REPASO RADICAIS

DEFINICION

A raíz de orden n ou raíz enésima dun número real a é outro nº b que cumple que $\boldsymbol{b^n = a}$

É dicir: $\underbrace{\sqrt[n]{a} = b}\ \underset{se\ e\ só\ se}{\Longleftrightarrow}\ \underbrace{b^n = a}$

lese "a raíz enésima de *a* é igual a *b* se e só se *b* elevado a *n* é igual a *a*".

Un **RADICAL** é a expresión da **raíz enésima dun número real.**

n é o **índice da raíz**, **a** é o **radicando**; e **b** é a **raíz enésima** de **a**.

RAÍZ COMO POTENCIA DE EXPOÑENTE FRACCIONARIO

A raíz de orden n dun número a, pódese expresar como unha potencia de expoñente fraccionario: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Dem.- Aplicando a definición de raíz enésima de orden n

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}\ porque\ \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

Análogamente $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}\ porque\ \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m\cdot n}{n}} = a^n$

Exemplos: $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[5]{3^4} = 3^{\frac{4}{5}}$ $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$

RADICAIS EQUIVALENTES

Dous radicais son **equivalentes** cando teñen a mesma raíz.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:k]{a^{m:k}} \qquad \text{con } k \neq 0$$

Exemplos:

$$\sqrt[3]{2}\ y\ \sqrt[6]{2^2}\ \ son\ equivalentes\ porque\ \ 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{6}}$$

En realidade, comprobamos que sexan potencias idénticas, con igual base e igual expoñente, e isto último asegúrase porque os expoñentes son fraccións equivalentes.

$$\sqrt[8]{5^4}\ y\ \sqrt{5}\ \ son\ equivalentes\ porque\ 5^{\frac{4}{8}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

CÁLCULO DE RADICAIS EQUIVALENTES

Podemos obter infinitos radicais equivalentes a un radical dado, simplemente calculando fraccións equivalentes ao seu expoñente fraccionario (podemos facelo por amplificación ou por simplificación)

Exemplo: Calcula dous radicais equivalentes a $\sqrt[5]{3^2}$

Usaremos a expresión do radical como potencia de expoñente fraccionario, despois calcularemos fraccións equivalentes ao seu expoñente: $\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}}$

Como $3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{4}{10}} = 3^{\frac{6}{15}}$, ***temos que*** $\sqrt[5]{3^2} = \sqrt[10]{3^4} = \sqrt[15]{3^6}$

Esta propiedade permítenos ***simplificar radicais****, e* ***reducir radicais a índice común*** *para poder* ***comparalos****.*

SIMPLIFICACIÓN DE RADICAIS

Simplificar un radical consiste en obter outro equivalente de índice menor.

Para facelo, **debemos simplificar a fracción do expoñente** cando expresamos o radical como unha potencia. Tamén se pode realizar **dividindo o índice e o expoñente do radicando** (expresado como produto de factores primos) por **un divisor común** de ambos.

Exemplo.- Simplifica os seguintes radicais:

$$\sqrt[32]{a^{24}} = \begin{cases} a^{\frac{24}{32}} = a^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{a^3}, \textit{se o pensamos como unha potencia} \\ \sqrt[32:8]{a^{24:8}} = \sqrt[4]{a^3}, \textit{se o pensamos como un radical} \end{cases}$$

$$\sqrt[6]{25} = \begin{cases} 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}, \textit{se o pensamos como unha potencia} \\ \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6:2]{5^{2:2}} = \sqrt[3]{5}, \textit{se lo pensamos como un radical} \end{cases}$$

REDUCIÓN DE RADICAIS A ÍNDICE COMÚN

Para reducir radicais a índice común procedemos da seguinte forma:

1º) Calcúlase o **m.c.m** dos índices dos radicais

2º) Calcúlanse os **radicais equivalentes** aos orixinais con ese **índice común**.

Exemplo.- Reduce a índice común $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}\ y\ \sqrt[4]{3}$

Calculamos o mínimo común múltiplo dos índices: **m.c.m(2,3,4)= 12**, que tamén é o mínimo común múltiplo dos denominadores das fraccións dos seus expoñentes.

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$$

$$\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$$

Unha vez reducidos a índice común, resulta moi sinxelo ordenalos: $\sqrt[12]{2^4} < \sqrt[12]{3^3} < \sqrt[12]{2^6}$

$$\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{3} < \sqrt{2}$$

PROPIEDADES DOS RADICAIS

Debido a que os radicais se poden expresar como potencias de expoñente fraccionario, cumpren tamén todas as propiedades das potencias, a partir das cales deducimos as seguintes propiedades:

1.- Multiplicación de raíces de igual índice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Demostración:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \textit{expresando os radicais como potencias de expoñente fraccionario} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \textit{aplicando as propiedades das potencias } (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

2.- División de raíces de igual índice

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$$

Demostración:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \textit{expresando os radicais como potencias de expoñente fraccionario} = a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = \textit{aplicando propiedade das potencias} = (a : b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a : b}$$

3.- Raíz dunha raíz

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[n \cdot m]{\boldsymbol{a}}$$

Demostración:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\boldsymbol{a}}} = \textit{expresando como potencia de expoñente fraccionario} = \left(\mathbf{a}^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \textit{aplicando propiedade das potencias} = \boldsymbol{a}^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = \boldsymbol{a}^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{\boldsymbol{a}}$$

4.- Potencia dunha raíz

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Demostración:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \textit{expresando o radical como potencia de expoñente fraccionario} = \left(\boldsymbol{a}^{\frac{1}{n}}\right)^{\boldsymbol{m}} = \textit{aplicando propiedade das potencias} = \boldsymbol{a}^{\frac{1}{n} \cdot \boldsymbol{m}} = \boldsymbol{a}^{\frac{\boldsymbol{m}}{n}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}}$$

EXEMPLOS **Realiza as seguintes operacións aplicando as propiedades dos radicais e simplifica o resultado:**

a) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{16}=4$

b) $\sqrt[3]{625}:\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}}=\sqrt[6]{x^5}$

e) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{12}=\sqrt[3]{108}$

f) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$

g) $\left(\sqrt[3]{2^2}\right)^6=\sqrt[3]{(2^2)^6}=\sqrt[3]{2^{12}}=2^4$

Estas propiedades NON se aplican NIN Á SUMA NIN Á RESTA de radicandos

$$\sqrt[n]{a+b}\neq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a-b}\neq\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$$

EXTRAER FACTORES DUN RADICAL

Saber introducir e extraer factores nun radical vainos permitir a súa simplificación, algo moi útil á hora de facer operación con eles. *Para extraer e introducir factores nun radical, utilízase a primeira propiedade dos radicais.*

Se o radicando descomposto en produto de factores primos ten potencias de expoñente igual o maior ao índice da raíz, algún deses factores pode saír da raíz.

$$\sqrt[n]{a^n\cdot b}=a\cdot\sqrt[n]{b}$$

Demostración:

Como $a=\sqrt[n]{a^n}$, sustituíndo a expresión no produto:

$$\sqrt[n]{a^n\cdot b}=propiedad\ 1\ radicales=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=a\cdot\sqrt[n]{b}$$

Exemplos:

$$\sqrt{7^3}=\sqrt{7^2\cdot 7}=\sqrt{7^2}\cdot\sqrt{7}=7\cdot\sqrt{7}$$

$$\sqrt[3]{5^4}=\sqrt[3]{5^3\cdot 5}=\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}=5\cdot\sqrt[3]{5}$$

Cando o expoñente é moi grande , na práctica divídese o exponente do radicando entre a raíz e observamos o resultado do cociente e do resto

$$\sqrt[10]{5^{87}} = \sqrt[10]{5^{8\cdot 10+7}} = 5^{8} \cdot \sqrt[10]{5^{7}}$$

Se o radicando non está descomposto en produto de factores, debemos descompoñelo previamente:

$$\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt[4]{128} = \sqrt[4]{2^7} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2^3} = 2 \cdot \sqrt[4]{2^3} = 2 \cdot \sqrt[4]{8}$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 6 \cdot \sqrt{5}$$

INTRODUCIR FACTORES NUN RADICAL

Para introducir factores dentro dun radical, elévanse ditos factores ao índice da raíz.

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

Demostración:

Como $a = \sqrt[n]{a^n}$, sustituíndo a expresión neste produto:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = propiedade\ 1\ radicais = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

Exemplos:

$$2^2\sqrt{5} = \sqrt{(2^2)^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = \sqrt{80}$$

$$5 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{250}$$

$$\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \cdot 2}} = \sqrt[4]{2^3}$$

SUMA E RESTA DE RADICAIS

Para **poder sumar** ou **restar radicales**, éstes deben ser **semellantes**.

Dos radicais son **SEMELLANTES** cando teñen o mesmo índice e o mesmo radicando.

- $2\sqrt{7}$ y $-3\sqrt{7}$ son semellantes; pódense sumar ou restar
- $3\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[3]{5}$ son semellantes, pódense sumar ou restar
- $2\sqrt{7}$ y $\sqrt[3]{5}$ **NON** son semejantes, non se poden sumar ou restar

Ás veces, **para comprobar se os radicais son semellantes** debemos axudarnos **extraendo** todos os **factores** posibles das raíces e simplificándoos.

Exemplo: $2\sqrt[3]{5},\ 3\sqrt[3]{40}\ y\ \sqrt[3]{135}$ son radicais semellantes.

Comprobémolo

igual índice e radicando $\begin{cases} 2\sqrt[3]{\mathbf{5}} = 2\sqrt[3]{\mathbf{5}} \\ 3\cdot\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3\cdot 5} = 3\cdot 2\cdot\sqrt[3]{5} = 6\sqrt[3]{\mathbf{5}} \\ \sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{3^3\cdot 5} = 3\cdot\sqrt[3]{\mathbf{5}} \end{cases}$

Exemplos de sumas e restas de radicais:

a) $\sqrt{\mathbf{20}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\cdot\sqrt{\mathbf{45}} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{125}} = \sqrt{2^2\cdot 5} + \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3^2\cdot 5} + 2\cdot\sqrt{5^3} = 2\cdot\sqrt{5} + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\sqrt{5} + 2\cdot 5\cdot\sqrt{5} = 2\cdot\sqrt{5} + 1\cdot\sqrt{5} + 10\cdot\sqrt{5} = (2+1+10)\cdot\sqrt{5}$=

$$(2+1+10)\cdot\sqrt{5} = 13\cdot\sqrt{5}$$

b) $\mathbf{2}\sqrt[3]{\mathbf{5}} + \mathbf{3}\sqrt[3]{\mathbf{40}} - \sqrt[3]{\mathbf{135}} = 2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{2^3\cdot 5} - \sqrt[3]{3^3\cdot 5} = 2\sqrt[3]{5} + 3\cdot 2\cdot\sqrt[3]{5} - 3\cdot\sqrt[3]{5} = \mathbf{5}\sqrt[3]{\mathbf{5}}$

<u>PRODUTO E DIVISIÓN DE RADICAIS</u>

Para **multiplicar ou dividir radicais** necesitamos que teñan **o mesmo índice**.

En caso contrario, debemos **reducilos primeiro a índice común** (para poder multiplicar ou dividir potencias de distinta base, necesitamos que teñan o mesmo expoñente)

Exemplos:

A) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32} = \sqrt{2\cdot 32} = \sqrt{64} = 8$

B) $\sqrt[3]{105} : \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{105:3} = \sqrt[3]{35}$

C) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{5^3\cdot 2^2} = \sqrt[6]{500}$

mcm (2,3)=6

D) $\sqrt[5]{2^2} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{(2^2)^3} : \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{(2^2)^3 : 2^5} = \sqrt[15]{2}$

$m.c.m\ (3,5) = 15$

E) $\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{5}}\cdot\mathbf{4}\sqrt[3]{\mathbf{2}} = \mathbf{3}\sqrt[6]{\mathbf{5^3}}\cdot\mathbf{4}\sqrt[6]{\mathbf{2^2}} = \mathbf{3}\cdot\mathbf{4}\cdot\sqrt[6]{\mathbf{5^3}\cdot\mathbf{2^2}} = \mathbf{12}\sqrt[6]{\mathbf{500}}$

F) $-\mathbf{20}\sqrt[5]{\mathbf{2^2}} : \mathbf{5}\sqrt[3]{\mathbf{2^2}} = -\mathbf{20}\sqrt[15]{(\mathbf{2^2})^3} : \mathbf{5}\sqrt[15]{(\mathbf{2^2})^5} = (-\mathbf{20}:\mathbf{5})\cdot\sqrt[15]{\mathbf{2^6}:\mathbf{2^{10}}} = -\mathbf{4}\sqrt[15]{\mathbf{2^{-4}}}$

<u>RACIONALIZACIÓN</u>

En ocasións, unha fracción ten como denominador un radical ou raíz. Para poder operar coas fraccións: sumar, restar, etc, necesitamos calcular unha fracción equivalente á dada que teña no seu denominador un número enteiro.

O proceso que consiste en calcular unha fracción sen raíces no denominador equivalente á orixinal chámase **RACIONALIZACIÓN**.

Distinguimos tres casos posibles:

CASO A .- Denominador con raíz cadrada $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Neste caso, multiplícase o numerador e o denominador da fracción por esa mesma raíz cadrada.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$$

CASO B.- Denominador con raíz de índice superior $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$

Neste caso, multiplícase e divídese o numerador e o denominador por unha raíz co mesmo índice e co radicando elevado á diferenza entre o índice y o exponente do radicando.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m} \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{m+n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

CASO C.- Denominador con raíces sumadas ou restadas $\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$ *o* $\frac{a}{b \pm \sqrt{c}}$ **o** $\frac{a}{\sqrt{b} \pm c}$

Multiplícase e divídise polas **raíces conxugadas** e aplícase a identidade notable da suma pola diferenza: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

$$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{\sqrt{b}^2 - \sqrt{c}^2} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}$$

- ✓ A expresión conxugada de $\sqrt{b} + \sqrt{c}$ é $(\sqrt{b} - \sqrt{c})$, e viceversa. A expresión conxugada de $\boldsymbol{b - \sqrt{c}}$ **é** $\boldsymbol{b + \sqrt{c}}$

Exemplos

a) $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}} = \frac{\mathbf{1} \cdot \sqrt{\mathbf{5}}}{\sqrt{\mathbf{5}} \cdot \sqrt{\mathbf{5}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{5}}$

b) $\frac{6}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2}}{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}} - \sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}} + \sqrt{\mathbf{2}}}{(\sqrt{\mathbf{3}} - \sqrt{\mathbf{2}}) \cdot (\sqrt{\mathbf{3}} + \sqrt{\mathbf{2}})} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}} + \sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{3} - \mathbf{2}} = \sqrt{\mathbf{3}} + \sqrt{\mathbf{2}}$