & -5z & = 3 \\ 3x & -3y & +2z = 0 \\ 2x & -y & -z = 1 \end{array} \right\}.$$

(1,5 puntos)**(b)** Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.**(1 punto)**

Solución: (a) Es compatible indeterminado (b) Las soluciones son: $x = 1 + \frac{5}{3}t$; $y = 1 + \frac{7}{3}t$; $z = t$



GALICIA

**1. (Galicia ABAU Extraordinaria 2022) 2. Números y Álgebra:**

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:

$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3 \end{cases}$$

Solución: Si $m \neq 2$ y $m \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Si $m = 2$ es incompatible. Si $m = -1$ es compatible indeterminado.

2. (Galicia ABAU Ordinaria 2022) 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:

$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1 \\ (m-3)y + (m^2 - m)z = 1 \\ x + m^2z = 0 \end{cases}$$

Solución: Si $m \neq 0, m \neq 3$ y $m \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $m = 0$ o $m = 1$ es compatible indeterminado y si $m = 3$ es incompatible.

3. (Galicia Extraordinaria 2021) 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:

$$\begin{cases} mx + y + z = 2m \\ mx + (m+1)y + z = 1 \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1 \end{cases}$$

Solución: Para $m \neq 0$ el sistema es compatible determinado y para $m = 0$ el sistema es incompatible.

4. (Galicia Ordinaria 2021) 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + z = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$$

Solución: Para $m \neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado y para $m = -1$ o $m = 1$ el sistema es incompatible.

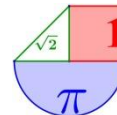
5. (Galicia Extraordinaria 2020) 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m \\ (m+3)x + my = 3m+6 \end{cases}$$

Solución: El sistema es compatible determinado para $m \neq 0; m \neq -3$ y $m \neq -1$. Es incompatible para $m = 0$ o $m = -1$. El sistema es compatible indeterminado para $m = -3$.

6. (Galicia Ordinaria 2020) 2. Números y Álgebra:



Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + z = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$$

Solución: Para $m \neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado. Para $m = 1$ el sistema es incompatible. Para $m = -1$ el sistema es incompatible.

7. (Galicia Julio 2019) Opción B 1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a. Discute, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema

$$\begin{cases} x - y + 3z = m \\ my - 2z = -2 \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m \end{cases}$$

b. Resuélvelo si es posible en los casos $m=0$ y $m=2$

Solución: a. Si $m \neq 0$ y $m \neq -2$ el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. $m=0$ es COMPATIBLE INDETERMINADO. $m=-2$ es INCOMPATIBLE.

b) Para $m=0$ la solución es $x=t-3$; $y=t$; $z=1$. Para $m=2$ la solución es $x=0$; $y=-1/2$; $z=1/2$.

8. (Galicia Junio 2019) Opción B 1. Da respuesta a los siguientes apartados:

a. Discute, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ my + (3-m)z = -6 \\ 2x - y + mz = 6 \end{cases}$$

b. Resuélvelo, si es posible, en los casos $m=0$ y $m=4$.

Solución: a) $m \neq 0$; $m \neq 3$ es compatible determinado. $m=0$ es compatible indeterminado. $m=3$ es incompatible b) $m=0 \rightarrow x=t$; $y=2t-6$; $z=-2$. $m=4 \rightarrow x=-9$; $y=0$; $z=6$

9. (Galicia Septiembre 2018) Opción B 1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 1$

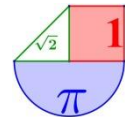
Solución: a) Si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado y si $m \neq 1$ el sistema es incompatible. b) $x = 1 + \lambda$; $y = 0$; $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

10. (Galicia Junio 2018) Opción B 1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 3$

Solución: a) Si $m = 3$ el sistema es compatible indeterminado y si $m \neq 3$ el sistema es compatible determinado. b) $x = 2 - \frac{\lambda}{3}$; $y = 1 + \frac{\lambda}{3}$; $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$



11. (Galicia Septiembre 2017) Opción B. 1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:

$$3x - 2y = 0$$

$$x - y + z = m$$

$$x + my - 2z = m$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 0$.

Solución: a) Si $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado y si $m \neq 0$ el sistema es compatible determinado. b) $x = 2\lambda$; $y = 3\lambda$; $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

12. (Galicia Junio 2017) Opción B. 1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:

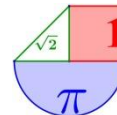
$$x + 2y - z = 1$$

$$x - z = m$$

$$x + y - z = 1$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 1$.

Solución: a) Si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado y si $m \neq 1$ el sistema es incompatible. b) $x = 1 + \lambda$; $y = 0$; $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$



LA RIOJA



1. (La Rioja EBAU Extraordinaria 2022) 4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + az = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

Solución: El sistema tiene solución única cuando $a = -3$. La solución es $x = 1, y = 2, z = -1$. Si $a \neq -3$ no tiene solución.

2. (La Rioja EBAU Ordinaria 2022) 4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

$$\begin{cases} x + y + az = a \\ ax + ay + z = 1 \\ x + ay + z = a \end{cases}$$

Solución: Si $a \neq 1; a \neq -1$ el sistema es compatible determinado. La solución es $x = -1; y = 1; z = 1$.

Si $a = 1$ es compatible indeterminado y las soluciones son: $x = 1 - \alpha - \beta; y = \alpha; z = \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $a = -1$ es compatible indeterminado y las soluciones son: $x = -1; y = \alpha; z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

3. (La Rioja EBAU Ordinaria 2022) 6.- (2 puntos) Determina los valores de los parámetros a, b y c para los que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$

Solución: Los valores buscados son $a = 1; b = -1; c = 1$.

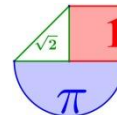
4. (La Rioja Extraordinaria 2021) 4.- (2 puntos) Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y + z = 2 \\ 2x + ay + a^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

según el valor del parámetro real a .

Solución: Si $a \neq 0, a \neq 1$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado ($x = 0, y = \frac{-2a^2 + 1}{-a(a-1)}, z = \frac{2a-1}{a(1-a)}$),

si $a = 0$ o $a = 1$ el sistema es incompatible y si $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado ($x = \frac{3+2t}{2}, y = -1-3t, z = t, \text{ con } t \in \mathbb{R}$).



5. (La Rioja Ordinaria 2021) 5.- (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ay + (a+1)z = a, \\ ax + z = a, \\ x + az = -a. \end{cases}$$

- a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a .
 b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a = 2$.

Solución: a) Si $a \neq 0$; $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $a = 0$ o $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado y si $a = 1$ el sistema es incompatible.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -2/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

6. (La Rioja Extraordinaria 2020) 4.- (2 puntos) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a , el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (a-1)x + y + 3az = 1, \\ ax + ay - z = a, \\ (a-1)x + y + (a-1)z = -2a + 1. \end{cases}$$

Solución: Si $a \neq 0$; $a \neq -0.5$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado. La solución es

$$x = \frac{6a^2 + 2}{-2a^2 + 3a + 2}; \quad y = \frac{-8a^2 + a + 4}{-2a^2 + 3a + 2}; \quad z = \frac{-2a^2 + 4a}{-2a^2 + 3a + 2}.$$

Si $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son $x = t$; $y = 1 + t$; $z = 0$. Si $a = -0.5$ o $a = 2$ el sistema es incompatible.

7. (La Rioja Ordinaria 2020) 5.- (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ay + (a+1)z = a, \\ ax + z = a, \\ x + az = -a. \end{cases}$$

- a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a .
 b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a = 2$.

Solución: a) Para $a \neq 0$; $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. La solución es

$$x = \frac{-a}{1-a}; \quad y = \frac{-2a}{1-a}; \quad z = \frac{a}{1-a}.$$

Para $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son $x = 0$; $y = t$; $z = 0$. Para $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado. Las soluciones son

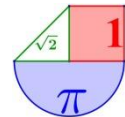
$$x = 1 + t; \quad y = 1; \quad z = t.$$

Para $a = 1$ el sistema es incompatible. b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -2/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

8. (La Rioja Junio 2018) Propuesta B.4. (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} cx + y - 2z = 6, \\ cx - 2y + z = 0, \\ -2x + y + cz = -6. \end{cases}$$

- (I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c .
 (II) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro c es 1.



Solución: (I) Para $c \neq 1$ y $c \neq -2$ el sistema es compatible determinado. Para $c = 1$ es compatible indeterminado y para $c = -2$ es incompatible. (II) $x = 4 + t$; $y = 2 + t$; $z = t$

9. (La Rioja Junio 2017) Propuesta A. 2.- (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones:

$$cx + 3y - z = -3,$$

$$x + cy + z = c,$$

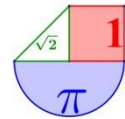
$$cx + y + z = 1.$$

(I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c .

(II) Halle la solución o soluciones cuando el sistema sea compatible.

*Solución: (I) Si $c \neq 1$ y $c \neq -2$ el sistema es **compatible determinado**, si $c = -2$ el sistema es **incompatible** y si $c = 1$ es **compatible indeterminado**. (II) Para $c = 1$ las soluciones son $x = 3 - 2t$; $y = -2 + t$; $z = t$.*

Para $c \neq 1$ y $c \neq -2$ la solución es $x = \frac{-3}{c+2}$; $y = \frac{c-1}{c+2}$; $z = \frac{3(c+1)}{c+2}$



MADRID

**1. (Madrid Extraordinaria 2022) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.**

En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Solución: En la estantería hay 24 libros de ensayo, 55 novelas y 49 biografías.

2. (Madrid Ordinaria 2022) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m :

$$\left. \begin{aligned} x - 2my + z &= 1 \\ mx + 2y - z &= -1 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m .

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m = \frac{1}{2}$

Solución: a) Si $m \neq \frac{1}{2}$ y $m \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Si $m = 1/2$ o $m = -1$ es compatible

indeterminado. b) Las soluciones del sistema son $x = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}t$; $y = -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}t$; $z = t$; $t \in \mathbb{R}$

3. (Madrid Ordinaria 2022) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Solución: Pablo tiene 16 años, Alejandro 15 y Alicia 14. Pablo recibe 3360 €, Alejandro 3150 € y Alicia 2940 €.

4. (Madrid Extraordinaria 2021) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

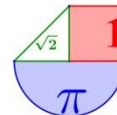
Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Solución: Sara tiene 2000 seguidores, Cristina tiene 5000 y Jimena tiene 8000.

5. (Madrid Extraordinaria 2021) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (0.75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y , que tenga como soluciones $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$.

b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x , y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:



$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$$

c) (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y , que solo tenga como solución a $x = 1$ e $y = 2$.

$$\text{Solución: a) } \begin{cases} y = 2x \\ 10y = 20x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 20x - 10y = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = x - 2 \\ z = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y = -1 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

6. (Madrid Ordinaria 2021) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Solución: A cada hermano le tocan 120 acciones de la empresa A, 40 de la empresa B y 20 de la C.

7. (Madrid Ordinaria 2021) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax - 2y + (a - 1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a .

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución: a) Si $a \neq \frac{26}{3}$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $a = 1$ es compatible indeterminado y

si $a = \frac{26}{3}$ es incompatible. b) $x = 4 + 2t$, $y = t$, $z = \frac{10+t}{-6}$, $t \in \mathbb{R}$

8. (Madrid Ordinaria 2020) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{cases}$$

Se pide:

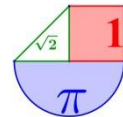
a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a .

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$.

Solución: a) Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 0$ es compatible indeterminado. Para $a = -1$ es incompatible. b) La solución es $x = 1 - t$; $y = t$; $z = t$ con $t \in \mathbb{R}$

9. (Madrid Ordinaria 2020) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de



euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Solución: Aproximadamente los precios son: lubina a 5.67 €/kg, dorada a 5.78 €/kg y rodaballo a 8.59 €/kg.

10. (Madrid Julio 2019) Ejercicio 1: Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} kx + (k+1)y + z = 0 \\ -x + ky - z = 0 \\ (k-1)x - y = -(k+1) \end{cases}$$
 se pide:

- a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k .
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.

Solución: a) $k \neq 1; k \neq -1$ es compatible determinado $k = 1$ es incompatible $k = -1$ es compatible indeterminado b) $x = t; y = -2t; z = t$

11. (Madrid Junio 2019) Ejercicio 1: Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.

Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Solución: Un bocadillo ha costado 3 €, un refresco 2 € y una bolsa de patatas 1 €

12. (Madrid Julio 2018) B.1.

Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza.

En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Solución: 6 días en Francia, 6 en Alemania y 3 en Suiza.

13. (Madrid Junio 2018) A.1.

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ -2x - (m+1)y + z = -1 \\ x + (2m-1)y + (m+2)z = 2 + 2m \end{cases}, \text{ se pide:}$$

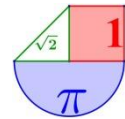
- a) (2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro m .
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 0$.

Solución: a) para m distinto de 1 y -1 es compatible determinado; para $m = 1$ es compatible indeterminado, para $m = -1$ es incompatible b) $x = 1; y = -1; z = 0$.

14. (Madrid Septiembre 2017) Opción A Ejercicio 3: Calificación máxima: 2 puntos.

Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22



Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínese las cantidades x , y , z .

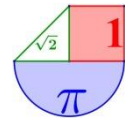
Solución: Son necesarios 3 gramos de la aleación A, 12 gramos de la B y 10 de la C.

15. (Madrid Junio 2017) Opción A Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

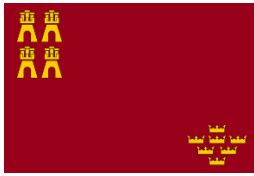
Dado el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$$
, se pide:

- (2 puntos) Discute en función de los valores del parámetro real a .
- (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a = 1$.
- (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución: a) Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado, si $a = -2$ es incompatible y si $a = 2$ es compatible indeterminado. b) Para $a = 1$ la solución es $x = -\frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{3}$; $z = \frac{4}{3}$. Para $a = 2$ las soluciones son $x = 1 - 2t$; $y = t$; $z = 2t$, $t \in \mathbb{R}$



MURCIA



1. (Murcia Extraordinaria 2022) 1: [2,5 p.] Un conocido defraudador fiscal tiene distribuido su dinero negro en tres paraísos fiscales, las Islas Caimán, Panamá y Fiji. La suma total de este dinero es de 150 millones de euros. Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán, seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá. Además, el dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán. Calcule cuánto dinero tiene en cada uno de los paraísos fiscales.

Solución: En las Islas Caimán tiene 80 millones de euros, en Panamá 20 y en Fiji tiene 50 millones.

2. (Murcia Ordinaria 2022) 1: [2,5 p.] La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.

Solución: La edad de Carmela es 26, la de Esperanza es 23 y la de Aurora es 19.

3. (Murcia Extraordinaria 2021) 1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + ay - z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \\ x + 5y - az = a + 1 \end{cases}$$

- a) [0,75 p.] Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.
 b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
 c) [0,75 p.] Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución: a) El sistema tiene solución única para $a \neq -1$ y $a \neq 3$

b) Para $a = -1$. Las soluciones son $x = -2t$; $y = t$, $z = -3t$.

c) Para $a = 3$

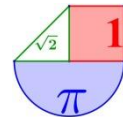
4. (Murcia Ordinaria 2021) 1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$$

- a) [0,75 p.] Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.
 b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
 c) [0,75 p.] Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución: a) Cuando $a \neq 1$ y $a \neq -1$. b) Cuando $a = -1$. $x = -\frac{3}{2}$; $y = t$; $z = \frac{5}{2} - t$ c) Para $a = 1$

5. (Murcia Extraordinaria 2020) 1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :



$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - ay + a^2z = -1 \\ -ax + a^2y - a^3z = 2 \end{cases}$$

- a) [1 p.] Comprueba que el sistema nunca tiene solución única.
 b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones.
 c) [0,5 p.] Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = 2$.

Solución: a) $|A| = 0$, independientemente del valor de a y el rango de la matriz A nunca va a ser 3.

b) El sistema tiene infinitas soluciones para $a = 2$.

c) Para $a = 2$ las soluciones son $x = 1 - 2t$; $y = 1 + t$; $z = t$

6. (Murcia Junio 2020) 1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + a^2y - z = 3 - a \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

- a) [1 p.] Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.
 b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
 c) [0,5 p.] Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución: a) Para $a \neq 1$ y $a \neq -1$. Para $a = 0$ la solución es $x = 2$; $y = 1$; $z = -1$.

b) Para $a = -1$. Las soluciones son $x = \frac{5}{2} + t$; $y = \frac{3}{2}$; $z = t$. c) El sistema no tiene solución para $a = 1$.

7. (Murcia Septiembre 2019) A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + z = a \end{cases}$$

- a) [1 p.] Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 2$.
 b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
 c) [0,5 p.] Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

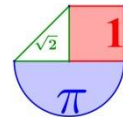
Solución: a) Para $a \neq -1$ y $a \neq 1$. Para $a = 2$ la solución es $x = 1$; $y = 0$; $z = 1$

b) Para $a = -1$. La solución es $x = \frac{1+3t}{-2}$; $y = \frac{-1+t}{2}$; $z = t$ c) Para $a = 1$

8. (Murcia Junio 2019) A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$$

- a) [1 p.] Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.



- b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
 c) [0,5 p.] Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución: a) $a \neq 1$; $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado. $a=0$ la solución es $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$

b) $a = -2 \rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado. La solución es $x = t$, $y = 1+t$, $z = t$.

c) para $a = 1$ el sistema es incompatible.

9. (Murcia Septiembre 2018) CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo en función del parámetro a :

$$\begin{cases} ax + y + az = 0 \\ x + y + az = 0 \\ 2x + (a-1)y + az = 0 \end{cases}$$

- a) [1,25 p.] Determine los valores del parámetro a para los que el sistema tiene únicamente la solución trivial $(0, 0, 0)$.
 b) [1,25 p.] Si es posible, resuélvalo para el valor del parámetro $a = 2$.

Solución: a) El sistema tiene una única solución $(0, 0, 0)$ cuando a es distinto de 0 , 1 y 2 .

b) La solución es $x = 0$; $y = -2z$; $z = z$.

10. (Murcia Junio 2018) CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$$

- a) [1 p.] Justifique que el sistema nunca es compatible determinado.
 b) [1,5 p.] Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

Solución: a) El sistema no puede ser compatible determinado pues el rango de la matriz de los coeficientes es menor que el número de incógnitas. b) $a = 2$; La solución es $x = 4 - 2z$; $y = -z - 4$; $z = z$

11. (Murcia Septiembre 2017) CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

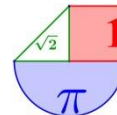
$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ x + 2ay + z = 2 \\ x + 2y + az = -3 \end{cases}$$

- a) [0,75 puntos] Determine para qué valores del parámetro a el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.
 b) [1,25 puntos] Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
 c) [0,5 puntos] Determine para qué valor del parámetro a el sistema no tiene solución.

Solución: a) Para $a \neq 1$, $a \neq -2$ el sistema tiene una única solución

b) Para $a = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones. La solución es $x = \frac{1+6y}{3}$; $y = y$; $z = \frac{5+6y}{3}$

c) Para $a = 1$ el sistema no tiene solución.

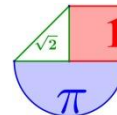


12. (Murcia Junio 2017) CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x - y + a^2z = a - 1 \end{cases}$$

- a) **[0,75 puntos]** Determine para qué valores del parámetro a el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.
- b) **[1,25 puntos]** Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro a el sistema no tiene solución.

Solución: a) $a \neq 1$ y $a \neq -1$ b) Para $a = 1$. La solución es $x = -z$; $y = 0$; $z = z$ c) $a = -1$



NAVARRA



1. (Navarra Extraordinaria 2022) P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a^2 - 1)x + ay + a^2z = 1 \\ (a^2 - 1)x + (a + 1)y + (a^2 + a)z = 2 \\ y + (a^2 + 2a)z = a + 2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

Solución: Si $a \neq 0$; $a \neq 1$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Su solución es

$x = \frac{-1}{a+1}$; $y = 0$; $z = \frac{1}{a}$. Si $a = 0$ o $a = -1$ el sistema es incompatible. Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son: $x = t$; $y = 0$; $z = 1$; $t \in \mathbb{R}$

2. (Navarra Ordinaria 2022) P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ x + (a^2 - 4)y + (2a - 3)z = -a^2 - 2a \\ x + (a^2 - 4a + 4)y + (a^2 - 2a)z = -a^2 + a - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

Solución: Si $a \neq 1$, $a \neq 2$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado. La solución es

$x = \frac{-a^2 + a - 1}{a - 1}$, $y = \frac{-a + 1}{a - 2}$, $z = \frac{-1}{a - 1}$. Si $a = 1$ o $a = 2$ el sistema es incompatible. Si $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado y las soluciones son: $x = 3t$; $y = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}t$; $z = t$; $t \in \mathbb{R}$

3. (Navarra Extraordinaria 2021) P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

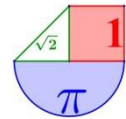
$$\begin{cases} ax + (a - 2)y = a - 2 \\ ax + (a^2 - 2a)y + 2z = a \\ 3ax + (a^2 - 4)y + z = 4a - 4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

Solución: Si $a \neq 0$, $a \neq 2$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado y la solución es $x = \frac{5-a}{1-a}$,

$y = \frac{2a+2}{(a-2)(a-1)}$, $z = -a$. Si $a = 0$ es compatible indeterminado y las soluciones son $x = t$, $y = 1$, $z = 0$, con $t \in \mathbb{R}$. Si $a = 1$ o $a = 2$ el sistema es incompatible.



4. (Navarra Ordinaria 2021) P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a-1)x - y = 3 \\ (a-1)x + (a+1)y - (2-a)z = -2a \\ (-2a+2)x - ay + (a^2 - a - 2)z = 3a - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución: Si $a \neq 1$, $a \neq 2$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado y la solución es

$$x = \frac{1}{a-1}, \quad y = -2, \quad z = \frac{1}{a-2}. \text{ Si } a = -2 \text{ el sistema es compatible indeterminado y las soluciones son}$$

$$x = t, \quad y = -3 - 3t, \quad z = -\frac{1}{4}, \quad t \in \mathbb{R}. \text{ Si } a = 1 \text{ o } a = 2 \text{ el sistema es incompatible.}$$

5. (Navarra Extraordinaria 2020) P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a^2 - 2)x + 2y + z = a + 2 \\ (a^2 - 2)x + 4y + (a+1)z = a + 6 \\ (a^2 - 2)x + 2y + (2-a)z = a + \sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución: Para $a \neq \sqrt{2}$; $a \neq -\sqrt{2}$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. La solución es

$$x = \frac{1}{a + \sqrt{2}}; \quad y = \frac{4 - a(2 + \sqrt{2})}{2(1 - a)}; \quad z = \frac{\sqrt{2} - 2}{1 - a} \text{ Para } a = \sqrt{2} \text{ El sistema es compatible indeterminado. Sus}$$

soluciones son $x = t$; $y = 1$; $z = \sqrt{2}$. Para $a = -\sqrt{2}$ es incompatible. Para $a = 1$ es incompatible.

6. (Navarra Ordinaria 2020) P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x + (a^2 + a)y = 2 \\ (-a-1)x - a^2y = 0 \\ ay + (a^2 - 1)z = 3 - a \end{cases}$$

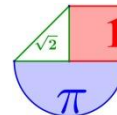
Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución: Para $a \neq -1$, $a \neq 1$ y $a \neq 0$ es compatible determinado. La solución del sistema es $x = \frac{-2a}{a+1}$;

$y = \frac{2}{a}$; $z = \frac{-1}{a+1}$. Para $a = -1$ el sistema es incompatible. Para $a = 0$ el sistema es incompatible. Para

$a = 1$ el sistema es compatible indeterminado con solución $x = -1$; $y = 2$; $z = \lambda$

7. (Navarra Julio 2019) OPCIÓN A A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:



$$\begin{cases} (a+1)x - y + (1-a)z = a+1 \\ (-a-1)x + (a+1)y + (a^2 + a - 2)z = -1 \\ (a+1)x - (a+1)y + (1-a^2)z = 0 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

Solución: Para $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado, la solución es

$x = \frac{a+1}{a}$, $y = \frac{2a+1}{a}$, $z = \frac{1}{1-a}$. Para $a=0$ y $a=1$ es incompatible. Para $a=-1$ es compatible indeterminado y la solución es $x=t$, $y=1$, $z=0,5$

8. (Navarra Junio 2019) OPCIÓN A A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ (-a-2)x + 2y + (a^2 - a)z = 3a-1 \\ (a+2)x - 2y + (2-2a)z = -2a \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

Solución: Para $a \neq 2$ y $a \neq 1$ y $a \neq -2$ es compatible determinado, para $a=-2$ o $a=2$ es incompatible y para $a=1$ es compatible indeterminado. La solución para $a=1$ es $x=t$; $y=1+\frac{3t}{2}$; $z=\frac{3t}{2}$ y para

$a \neq 2$ y $a \neq 1$ y $a \neq -2$ es $x = \frac{2}{a^2-4}$; $y = a-1$; $z = \frac{1}{a-2}$

9. (Navarra Julio 2018) A.1. Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a-3)x + (a-2)y + 2z = -1 \\ (2a-6)x + (3a-6)y + 5z = -1 \\ (3-a)x + (a-2)z = a^2 - 4a + 5 \end{cases} \quad (3 \text{ PUNTOS})$$

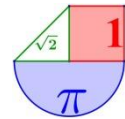
Solución: a) para a distinto de 1, 2 y 3 es compatible determinado con solución $x=(1-a)/(a-3)$; $y=(4-a)/(a-2)$; $z=a-3$; para $a=1$ es compatible indeterminado con solución $x=x$; $y=-3+2x$; $z=-2+2x$, para $a=2$ es incompatible y para $a=3$ es incompatible.

10. (Navarra Junio 2018) A.1. Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + (a+4)y + (a+1)z = 0 \\ -(a+2)y + (a^2 + 3a + 2)z = a + 4 \end{cases}$$

Solución: a) para a distinto de -1, -2 y -3 es compatible determinado con solución $x=(a+6)/(a+2)$; $y=-2/(a+2)$; $z=1/(a+1)$; para $a=-1$ es incompatible, para $a=-2$ es incompatible y para $a=-3$ es compatible indeterminado con soluciones $x = -1+4z$; $y = 1-2z$; $z = z$.

11. (Navarra Julio 2017) A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:



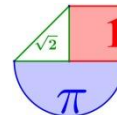
$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ 2x + (a^2 + 2)y + 3z = 3 \\ -2x - (a^2 + 2)y + (a - 3)z = \sqrt{2} - 3 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

Solución: Para a distinto de 0 y de $\pm\sqrt{2}$ el sistema es compatible determinado y su solución es $x = -\frac{4}{a(a+\sqrt{2})}$; $y = \frac{2}{a(a+\sqrt{2})}$; $z = \frac{\sqrt{2}}{a}$, si $a = -\sqrt{2}$ o $a = 0$ el sistema es incompatible y si $a = \sqrt{2}$ es compatible indeterminado y sus soluciones son $x = -2\lambda$, $y = \lambda$, $z = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$

12. (Navarra Junio 2017) A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + (a - 1)y + z = -1 \\ (a - 1)y + 2z = -2 \\ x + (a^2 - 5a + 5)z = -a + 4 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

Solución: Para a distinto de 1, 2 y 3 el sistema es compatible determinado y su solución es $x = \frac{a-3}{a-2}$; $y = \frac{-2a+6}{(a-1)(a-2)}$; $z = \frac{-1}{a-2}$, si $a = 1$ o $a = 2$ el sistema es incompatible y si $a = 3$ es compatible indeterminado y sus soluciones son $x = 1 + \lambda$, $y = -1 - \lambda$, $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$



PAÍS VASCO



1. País vasco. Extraordinaria 2022. Ejercicio A1

Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α :

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = \alpha \\ \alpha x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$, si es posible.

Solución: Si $\alpha \neq 2$ el sistema es compatible determinado y si $\alpha = 2$ el sistema es compatible indeterminado. Para $\alpha = 1$ la solución del sistema es $x = -1$; $y = \frac{1}{2}$; $z = -1$.

2. País vasco. Ordinaria 2022. Ejercicio A1

Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α :

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha \\ 2x + \alpha y + \alpha z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = -1$ y $\alpha = 1$, si es posible.

Solución: Si $\alpha \neq 1$ el sistema es compatible determinado y si $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Para $\alpha = 1$ las soluciones son $x = 0$; $y = 1 - t$; $z = t$; $t \in \mathbb{R}$. Para $\alpha = -1$ la solución es $x = 0$; $y = -1$; $z = 0$.

3. País vasco. Extraordinaria 2021. Ejercicio A1

Discutir el sistema de ecuaciones lineales que sigue, en función del parámetro α :

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - z = \alpha \\ 2x + \alpha y + z = 2 + \alpha \\ x - \alpha y + 2z = 2\alpha \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$, si es posible.

Solución: Para $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$ el sistema es compatible determinado, para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado y para $\alpha = -2$ el sistema es incompatible.

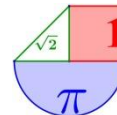
Para $\alpha = 1$ las soluciones son $x = \frac{5-3t}{3}$, $y = \frac{-1+3t}{3}$, $z = t$ siendo $t \in \mathbb{R}$

4. País vasco. Ordinaria 2021. Ejercicio A1

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro α :

$$\begin{cases} \alpha x - y + z = 1 \\ 3x - y + \alpha z = \alpha \\ x + (\alpha - 1)z = 1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 3$, si es posible.



Solución: Para $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq 2$ el sistema es compatible determinado, para $\alpha = 1$ es incompatible y para $\alpha = 2$ es compatible indeterminado. Para $\alpha = 3$ la solución es $x = -1$; $y = -3$; $z = 1$

5. (País vasco Ordinaria 2020) Ejercicio A1

Discutir el sistema $S(a)$ en función de a , siendo

$$S(a) = \begin{cases} ax - y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$$

Resolver en función de a , mediante el método de Cramer, en los casos en que sea posible.

Solución: Para $a \neq 3$ y $a \neq -\frac{3}{2}$ el sistema es compatible determinado. Las soluciones son

$$x = \frac{23-3a}{-2a^2+3a+9}; \quad y = \frac{a^2+a+2}{-2a^2+3a+9}; \quad z = \frac{-8a+10}{-2a^2+3a+9}. \quad \text{Para } a=3 \text{ el sistema es incompatible.}$$

Para $a = -\frac{3}{2}$ el sistema es incompatible.

6. (País vasco Extraordinaria 2020) Ejercicio A1

Discutir, en función de A , el sistema que sigue y resolver cuando sea posible:

$$S = \begin{cases} x + y + z = 2A \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ 4x + 4y + Az = 4A \end{cases}$$

Solución: Para $A \neq 4$ el sistema es compatible determinado. La solución es

$$x = \frac{6A^2 - 30A + 8}{A - 4}; \quad y = \frac{-4A^2 + 26A - 8}{A - 4}; \quad z = \frac{-4A}{A - 4}. \quad \text{Para } A = 4 \text{ es incompatible.}$$

7. (País vasco Julio 2019) Ejercicio A1

Discutir, en función de los valores de A , el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + y - z = 1 \\ 2x - 2y + Az = A \end{cases}$$

Solución: A distinto de -18 es compatible determinado. $A = 18$ es compatible indeterminado.

8. (País vasco Junio 2019) Ejercicio A1

Discutir, en función de m , el sistema de ecuaciones

$$S = \begin{cases} (m+3)x + my + mz = m-1 \\ 3x + mz = m-2 \\ -y + z = m-3 \end{cases}$$

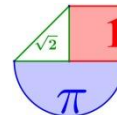
Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

Solución: Si $m \neq 0$; $m \neq 3$ es compatible determinado. $m=0$ es incompatible. $m=3$ es compatible

indeterminado. La solución es $x = \frac{1}{3} - t$; $y = t$; $z = t$

9. (País vasco Julio 2018) B.1.

a) Discutir el siguiente sistema $S(a)$ en función de a :



$$S(a) = \begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a - 1 \end{cases}$$

b) ¿Hay solución para $a = 1$? En caso afirmativo calcula dicha solución. En caso negativo razona la respuesta.

Solución: a) para a distinto de 0 y $1/2$ es compatible determinado; para $a=0$ es incompatible y para $a=1/2$ es incompatible. b) $x=-6$; $y = 10$; $z = 2$

10. (País vasco Junio 2018) B.1.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $S(a)$

$$S(a) = \begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a - 1 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los distintos valores de a

b) ¿Hay solución para $a=2$? En caso afirmativo calcula dicha solución. En caso negativo razona la respuesta.

Solución: a) para a distinto de 0 y 1 es compatible determinado; para $a=0$ es incompatible y para $a=1$ es compatible indeterminado. b) $x=-7/4$; $y = 7/4$; $z = -1/4$

11. (País vasco Julio 2017) Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a

$$ax + 2y + 6z = 0$$

$$2x + ay + 4z = 2$$

$$2x + ay + 6z = a - 2$$

En caso de existir, encontrar la solución para el caso $a = 0$.

Solución: a) para a distinto de 2 y -2 es compatible determinado; para $a = -2$ es incompatible y para $a = 2$ es compatible indeterminado. Para $a = 0$ la solución es $x = 5$; $y = 6$; $z = -2$.

12. (País vasco Junio 2017) Ejercicio A1

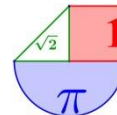
Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m . (NO es necesario resolverlo)

$$2x + y - z = 1$$

$$x + my + z = 2$$

$$3x + y - mz = 3$$

Solución: a) para " m " distinto de 0 y 2 es compatible determinado; si $m = 2$ es incompatible y si $m = 0$ es compatible indeterminado.



VALENCIA



1. (Valencia Extraordinaria 2022) Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro real a . (5 puntos)
 b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible. (5 puntos)

Solución: a) Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Si $a = -2$ es incompatible. Si $a = 1$ es compatible indeterminado. b) Para $a \neq -2$ y $a \neq 1$ la solución es $x = \frac{1}{a+2}$; $y = \frac{2}{a+2}$; $z = \frac{a+1}{a+2}$. Para $a = 1$ las soluciones son: $x = 1-t$; $y = t$; $z = t$; $t \in \mathbb{R}$

2. (Valencia Extraordinaria 2021) Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases},$$

donde m es un parámetro real. Se pide:

- a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m . (4 puntos)
 b) La solución del sistema cuando $m = 1$. (3 puntos)
 c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

Solución: a) Si $m \neq 0$ el sistema es compatible determinado y si $m = 0$ es compatible indeterminado.

b) La solución es $x = y = 3$, $z = -2$. c) Para $m = 0$ las soluciones son $x = -\frac{4}{3}t$; $y = -\frac{5}{3}t$; $z = t$, $t \in \mathbb{R}$

3. (Valencia Ordinaria 2021) Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 2 \\ x + (a-1)y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = -1 \end{cases}$$

- a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a . (5 puntos)
 b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible. (5 puntos)

Solución: a) Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $a = -2$ es incompatible y si $a = 2$ es compatible indeterminado. b) Para $a \neq -2$ y $a \neq 2$ la solución es $x = \frac{2a+3}{-a-2}$, $y = \frac{3}{a+2}$, $z = \frac{4}{a+2}$. Para $a = 2$ las soluciones son $x = -t-1$; $y = t$; $z = 1$ siendo t un número real.

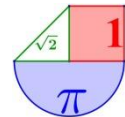
4. (Valencia Extraordinaria 2020) Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y + az = -2 \\ x + y + 2z = a \end{cases},$$

donde a un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. (4 puntos)



- b) La solución del sistema cuando $a = 0$. (3 puntos)
 c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

Solución: a) Para $a \neq 1$. b) La solución es $x = -11$; $y = -3$; $z = 7$. c) $x = 1 - 2t$; $y = 1$; $z = t$

5. (Valencia Ordinaria 2020) Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{cases}$$
, siendo

a un parámetro real, **obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) El estudio del sistema en función del parámetro a . (5 puntos)
 b) Las soluciones del sistema cuando $a = -2$. (3 puntos)
 c) La solución del sistema cuando $a = 0$. (2 puntos)

Solución: a) Para $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 1$ es incompatible. Para $a = -2$ es compatible indeterminado. b) La solución es $x = 1 + t$; $y = t$; $z = t$. c) La solución es $x = 2$; $y = -1$; $z = -1$

6. (Valencia Julio 2019) Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}$$
, donde

α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 puntos)
 b) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 puntos)
 c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 puntos)

Solución: a) Es siempre compatible determinado. b) $x = 7$, $y = -4$, $z = -5$. c) $\alpha = 1$

7. (Valencia Junio 2019) Problema B.1. Se da el sistema
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = a \end{cases}$$
, donde a es un

parámetro real.

Obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Los valores de a para los que el sistema es compatible y los valores de a para los que el sistema es incompatible. (4 puntos)
 b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (4 puntos)
 c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (2 puntos)

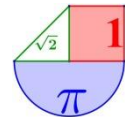
Solución: a) $a \neq 14$ es incompatible, $a = 14$ es compatible determinado b) $x = t + 11$, $y = -2t - 7$, $z = t$
 c) es compatible determinado.

8. (Valencia Julio 2018) A.1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (a - 1)y + z = 0 \\ x + ay + (a - 1)z = a \end{cases} \quad \text{donde } a \text{ es un parámetro real.}$$

Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible. (5 puntos)



- b) Las soluciones del sistema cuando $a = 1$. (3 puntos)
 c) Las soluciones del sistema cuando $a = 0$. (4 puntos)

Solución: a) para a distinto de 2 es compatible. b) $y = 1-x$; $z = 0$ c) $x = y = z = 1/2$

9. (Valencia Junio 2018) A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y - z = 1 - a \\ -x + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases} \quad \text{donde } a \text{ es un parámetro real.}$$

Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado. (2 puntos)
 b) Las soluciones del sistema cuando $a = 3$. (4 puntos)
 c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado. (4 puntos)

Solución: a) para a distinto de 0 es compatible determinado. b) $x=-1$; $y=2$; $z=4$ c) $x=-5+z$; $y=1+z$; $z=z$

10. (Valencia Junio 2017) Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax - y + 2z = a \end{cases},$$

dependiente del parámetro real a .

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) La solución del sistema cuando $a = 2$. (3 puntos)
 b) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado. (3 puntos)
 c) El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a . (2+2 puntos)

Solución: a) $(x, y, z) = (2/3, 2/3, 2/3)$. b) $a \neq -1$. c) $a = -1$; $\{(t, t-1, t-1) : t \in \mathbb{R}\}$.