INECUACIONES Y SISTEMAS

1 Resuelve las siguientes inecuaciones (expresa el resultado de tres maneras diferentes)

a) $\frac{2x}{3}+\frac{1}{30}-\frac{3x}{5}<\frac{x}{6}+\frac{4}{15}$

b) $\frac{2}{3}(x-4)-\frac{5}{4}(4-3x)\leq 1-\frac{x}{2}$

c) $\frac{2-(3x-1)}{2}-\frac{2\cdot(3-7x)}{6}<\frac{x}{4}+2$

d) $\frac{3x-2}{2}-\frac{2-2x}{5}>-x+\frac{2}{15}$

e) $\frac{3}{2}\left(2-\frac{x-1}{6}\right)\geq\frac{5}{4}$

f) $\frac{-3(4x-1)}{5}+\frac{3(5+x)}{3}>-1$

Solución.

2 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una variable:

a) $\begin{cases}-4x-3\geq x+1\\ x-5(x-2)>0\end{cases}$

b) $\begin{cases}3x-1\leq x+\frac{1}{2}\\ \frac{5(x-1)}{4}>\frac{3(5-2x)}{2}\end{cases}$

c) $\begin{cases}\frac{x-1}{2}+5<-2x+\frac{x-3}{3}\\ 6-\frac{x}{4}>\frac{6x-1}{3}\end{cases}$

d) $\begin{cases}\frac{-2(3-x)}{3}+\frac{1}{2}>\frac{-1}{6}\\ \frac{x+1}{2}>\frac{-5x+3}{4}\end{cases}$

Solución.

3 Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $-x^2+6x-8\geq 0$

b) $(x+3)^2\geq 2(x^2+7)$

c) $2x(x+6)>5-x(x+2)$

d) $8x\leq -3(1-x^2)$

Solución.

4 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 - 2x - 24 < 0 \\ 12 - 5x \geq x + 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ \dfrac{x-1}{2} \geq \dfrac{2x-1}{3} \end{cases}$

Solución.

1 Resuelve las siguientes inecuaciones (expresa el resultado de tres maneras diferentes)

a) $\frac{2x}{3}+\frac{1}{30}-\frac{3x}{5}<\frac{x}{6}+\frac{4}{15}$

b) $\frac{2}{3}(x-4)-\frac{5}{4}(4-3x)\leq 1-\frac{x}{2}$

c) $\frac{2-(3x-1)}{2}-\frac{2\cdot(3-7x)}{6}<\frac{x}{4}+2$

d) $\frac{3x-2}{2}-\frac{2-2x}{5}>-x+\frac{2}{15}$

e) $\frac{3}{2}\left(2-\frac{x-1}{6}\right)\geq\frac{5}{4}$

f) $\frac{-3(4x-1)}{5}+\frac{3(5+x)}{3}>-1$

Solución.

a) $\frac{2x}{3}+\frac{1}{30}-\frac{3x}{5}<\frac{x}{6}+\frac{4}{15}$

Primero reducimos a común denominador (60):

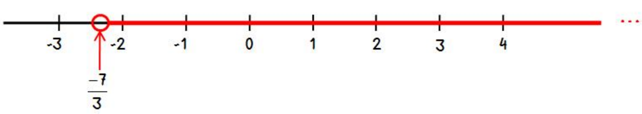
$$\frac{2x}{3}+\frac{1}{30}-\frac{3x}{5}<\frac{x}{6}+\frac{4}{15} \rightarrow \frac{40x}{60}+\frac{2}{60}-\frac{36x}{60}<\frac{10x}{60}+\frac{16}{60}$$

$$\rightarrow 40x+2-36x<10x+16 \rightarrow 40x-36x-10x<16-2$$

$$\rightarrow -6x<14 \rightarrow x>\frac{14}{-6} \rightarrow x>\frac{7}{-3}$$

Solución:

$$\left\{x\in IR/\ x>\frac{7}{-3}\right\}=\left(\frac{-7}{3},\infty\right)$$



b) $\frac{2}{3}(x-4)-\frac{5}{4}(4-3x)\leq 1-\frac{x}{2}$

Primero multiplicamos para eliminar los paréntesis:

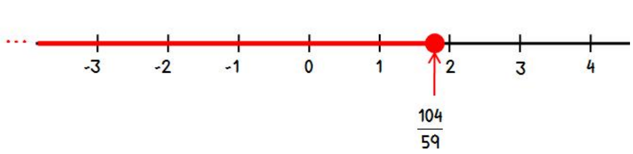
$$\frac{2}{3}(x-4)-\frac{5}{4}(4-3x)\leq 1-\frac{x}{2} \rightarrow \frac{2x-8}{3}-\frac{20-15x}{4}\leq 1-\frac{x}{2}$$

Después reducimos a común denominador (12)

$$\frac{8x-32}{12}-\frac{60-45x}{12}\le\frac{12}{12}-\frac{6x}{12}\ \rightarrow\ 8x-32-60+45x\le 12-6x$$

$$\rightarrow\ 8x+45x+6x\le 12+32+60\ \rightarrow\ 59x\le 104\ \rightarrow\ x\le\frac{104}{59}$$

Solución: $\left\{x\in IR/\ x\le\frac{104}{59}\right\}=\left(-\infty,\frac{104}{59}\right]$



c) $\frac{2-(3x-1)}{2}-\frac{2\cdot(3-7x)}{6}<\frac{x}{4}+2$

Primero eliminamos los paréntesis:

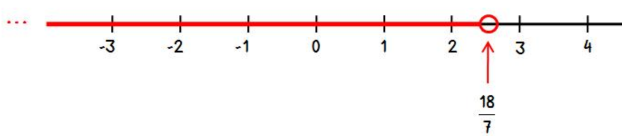
$$\frac{2-(3x-1)}{2}-\frac{2\cdot(3-7x)}{6}<\frac{x}{4}+2\ \rightarrow\ \frac{2-3x+1}{2}-\frac{6-14x}{6}<\frac{x}{4}+2$$

Luego reducimos a común denominador (12)

$$\frac{12-18x+6}{12}-\frac{12-28x}{12}<\frac{3x}{12}+\frac{24}{12}\ \rightarrow\ 12-18x+6-12+28x<3x+24$$

$$\rightarrow\ -18x+28x-3x<24-12-6+12\ \rightarrow\ 7x<18\ \rightarrow\ x<\frac{18}{7}$$

Solución: $\left\{x\in IR/\ x<\frac{18}{7}\right\}=\left(-\infty,\frac{18}{7}\right)$



d) $\frac{3x-2}{2}-\frac{2-2x}{5}>-x+\frac{2}{15}$

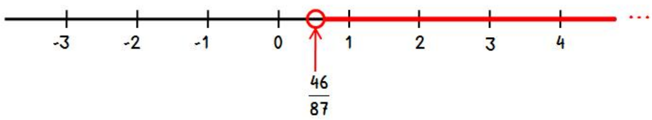
Primero reducimos a común denominador (30)

$$\frac{3x-2}{2}-\frac{2-2x}{5}>-x+\frac{2}{15}\ \rightarrow\ \frac{45x-30}{30}-\frac{12-12x}{30}>\frac{-30x}{30}+\frac{4}{30}$$

$$\rightarrow \quad 45x - 30 - 12 + 12x > -30x + 4 \quad \rightarrow \quad 45x + 12x + 30x > 4 + 30 + 12$$

$$\rightarrow \quad 87x > 46 \quad \rightarrow \quad x > \frac{46}{87}$$

Solución: $\left\{ x \in IR / \ x > \frac{46}{87} \right\} = \left(\frac{46}{87}, \infty \right)$



e) $\frac{3}{2}\left(2 - \frac{x-1}{6}\right) \geq \frac{5}{4}$

Primero eliminamos los paréntesis:

$$\frac{3}{2}\left(2 - \frac{x-1}{6}\right) \geq \frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{6}{2} - \frac{3x-3}{12} \geq \frac{5}{4}$$

La primera y la segunda fracción se pueden simplificar:

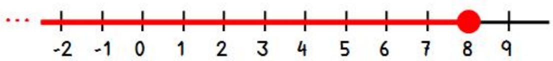
$$3 - \frac{x-1}{4} \geq \frac{5}{4}$$

Ahora reducimos a común denominador (4)

$$3 - \frac{x-1}{4} \geq \frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{12}{4} - \frac{x-1}{4} \geq \frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad 12 - x + 1 \geq 5 \quad \rightarrow \quad -x \geq 5 - 12 - 1$$

$$\rightarrow \quad -x \geq -8 \quad \rightarrow \quad x \leq 8$$

Solución: $\left\{ x \in IR / \ x \leq 8 \right\} = (-\infty, 8]$



f) $\frac{-3(4x-1)}{5}+\frac{3(5+x)}{3}>-1$

Primero eliminamos los paréntesis:

$$\frac{-3(4x-1)}{5}+\frac{3(5+x)}{3}>-1 \rightarrow \frac{-12x+3}{5}+\frac{15+3x}{3}>-1$$

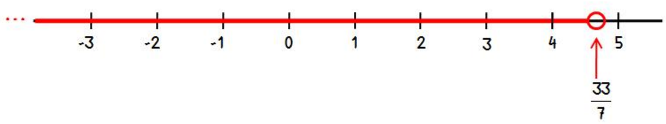
Después reducimos a común denominador (15)

$$\frac{-12x+3}{5}+\frac{15+3x}{3}>-1 \rightarrow \frac{-36x+9}{15}+\frac{75+15x}{15}>\frac{-15}{15}$$

$$\rightarrow -36x+9+75+15x>-15 \rightarrow -36x+15x>-15-9-75$$

$$\rightarrow -21x>-99 \rightarrow x<\frac{-99}{-21} \rightarrow x<\frac{33}{7}$$

Solución: $\left\{x \in IR / \ x<\frac{33}{7}\right\}=\left(-\infty, \frac{33}{7}\right)$



Volver a los enunciados

2 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una variable:

a) $\begin{cases} -4x-3 \geq x+1 \\ x-5(x-2) > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-1 \leq x+\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5(x-1)}{4} > \dfrac{3(5-2x)}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}+5 < -2x+\dfrac{x-3}{3} \\ 6-\dfrac{x}{4} > \dfrac{6x-1}{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{-2(3-x)}{3}+\dfrac{1}{2} > \dfrac{-1}{6} \\ \dfrac{x+1}{2} > \dfrac{-5x+3}{4} \end{cases}$

Solución.

a) $\begin{cases} -4x-3 \geq x+1 \\ x-5(x-2) > 0 \end{cases}$

Primero resolvemos cada inecuación de forma separada:

$$-4x-3 \geq x+1$$
$$-4x-x \geq 1+3$$
$$-5x \geq 4$$
$$x \leq \frac{4}{-5}$$
$$\left(-\infty, \frac{-4}{5}\right]$$

$$x-5(x-2) > 0$$
$$x-5x+10 > 0$$
$$x-5x > -10$$
$$-4x > -10$$
$$x < \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}$$
$$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$$

Finalmente calcularemos la intersección de los dos intervalos:

$$\left(-\infty, \frac{-4}{5}\right] \cap \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) = \left(-\infty, \frac{-4}{5}\right]$$

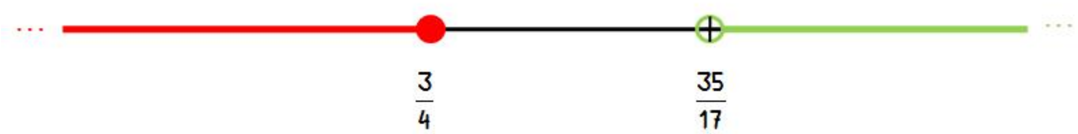
b) $\begin{cases} 3x-1 \le x+\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5(x-1)}{4} > \dfrac{3(5-2x)}{2} \end{cases}$

Primero resolvemos cada inecuación de forma separada:

$$3x-1 \le x+\frac{1}{2}$$
$$\frac{6x-2}{2} \le \frac{2x}{2}+\frac{1}{2}$$
$$6x-2 \le 2x+1$$
$$6x-2x \le 1+2$$
$$4x \le 3$$
$$x \le \frac{3}{4}$$
$$\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$$

$$\frac{5(x-1)}{4} > \frac{3(5-2x)}{2}$$
$$\frac{5x-5}{4} > \frac{15-6x}{2}$$
$$\frac{5x-5}{4} > \frac{30-12x}{4}$$
$$5x-5 > 30-12x$$
$$5x+12x > 30+5$$
$$17x > 35$$
$$x > \frac{35}{17}$$
$$\left(\frac{35}{17}, \infty\right)$$

Finalmente calcularemos la intersección de los dos intervalos:



$$\left(-\infty, \frac{3}{4}\right] \cap \left(\frac{35}{17}, \infty\right) = \varnothing$$

No hay solución

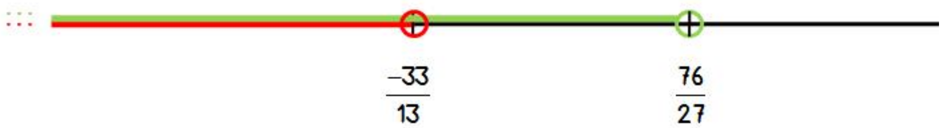
c) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}+5 < -2x+\dfrac{x-3}{3} \\ 6-\dfrac{x}{4} > \dfrac{6x-1}{3} \end{cases}$

Primero resolvemos cada inecuación de forma separada:

$$\frac{x-1}{2}+5<-2x+\frac{x-3}{3}$$
$$\frac{3x-3}{6}+\frac{30}{6}<\frac{-12x}{6}+\frac{2x-6}{6}$$
$$3x-3+30<-12x+2x-6$$
$$3x+12x-2x<-6+3-30$$
$$13x<-33$$
$$x<\frac{-33}{13}$$
$$\left(-\infty,\frac{-33}{13}\right)$$

$$6-\frac{x}{4}>\frac{6x-1}{3}$$
$$\frac{72}{12}-\frac{3x}{12}>\frac{24x-4}{12}$$
$$72-3x>24x-4$$
$$72+4>24x+3x$$
$$76>27x$$
$$\frac{76}{27}>x$$
$$\left(-\infty,\frac{76}{27}\right)$$

Finalmente calcularemos la intersección de los dos intervalos:



$$\left(-\infty,\frac{-33}{13}\right)\cap\left(-\infty,\frac{76}{27}\right)=\left(-\infty,\frac{-33}{13}\right)$$

d) $\begin{cases}\dfrac{-2(3-x)}{3}+\dfrac{1}{2}>\dfrac{-1}{6}\\[2mm] \dfrac{x+1}{2}>\dfrac{-5x+3}{4}\end{cases}$

Primero resolvemos cada inecuación por separado:

$$\frac{-2(3-x)}{3}+\frac{1}{2}>\frac{-1}{6}$$
$$\frac{-6+2x}{3}+\frac{1}{2}>\frac{-1}{6}$$
$$\frac{-12+4x}{6}+\frac{3}{6}>\frac{-1}{6}$$
$$-12+4x+3>-1$$
$$4x>-1-3+12$$
$$4x>8$$
$$x>2$$
$$(2,\infty)$$

$$\frac{x+1}{2}>\frac{-5x+3}{4}$$
$$\frac{2x+2}{4}>\frac{-5x+3}{4}$$
$$2x+2>-5x+3$$
$$2x+5x>3-2$$
$$7x>1$$
$$x>\frac{1}{7}$$
$$\left(\frac{1}{7},\infty\right)$$

Finalmente calculamos la intersección de los dos intervalos:

$$(2,\infty)\cap\left(\frac{1}{7},\infty\right)=(2,\infty)$$

Volver a los enunciados

3 Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $-x^2+6x-8\geq 0$

b) $(x+3)^2\geq 2(x^2+7)$

c) $2x(x+6)>5-x(x+2)$

d) $8x\leq -3(1-x^2)$

Solución.

a) $-x^2+6x-8\geq 0$

Transformamos la inecuación en una ecuación y resolvemos:

$$-x^2+6x-8=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot(-8)\cdot(-1)}}{-2}=\frac{-6\pm 2}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-6+2}{-2}=2\\[2mm]\dfrac{-6-2}{-2}=4\end{cases}$$

Colocamos esos valores en la recta y averiguamos en cada intervalo si se cumple la inecuación o no:

$x=0 \quad\rightarrow\quad -0^2+6\cdot 0-8\geq 0 \quad\rightarrow\quad -8\geq 0$ no

$x=3 \quad\rightarrow\quad -3^2+6\cdot 3-8\geq 0 \quad\rightarrow\quad 1\geq 0$ sí

$x=5 \quad\rightarrow\quad -5^2+6\cdot 5-8\geq 0 \quad\rightarrow\quad -3\geq 0$ no

Por lo tanto la solución es: $[2,4]$

b) $(x+3)^2\geq 2(x^2+7)$

Primero operamos en la inecuación:

$$(x+3)^2 \geq 2(x^2+7) \;\rightarrow\; x^2+6x+9 \geq 2x^2+14 \;\rightarrow\; -x^2+6x-5 \geq 0$$

A continuación, transformamos la inecuación en una ecuación y resolvemos:

$$-x^2+6x-5=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot(-5)\cdot(-1)}}{-2}=\frac{-6\pm 4}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-6+4}{-2}=1\\[2mm]\dfrac{-6-4}{-2}=5\end{cases}$$

Colocamos esos valores en la recta y averiguamos en cada intervalo si se cumple la inecuación o no:

$x=0 \;\rightarrow\; -0^2+6\cdot 0-5\geq 0 \;\rightarrow\; -5\geq 0$ no

$x=3 \;\rightarrow\; -3^2+6\cdot 3-5\geq 0 \;\rightarrow\; 4\geq 0$ sí

$x=6 \;\rightarrow\; -6^2+6\cdot 6-5\geq 0 \;\rightarrow\; -5\geq 0$ no

Por lo tanto la solución es: $[1,5]$

c) $2x(x+6)>5-x(x+2)$

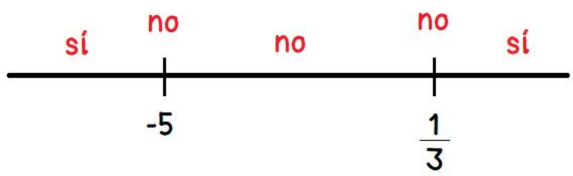
Primero operamos en la inecuación:

$$2x(x+6)>5-x(x+2) \;\rightarrow\; 2x^2+12x>5-x^2-2x \;\rightarrow\; 3x^2+14x-5>0$$

A continuación, transformamos la inecuación en una ecuación y resolvemos:

$$3x^2+14x-5=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-14\pm\sqrt{196-4\cdot(-5)\cdot 3}}{6}=\frac{-14\pm 16}{6}=\begin{cases}\dfrac{-14+16}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}\\[2mm]\dfrac{-14-16}{6}=\dfrac{-30}{6}=-5\end{cases}$$

Colocamos esos valores en la recta y averiguamos en cada intervalo si se cumple la inecuación o no:



$x=-6 \quad \rightarrow \quad 3\cdot(-6)^2+14\cdot(-6)-5>0 \quad \rightarrow \quad 19>0$ sí

$x=0 \quad \rightarrow \quad 3\cdot 0^2+14\cdot 0-5>0 \quad \rightarrow \quad -5>0$ no

$x=1 \quad \rightarrow \quad 3\cdot 1^2+14\cdot 1-5>0 \quad \rightarrow \quad 12>0$ sí

Por lo tanto la solución es: $(-\infty,-5)\cup\left(\frac{1}{3},\infty\right)$

d) $8x \le -3(1-x^2)$

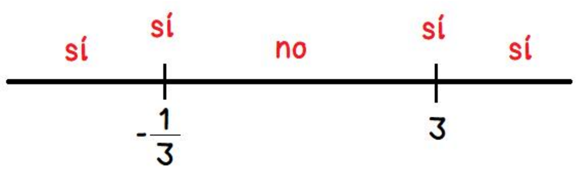
Primero operamos en la inecuación:

$$8x \le -3(1-x^2) \quad \rightarrow \quad 8x \le -3+3x^2 \quad \rightarrow \quad -3x^2+8x+3 \le 0$$

A continuación, transformamos la inecuación en una ecuación y resolvemos:

$$-3x^2+8x+3=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot 3\cdot(-3)}}{-6}=\frac{-8\pm 10}{-6}=\begin{cases}\dfrac{-8+10}{-6}=\dfrac{2}{-6}=\dfrac{-1}{3}\\[2mm] \dfrac{-8-10}{-6}=\dfrac{-18}{-6}=3\end{cases}$$

Colocamos esos valores en la recta y averiguamos en cada intervalo si se cumple la inecuación o no:



$x=-1 \quad \rightarrow \quad -3\cdot(-1)^2+8\cdot(-1)+3\leq 0 \quad \rightarrow \quad -8\leq 0$ sí

$x=0 \quad \rightarrow \quad -3\cdot 0^2+8\cdot 0+3\leq 0 \quad \rightarrow \quad 3\leq 0$ no

$x=4 \quad \rightarrow \quad -3\cdot 4^2+8\cdot 4+3\leq 0 \quad \rightarrow \quad -13\leq 0$ sí

Por lo tanto la solución es: $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup[3,\infty)$

Volver a los enunciados

4 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 - 2x - 24 < 0 \\ 12 - 5x \geq x + 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ \dfrac{x-1}{2} \geq \dfrac{2x-1}{3} \end{cases}$

Solución.

a) $\begin{cases} x^2 - 2x - 24 < 0 \\ 12 - 5x \geq x + 9 \end{cases}$

Primero resolvemos cada inecuación por separado:

$x^2 - 2x - 24 < 0$

$x^2 - 2x - 24 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x = -4 \\ x = 6 \end{matrix}$

$(-4, 6)$

$12 - 5x \geq x + 9$

$-5x - x \geq 9 - 12$

$-6x \geq -3$

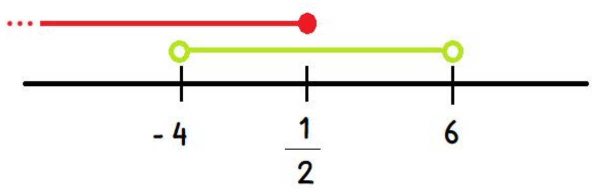
$6x \leq 3$

$x \leq \dfrac{3}{6}$

$x \leq \dfrac{1}{2}$

$\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$

Finalmente calculamos la intersección de los dos intervalos:

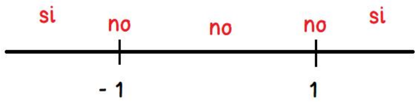


$(-4, 6) \cap \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right] = \left(-4, \dfrac{1}{2}\right]$

b) $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ \dfrac{x-1}{2} \geq \dfrac{2x-1}{3} \end{cases}$

Primero resolvemos cada inecuación por separado:

$$x^2 - 1 > 0$$
$$x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$$



$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

$$\frac{x-1}{2} \geq \frac{2x-1}{3}$$
$$\frac{3x-3}{6} \geq \frac{4x-2}{6}$$
$$3x - 3 \geq 4x - 2$$
$$-3 + 2 \geq 4x - 3x$$
$$-1 \geq x$$
$$(-\infty, 1]$$

Finalmente calculamos la intersección de los dos intervalos:

$$\{(-\infty, -1) \cup (1, \infty)\} \cap (-\infty, 1] = (-\infty, -1)$$

Volver a los enunciados