1 Evalúa los siguientes polinomios en los valores que se indican:

a) $P(x) = -3x^4 + 2x^3 - 4x + 1 \qquad P(2),\ P(-1),\ P(0)$

b) $Q(x,y) = x^3y - \dfrac{x^2}{2} + 5y^3 \qquad Q(-1,2),\ Q(3,-1),\ Q\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

Solución.

2 Calcula:

a) $\left(3x^3 + 7x^2\right)\cdot\left(x^2 - 2x + 1\right) - \left(2x^4 + 5x - 2\right) =$

b) $-5x^4\cdot\left(-x^3 + 9x^2 - 1\right) + 2x^2\cdot\left(2x^4 + 5x - 2\right) =$

c) $\left(2x^3 + 4x\right)\cdot\left(-2x + 6x^3\right) - (3x - 1)\cdot\left(x^4 - 5x^3\right) =$

d) $8x^2\cdot\left[\left(2x^2 - 3\right) + (-x + 5)\right] - \left(3x^4 - 5x^3 - 2x + 7\right) =$

Solución.

3 Calcula:

a) $(x+5)^2\cdot(2x-3) - x\cdot(2x-1)^2 =$

b) $\left(x^2 - 1\right)\cdot\left(x^2 + 1\right) - 3(3x-2)^2 =$

c) $\dfrac{3x(x+5)}{5} - \dfrac{(2x+1)^2}{4} + \dfrac{(x-4)(x+4)}{2} =$

d) $\left(3x^2 + 7x - 8\right)\cdot\left(x - x^2\right)\cdot(2-5x)^2 =$

e) $2\left(4x^2 - 8\right)\cdot\left(\dfrac{x}{2} + 1\right) + (3+x)^2 =$

f) $\dfrac{(x-1)^3}{8} + \dfrac{3}{4}x(x+2)^2 - \dfrac{x^3}{10} =$

Solución.

4 Realiza las siguientes divisiones:

a) $(x^3-3x^2+3x-1):(x^2-2x+1)$

b) $(x^2-8x-24):(x^2-3)$

c) $(4x^6-12x^2-36):(2x^2-4)$

d) $(3x^4+8x-6x^2-12):(x^3-x)$

e) $(4x^4-5x^2+8x-10):(x^2+2x-1)$

f) $(x^4-5x^2+12):(x^2+3x-1)$

Solución.

5 Calcula usando la regla de Ruffini:

a) $(2x^4+3x^3-4x^2+x-18):(x-2)$

b) $(-6x^3+12x^2-3):(x+7)$

c) $(3x^4-10x^3-x^2-20x+5):(x-4)$

d) $(10x^3-15):(x+5)$

e) $(-4x^5+x^3):(x-2)$

f) $(7x^6-6x^3-2x+1):(x+1)$

Solución.

6 Calcula el valor de m para que las siguientes divisiones tengan los restos que se indican:

a) $(2x^3-10x^2-5x+m):(x-5)$ $\quad R=5$

b) $(mx^2-3x+1):(x-8)$ $\quad R=1$

c) $(2x^4+3x^3-mx^2-4):(x-2)$ $\quad R=-2$

d) $(x^3+8x^2+4x+m):(x+4)$ $\quad R=0$

Solución.

7 Calcula m para que el polinomio:

$$p(x) = x^3 + mx^2 + (3m+1)x - 2$$

sea divisible por $x+2$.

Solución.

8 En el siguiente polinomio: $p(x) = x^3 - ax^2 + 7x + b$, calcula a y b si sabemos que p(x) se puede dividir por $x-5$ y que el resto de la división $p(x):(x-2)$ es 9.

Solución.

9 Usa la regla de Ruffini para calcular P(3) y P(-5):

a) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

b) $P(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

Solución.

10 Factoriza los siguientes polinomios sacando factor común o usando los productos notables:

a) $x^4 + 4x^2 + 4$

b) $x^4 - 16$

c) $9x^2 - 6x^3 + x^4$

d) $2x^2 + 4x + 2$

e) $\frac{9x^6}{25} - \frac{x^8}{49}$

f) $4x^8 - 16x^5 + 16x^2$

Solución.

11 Factoriza los siguientes polinomios sacando factor común o usando los productos notables:

a) $12x^3-3x$

b) $2x^4+12x^3+18x^2$

c) $45x^2-120x+80$

d) $3x^3-15x$

e) $100x^5-80x^4+16x^3$

f) $45x^5+120x^3+80x$

Solución.

12 Calcula las raíces de los siguientes polinomios y factorízalos:

a) $x^2-2x-15$

b) $4x^2-8x+3$

c) x^2+4x-5

d) $4x^2+17x+15$

e) x^3+2x^2-x-2

f) x^3-x^2-4x+4

g) $x^3-9x^2+15x-7$

h) $3x^3-15x^2+12x$

i) $4x^4+4x^3-3x^2-4x-1$

j) $x^4-x^3-7x^2+x+6$

k) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

l) x^7-1

Solución.

13 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x^2+2x-8$

b) $3x^5-48x$

c) $2x^3+x^2-5x-10$

d) $x^3-7x^2+8x+16$

e) $x^4+2x^3-23x^2-60x$

f) $9x^4-36x^3+26x^2+4x-3$

Solución.

14 Escribe:

a) Un polinomio de segundo grado cuyas raíces sean 2 y -3.

b) Un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 1/2, -4 y -5.

c) Un polinomio de tercer grado cuyas únicas raíces sean 1 y -1.

d) Un polinomio de cuarto grado con coeficiente principal 4 cuyas únicas raíces sean 0 y 2.

Solución.

15 Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los siguientes polinomios:

a) x^2-4 y x^2-4x+4

b) x^3-7x^2+12x y $x^4-3x^3-4x^2$

c) $2x$, $2x+1$ y $4x^2-1$

d) x^2+x-2, $x+2$ y $3x+6$

Solución.

16 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-1}{2x+2}=$

b) $\dfrac{9x^2-4}{6x^2-4x}=$

c) $\dfrac{x^2-25}{x^2+25-10x}=$

d) $\dfrac{x^3+3x^2-13x-15}{x^3+x^2-9x-9}=$

e) $\dfrac{x^2-x-42}{x^2-8x+7}=$

f) $\dfrac{x^2-1}{x^4-1}=$

g) $\dfrac{x^3+x^2}{2x^2+4x+2}=$

h) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^3+x^2}=$

i) $\dfrac{2x^3-5x^2+x+2}{2x^3+x^2-8x-4}=$

j) $\dfrac{x^3-64}{x^2-16}$

Solución.

17 Calcula y simplifica:

a) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{x}=$

b) $\frac{2}{x^2}-\frac{x+1}{3x}=$

c) $\frac{2x+3}{x-1}-\frac{3x}{x+1}-\frac{7x+2}{x^2-1}=$

d) $\frac{x}{x-3}+\frac{x+1}{x^2-9}-\frac{2}{x^2-6x+9}=$

e) $\frac{3x-1}{x^2+2x+1}-\frac{4x^2-1}{x^2-2x-3}=$

f) $\left(\frac{x+1}{x}+\frac{3}{2x}-\frac{5}{x-4}\right)\cdot x=$

g) $\frac{1}{2x-1}\cdot\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=$

h) $\frac{6x+3}{x^2-1}:\left(\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}\right)=$

i) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right):\frac{3}{x^2}=$

j) $4-\frac{1}{2x-1}\cdot\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=$

k) $\left(\frac{x-1}{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{5}{x-4}\right)\cdot 2x^2=$

l) $\left(\frac{1}{x}:\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{x}{2}=$

m) $\frac{2x}{x+1}:\left(\frac{2x}{x+1}-1\right)=$

n) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=$

Solución.

18 Calcula a y b para que se cumpla: $\frac{3x+2}{(x-1)\cdot(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$

Solución.

19 Calcula el polinomio p(x) que verifica: $\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}=\frac{p(x)}{x+1}$

Solución.

20 Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.:

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

b) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

c) $25x^4 - 26x^2 + 1 = 0$

d) $7x^4 + 21x^2 - 28 = 0$

e) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

f) $-x^4 + 4x^2 + 5 = 0$

g) $\dfrac{x^4 - 5x^2}{2} = -2$

h) $\dfrac{x^4}{2} = \dfrac{13x^2}{2} - 18$

i) $\dfrac{x^4 + 9}{10} = x^2$

Solución.

21 Resuelve las siguientes ecuaciones con raíces:

a) $x + 1 - \sqrt{5x+1} = 0$

b) $x + \sqrt{7-3x} = 1$

c) $\sqrt{x^2+7} = 2x + 2$

d) $2 - \sqrt{4x-5} = 2x$

e) $2 - \sqrt{x-3} = x - 7$

f) $\sqrt{x^2-7} = \dfrac{x}{2} - 1$

g) $3\sqrt{x-1} + 11 = 2x$

h) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$

i) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} = 2$

j) $x + \sqrt{x} = \sqrt{3x + x^2}$

Solución.

22 Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x-1}{x} + x = 1$

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3x} = 22$

c) $\dfrac{x-3}{x} + \dfrac{x+3}{x^2} = \dfrac{2}{3}$

d) $\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{1}{4} = 1$

e) $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2-5x}{x^2+3x}$

f) $\dfrac{2x+3}{2x-1} - \dfrac{1}{x} = 4$

Solución.

23 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $4^x = 64$

b) $3^{-x} = 9$

c) $5^x = \frac{1}{125}$

d) $2^{x+1} = 0{,}25$

e) $5^x \cdot 5^{2x+1} = 125$

f) $2^{x+1} - 2^{x-1} = 12$

g) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

h) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

i) $9^x + 3^{x+1} - 108 = 0$

j) $5^{2x+1} + 3 \cdot 5^{2x+3} = \frac{76}{5}$

Solución.

24 Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $3 = \log(4x)$

b) $-1 = \log(x+3)$

c) $\log_4\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{1}{2}$

d) $\ln(x-1) = 3$

e) $1 = \log_4 2 + \log_4(3+x)$

f) $\log_3(4x) = 1 - \log_3(3x)$

g) $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = 3$

h) $\log_6(2x-3) = \log_6 12 - \log_6 3$

i) $\log(3x+2) + \log(x+2) = \log(7x+6)$

j) $2\log_3(x+3) - \log_3(x+1) = 3\log_3 2$

Solución.

1 Evalúa los siguientes polinomios en los valores que se indican:

a) $P(x) = -3x^4 + 2x^3 - 4x + 1 \qquad P(2),\ P(-1),\ P(0)$

b) $Q(x,y) = x^3y - \dfrac{x^2}{2} + 5y^3 \qquad Q(-1,2),\ Q(3,-1),\ Q\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

Solución.

a) $P(2) = -3\cdot 2^4 + 2\cdot 2^3 - 4\cdot 2 + 1 = -3\cdot 16 + 2\cdot 8 - 4\cdot 2 + 1 = -48 + 16 - 8 + 1 = -39$

$P(-1) = -3\cdot(-1)^4 + 2\cdot(-1)^3 - 4\cdot(-1) + 1 = -3\cdot 1 + 2\cdot(-1) - 4\cdot(-1) + 1 = -3 - 2 + 4 + 1 = 0$

$P(0) = -3\cdot 0^4 + 2\cdot 0^3 - 4\cdot 0 + 1 = -3\cdot 0 + 2\cdot 0 - 4\cdot 0 + 1 = 1$

b) $Q(-1,2) = (-1)^3\cdot 2 - \dfrac{(-1)^2}{2} + 5\cdot 2^3 = -1\cdot 2 - \dfrac{1}{2} + 5\cdot 8 = -2 - \dfrac{1}{2} + 40 = \dfrac{-4 - 1 + 80}{2} = \dfrac{75}{2}$

$Q(3,-1) = 3^3\cdot(-1) - \dfrac{3^2}{2} + 5\cdot(-1)^3 = 27\cdot(-1) - \dfrac{9}{2} + 5\cdot(-1) = -27 - \dfrac{9}{2} - 5 =$

$= \dfrac{-54 - 9 - 10}{2} = \dfrac{-73}{2}$

$Q\left(0,\dfrac{1}{2}\right) = 0^3\cdot\dfrac{1}{2} - \dfrac{0^2}{2} + 5\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = 0\cdot\dfrac{1}{2} - \dfrac{0}{2} + 5\cdot\dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8}$

Volver a los enunciados

2 Calcula:

a) $\left(3x^3+7x^2\right)\cdot\left(x^2-2x+1\right)-\left(2x^4+5x-2\right)=$

b) $-5x^4\cdot\left(-x^3+9x^2-1\right)+2x^2\cdot\left(2x^4+5x-2\right)=$

c) $\left(2x^3+4x\right)\cdot\left(-2x+6x^3\right)-(3x-1)\cdot\left(x^4-5x^3\right)=$

d) $8x^2\cdot\left[\left(2x^2-3\right)+(-x+5)\right]-\left(3x^4-5x^3-2x+7\right)=$

Solución.

a) $\left(3x^3+7x^2\right)\cdot\left(x^2-2x+1\right)-\left(2x^4+5x-2\right)=3x^5-6x^4+3x^3+7x^4-14x^3+7x^2-$

$-2x^4-5x+2=3x^5-x^4-11x^3+7x^2-5x+2$

b) $-5x^4\cdot\left(-x^3+9x^2-1\right)+2x^2\cdot\left(2x^4+5x-2\right)=5x^7-45x^6+5x^4+4x^6+10x^3-4x^2=$

$=5x^7-41x^6+5x^4+10x^3-4x^2$

c) $\left(2x^3+4x\right)\cdot\left(-2x+6x^3\right)-(3x-1)\cdot\left(x^4-5x^3\right)=-4x^4+12x^6-8x^2+24x^4-3x^5+15x^4+$

$+x^4-5x^3=12x^6-3x^5+36x^4-5x^3-8x^2$

d) $8x^2\cdot\left[\left(2x^2-3\right)+(-x+5)\right]-\left(3x^4-5x^3-2x+7\right)=8x^2\cdot\left[2x^2-3-x+5\right]-\left(3x^4-5x^3-2x+7\right)=$

$=8x^2\cdot\left[2x^2-x+2\right]-\left(3x^4-5x^3-2x+7\right)=16x^4-8x^3+16x^2-3x^4+5x^3+2x-7=$

$=13x^4-3x^3+16x^2+2x-7$

Volver a los enunciados

3 Calcula:

a) $(x+5)^2\cdot(2x-3)-x\cdot(2x-1)^2=$

b) $\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)-3(3x-2)^2=$

c) $\dfrac{3x(x+5)}{5}-\dfrac{(2x+1)^2}{4}+\dfrac{(x-4)(x+4)}{2}=$

d) $\left(3x^2+7x-8\right)\cdot\left(x-x^2\right)\cdot(2-5x)^2=$

e) $2\left(4x^2-8\right)\cdot\left(\dfrac{x}{2}+1\right)+(3+x)^2=$

f) $\dfrac{(x-1)^3}{8}+\dfrac{3}{4}x(x+2)^2-\dfrac{x^3}{10}=$

Solución.

a) $(x+5)^2\cdot(2x-3)-x\cdot(2x-1)^2=\left(x^2+25+10x\right)\cdot(2x-3)-x\cdot\left(4x^2+1-4x\right)=$

$=2x^3-3x^2+50x-75+20x^2-30x-4x^3-x+4x^2=-2x^3+21x^2+19x-75$

b) $\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)-3(3x-2)^2=x^4-1-3\left(9x^2+4-12x\right)=x^4-1-27x^2-12+36x=$

$=x^4-27x^2+36x-13$

c) $\dfrac{3x(x+5)}{5}-\dfrac{(2x+1)^2}{4}+\dfrac{(x-4)(x+4)}{2}=\dfrac{3x^2+15x}{5}-\dfrac{4x^2+1+4x}{4}+\dfrac{x^2-16}{2}=$

$=\dfrac{12x^2+60x}{20}-\dfrac{20x^2+5+20x}{20}+\dfrac{10x^2-160}{20}=\dfrac{12x^2+60x-20x^2-5-20x+10x^2-160}{20}=$

$=\dfrac{2x^2+40x-165}{20}=\dfrac{x^2}{10}+2x-\dfrac{33}{4}$

d) $\left(3x^2+7x-8\right)\cdot\left(x-x^2\right)\cdot(2-5x)^2=\left(3x^3-3x^4+7x^2-7x^3-8x+8x^2\right)\cdot\left(4+25x^2-20x\right)=$

$=\left(-3x^4-4x^3+15x^2-8x\right)\cdot\left(4+25x^2-20x\right)=-12x^4-75x^6+60x^5-16x^3-100x^5+80x^4+$

$+60x^2+375x^4-300x^3-32x-200x^3+160x^2=-75x^6-40x^5+443x^4-516x^3+220x^2-32x$

e) $2\left(4x^2-8\right)\cdot\left(\dfrac{x}{2}+1\right)+(3+x)^2=\left(8x^2-16\right)\cdot\left(\dfrac{x}{2}+1\right)+\left(9+x^2+6x\right)=4x^3+8x^2-8x-16+$

$+9+x^2+6x=4x^3+9x^2-2x-7$

f) $\frac{(x-1)^3}{8}+\frac{3}{4}x(x+2)^2-\frac{x^3}{10}=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{8}+\frac{3}{4}x\left(x^2+4+4x\right)-\frac{x^3}{10}=$

$$=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{8}+\frac{3x^3+12x+12x^2}{4}-\frac{x^3}{10}=\frac{5x^3-15x^2+15x-5}{40}+\frac{30x^3+120x+120x^2}{40}-$$

$$-\frac{4x^3}{40}=\frac{5x^3-15x^2+15x-5+30x^3+120x+120x^2-4x^3}{40}=\frac{31x^3+105x^2+135x-5}{40}=$$

$$=\frac{31x^3}{40}+\frac{21x^2}{8}+\frac{27x}{8}-\frac{1}{8}$$

Volver a los enunciados

4 Realiza las siguientes divisiones:

a) $(x^3-3x^2+3x-1):(x^2-2x+1)$

b) $(x^2-8x-24):(x^2-3)$

c) $(4x^6-12x^2-36):(2x^2-4)$

d) $(3x^4+8x-6x^2-12):(x^3-x)$

e) $(4x^4-5x^2+8x-10):(x^2+2x-1)$

f) $(x^4-5x^2+12):(x^2+3x-1)$

Solución.

a)
$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2+3x-1 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} -x^3+2x^2-x & x-1 \\ \hline -x^2+2x-1 & \\ x^2-2x+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|l} x^2-8x-24 & x^2-3 \\ \cline{2-2} -x^2+3 & 1 \\ \hline -8x-21 & \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r|l} 4x^6-12x^2-36 & 2x^2-4 \\ \cline{2-2} -4x^6+8x^4 & 2x^4+4x^2+2 \\ \hline 8x^4-12x^2-36 & \\ -8x^4+16x^2 & \\ \hline 4x^2-36 & \\ -4x^2+8 & \\ \hline -28 & \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r|l} 3x^4-6x^2+8x-12 & x^3-x \\ \cline{2-2} -3x^4+3x^2 & 3x \\ \hline -3x^2+8x-12 & \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r|l} 4x^4-5x^2+8x-10 & x^2+2x-1 \\ \cline{2-2} -4x^4-8x^3+4x^2 & 4x^2-8x+15 \\ \hline -8x^3-x^2+8x-10 & \\ 8x^3+16x^2-8x & \\ \hline 15x^2-10 & \\ -15x^2-30x+15 & \\ \hline -30x+5 & \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{r|l} x^4-5x^2+12 & x^2+3x-1 \\ \cline{2-2} -x^4-3x^3+x^2 & x^2-3x+5 \\ \hline -3x^3-4x^2+12 & \\ 3x^3+9x^2-3x & \\ \hline 5x^2-3x+12 & \\ -5x^2-15x+5 & \\ \hline -18x+17 & \end{array}$$

Volver a los enunciados

5 Calcula usando la regla de Ruffini:

a) $\left(2x^4+3x^3-4x^2+x-18\right):(x-2)$

b) $\left(-6x^3+12x^2-3\right):(x+7)$

c) $\left(3x^4-10x^3-x^2-20x+5\right):(x-4)$

d) $\left(10x^3-15\right):(x+5)$

e) $\left(-4x^5+x^3\right):(x-2)$

f) $\left(7x^6-6x^3-2x+1\right):(x+1)$

Solución.

a)

	2	3	−4	1	−18
2	↓	4	14	20	42
	2	7	10	21	24

Cociente: $2x^3+7x^2+10x+21$

Resto: 24

b)

	−6	12	0	−3
−7	↓	42	−378	2646
	−6	54	−378	2643

Cociente: $-6x^2+54x-378$

Resto: 2643

c)

	3	−10	−1	−20	5
4	↓	12	8	28	32
	3	2	7	8	37

Cociente: $3x^3+2x^2+7x+8$

Resto: 37

d)

	10	0	0	-15
-5	↓	-50	250	-1250
	10	-50	250	$\boxed{-1265}$

Cociente:
$10x^2 - 50x + 250$

Resto: -1265

e)

	-4	0	1	0	0	0
2	↓	-8	-16	-30	-60	-120
	-4	-8	-15	-30	-60	$\boxed{-120}$

Cociente:
$-4x^4 - 8x^3 - 15x^2 - 30x - 60$

Resto: -120

f)

	7	0	0	-6	0	-2	1
-1	↓	-7	7	-7	13	-13	15
	7	-7	7	-13	13	-15	$\boxed{16}$

Cociente:
$7x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 13x^2 + 13x - 15$

Resto: 16

Volver a los enunciados

6 Calcula el valor de m para que las siguientes divisiones tengan los restos que se indican:

a) $\left(2x^3-10x^2-5x+m\right):(x-5)$ $\quad R=5$

b) $\left(mx^2-3x+1\right):(x-8)$ $\quad R=1$

c) $\left(2x^4+3x^3-mx^2-4\right):(x-2)$ $\quad R=-2$

d) $\left(x^3+8x^2+4x+m\right):(x+4)$ $\quad R=0$

Solución.

a) Si llamamos $P(x)=2x^3-10x^2-5x+m$ el resto de la división $P(x):(x-5)$ es P(5).

$$P(5)=2\cdot5^3-10\cdot5^2-5\cdot5+m=250-250-25+m=-25+m=5$$

Sólo tendremos que resolver esa ecuación:

$$-25+m=5 \quad\rightarrow\quad m=5+25=30$$

b) Si llamamos $P(x)=mx^2-3x+1$ el resto de la división $P(x):(x-8)$ es P(8).

$$P(8)=m\cdot8^2-3\cdot8+1=64m-24+1=64m-23=1$$

Sólo tendremos que resolver esa ecuación:

$$64m-23=1 \quad\rightarrow\quad 64m=24 \quad\rightarrow\quad m=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$$

c) Si llamamos $P(x)=2x^4+3x^3-mx^2-4$ el resto de la división $P(x):(x-2)$ es P(2).

$$P(2)=2\cdot2^4+3\cdot2^3-m\cdot2^2-4=2\cdot16+3\cdot8-m\cdot4-4=32+24-4m-4=$$
$$=52-4m=-2$$

Sólo tendremos que resolver esa ecuación:

$$52-4m=-2 \quad\rightarrow\quad -4m=-54 \quad\rightarrow\quad m=\frac{-54}{-4}=\frac{27}{2}$$

d) Si llamamos $P(x)=x^3+8x^2+4x+m$ el resto de la división $P(x):(x+4)$ es P(-4).

$$P(-4)=(-4)^3+8\cdot(-4)^2+4\cdot(-4)+m=-64+128-16+m=48+m=0$$

Sólo tendremos que resolver esa ecuación:

$$48+m=0 \quad \rightarrow \quad m=-48$$

Volver a los enunciados

7 Calcula m para que el polinomio:

$$p(x) = x^3 + mx^2 + (3m+1)x - 2$$

sea divisible por $x + 2$.

Solución.

Para que sea divisible por x + 2 el resto de la división tiene que ser 0.

Dicho resto puede ser calculado por Ruffini o haciendo p(-2), en virtud del teorema del resto.

Lo calcularemos en esta ocasión dividiendo por Ruffini:

	1	m	3m + 1	-2
-2		-2	-2m + 4	-2m - 10
	1	m - 2	m + 5	-2m - 12

Dicho resto tiene que ser 0, por tanto:

$$-2m - 12 = 0 \rightarrow -2m = 12 \rightarrow m = -6$$

Volver a los enunciados

8 En el siguiente polinomio: $p(x)=x^3-ax^2+7x+b$, calcula a y b si sabemos que p(x) se puede dividir por $x-5$ y que el resto de la división $p(x):(x-2)$ es 9.

Solución.

- Si p(x) se puede dividir por x - 5, el resto de dicha división será 0.

	1	-a	7	b
5	↓	5	25 - 5a	160 - 25a
	1	5 - a	32 - 5a	160 - 25a + b

Tenemos entonces que $160-25a+b=0$

- Por otro lado, el resto de la división $p(x):(x-2)$ es 9. Dividiendo por Ruffini:

	1	-a	7	b
2	↓	2	4 - 2a	22 - 4a
	1	2 - a	11 - 2a	22 - 4a + b

Tenemos entonces que $22-4a+b=9$

Con las ecuaciones que obtuvimos, tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases}160-25a+b=0\\22-4a+b=9\end{cases}$$

Lo resolveremos por reducción, cambiando la segunda ecuación de signo y sumando:

$$\begin{cases} 160-25a+b=0 \longrightarrow \\ 22-4a+b=9 \xrightarrow{\cdot(-1)} \end{cases} \quad \begin{array}{r} 160-25a+b=0 \\ \underline{-22+4a-b=-9} \end{array}$$

$$138-21a=-9 \;\rightarrow\; -21a=-147 \;\rightarrow\; a=\frac{-147}{-21}=7$$

Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos b:

$$22-4a+b=9 \;\rightarrow\; 22-28+b=9 \;\rightarrow\; b=9-22+28=15$$

Volver a los enunciados

9 Usa la regla de Ruffini para calcular P(3) y P(-5):

a) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

b) $P(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

Solución.

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & \downarrow & 6 & 3 & 30 \\ \hline & 2 & 1 & 10 & \boxed{33} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 7 & 3 \\ -5 & \downarrow & -10 & 75 & -410 \\ \hline & 2 & -15 & 82 & \boxed{-407} \end{array}$$

$P(3) = 33$
$P(-5) = -407$

b)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & \downarrow & 3 & 9 & 18 & 54 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 18 & \boxed{55} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ -5 & \downarrow & -5 & 25 & -110 & 550 \\ \hline & 1 & -5 & 22 & -110 & \boxed{551} \end{array}$$

$P(3) = 55$
$P(-5) = 551$

Volver a los enunciados

10 Factoriza los siguientes polinomios sacando factor común o usando los productos notables:

a) x^4+4x^2+4

b) x^4-16

c) $9x^2-6x^3+x^4$

d) $2x^2+4x+2$

e) $\dfrac{9x^6}{25}-\dfrac{x^8}{49}$

f) $4x^8-16x^5+16x^2$

Solución.

a) $x^4+4x^2+4=(x^2+2)^2$

b) $x^4-16=(x^2+4)\cdot(x^2-4)=(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

c) $9x^2-6x^3+x^4=x^2\cdot(9-6x+x^2)=x^2\cdot(3-x)^2$

d) $2x^2+4x+2=2\cdot(x^2+2x+1)=2\cdot(x+1)^2$

e) $\dfrac{9x^6}{25}-\dfrac{x^8}{49}=x^6\left(\dfrac{9}{25}-\dfrac{x^2}{49}\right)=x^6\cdot\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{x}{7}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{x}{7}\right)$

f) $4x^8-16x^5+16x^2=4x^2\cdot(x^6-4x^3+4)=4x^2\cdot(x^3-2)^2$

Volver a los enunciados

11 Factoriza los siguientes polinomios sacando factor común o usando los productos notables:

a) $12x^3 - 3x$

b) $2x^4 + 12x^3 + 18x^2$

c) $45x^2 - 120x + 80$

d) $3x^3 - 15x$

e) $100x^5 - 80x^4 + 16x^3$

f) $45x^5 + 120x^3 + 80x$

Solución.

a) $12x^3 - 3x = 3x \cdot (4x^2 - 1) = 3x \cdot (2x+1) \cdot (2x-1)$

b) $2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x+3)^2$

c) $45x^2 - 120x + 80 = 5(9x^2 - 24x + 16) = 5(3x-4)^2$

d) $3x^3 - 15x = 3x(x^2 - 5) = 3x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

e) $100x^5 - 80x^4 + 16x^3 = 4x^3(25x^2 - 20x + 4) = 4x^3(5x-2)^2$

f) $45x^5 + 120x^3 + 80x = 5x(9x^4 + 24x^2 + 16) = 5x(3x^2+4)^2$

Volver a los enunciados

12 Calcula las raíces de los siguientes polinomios y factorízalos:

a) $x^2 - 2x - 15$

b) $4x^2 - 8x + 3$

c) $x^2 + 4x - 5$

d) $4x^2 + 17x + 15$

e) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

f) $x^3 - x^2 - 4x + 4$

g) $x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

h) $3x^3 - 15x^2 + 12x$

i) $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

j) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

k) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

l) $x^7 - 1$

Solución.

a) Raíces: 5 y -3 $\quad x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$

b) Raíces: $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$ $\quad 4x^2 - 8x + 3 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (2x-1)(2x-3)$

c) Raíces: 1 y -5 $\quad x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$

d) Raíces: -3 y $\frac{-5}{4}$ $\quad 4x^2 + 17x + 15 = 4(x+3)\left(x + \frac{5}{4}\right) = (x+3)(4x+5)$

e) Raíces: $1, -1$ y -2 $\quad x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$

f) Raíces: $1,\ 2$ y -2 $\quad x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x-2)(x+2)$

g) Raíces: 1 (doble) y 7 $\quad x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = (x-1)^2(x-7)$

h) Raíces: $0, 1$ y 4 $\quad 3x^3 - 15x^2 + 12x = 3x(x-1)(x-4)$

i) Raíces: $1, -1$ y $\frac{-1}{2}$ (doble)

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 4(x-1)(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = (x-1)(x+1)(2x+1)^2$$

j) Raíces: 1, −1, −2 y 3 $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$

k) Raíces: −1 $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^4 + x^2 + 1)$

l) Raíces: 1 $x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

Volver a los enunciados

13 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x^2+2x-8$

b) $3x^5-48x$

c) $2x^3+x^2-5x-10$

d) $x^3-7x^2+8x+16$

e) $x^4+2x^3-23x^2-60x$

f) $9x^4-36x^3+26x^2+4x-3$

Solución.

a) $3x^2+2x-8$

No podemos sacar factor común.

Tampoco es un producto notable.

Encontraremos las raíces resolviendo la ecuación:

$$3x^2+2x-8=0 \rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 3\cdot(-8)}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{4+96}}{6}=\frac{-2\pm 10}{6}\begin{cases}\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}\\ \dfrac{-12}{6}=-2\end{cases}$$

La factorización es:

$$3x^2+2x-8=3(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)=(x+2)(3x-4)$$

b) $3x^5-48x$

Sacamos factor común:

$$3x^5-48x=3x(x^4-16)$$

Usamos productos notables en el segundo factor:

$$3x^5-48x=3x(x^4-16)=3x(x^2+4)(x^2-4)$$

Finalmente volvemos a usar productos notables en el último factor:

$$3x^5 - 48x = 3x\left(x^4 - 16\right) = 3x\left(x^2 + 4\right)\left(x^2 - 4\right) = 3x\left(x^2 + 4\right)(x + 2)(x - 2)$$

Observa que $x^2 + 4$ no puede ser factorizado pues no tiene raíces reales:

$$x^2 + 4 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = -4 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{-4}$$

c) $2x^3 + x^2 - 5x - 10$

No podemos sacar factor común.

Tampoco es un producto notable.

Encontraremos la primera raíz por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -5 & -10 \\ 2 & \downarrow & 4 & 10 & 10 \\ \hline & 2 & 5 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

Y las siguientes resolviendo la ecuación:

$$2x^2 + 5x + 5 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{-15}}{4}$$

Como este último polinomio no tiene raíces no se puede descomponer. Así la factorización será:

$$2x^3 + x^2 - 5x - 10 = (x - 2)\left(2x^2 + 5x + 5\right)$$

d) $x^3 - 7x^2 + 8x + 16$

No podemos sacar factor común.

Tampoco es un producto notable.

Encontraremos la primera raíz por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -7 & 8 & 16 \\ -1 & \downarrow & -1 & 8 & -16 \\ \hline & 1 & -8 & 16 & \boxed{0} \end{array}$$

El polinomio que queda es un producto notable:

$$x^2-8x+16=(x-4)^2$$

La factorización es:

$$x^3-7x^2+8x+16=(x+1)(x-4)^2$$

e) $x^4+2x^3-23x^2-60x$

Podemos sacar factor común:

$$x^4+2x^3-23x^2-60x=x\left(x^3+2x^2-23x-60\right)$$

El segundo factor no es un producto notable. Buscaremos la primera de sus raíces por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & -23 & -60 \\
-3 & \downarrow & -3 & 3 & 60 \\
\hline
 & 1 & -1 & -20 & \boxed{0}
\end{array}$$

El polinomio que queda no es un producto notable así que buscaremos sus raíces igualando a cero y resolviendo:

$$x^2-x-20=0 \;\rightarrow\; x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-20)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{1\pm9}{2}\begin{cases}\dfrac{10}{2}=5\\[2mm] \dfrac{-8}{2}=-4\end{cases}$$

La factorización es:

$$x^4+2x^3-23x^2-60x=x(x+3)(x-5)(x+4)$$

f) $9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$

No podemos sacar factor común.

Tampoco es un producto notable.

Encontraremos la primera raíz por Ruffini:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 9 & -36 & 26 & 4 & -3 \\
1 & & 9 & -27 & -1 & 3 \\
\hline
 & 9 & -27 & -1 & 3 & \boxed{0} \\
3 & & 27 & 0 & -3 & \\
\hline
 & 9 & 0 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

El polinomio que queda es un producto notable:

$$9x^2 - 1 = (3x+1)(3x-1)$$

La factorización es:

$$9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3 = (x-1)(x-3)(3x+1)(3x-1)$$

Volver a los enunciados

14 Escribe:

a) Un polinomio de segundo grado cuyas raíces sean 2 y -3.

b) Un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 1/2, -4 y -5.

c) Un polinomio de tercer grado cuyas únicas raíces sean 1 y -1.

d) Un polinomio de cuarto grado con coeficiente principal 4 cuyas únicas raíces sean 0 y 2.

Solución.

a) $P(x)=(x-2)(x+3)=x^2+x-6$

b) $P(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+4)(x+5)=(2x-1)(x+4)(x+5)=2x^3+17x^2+31x-20$

c) $P(x)=(x-1)^2(x+1)=\left(x^2-2x+1\right)(x+1)=x^3-x^2-x+1$

d) $P(x)=4x^3(x-2)=4x^4-8x^3$

NOTA: La solución de estos ejercicios no es única.

Volver a los enunciados

15 Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los siguientes polinomios:

a) x^2-4 y x^2-4x+4

b) x^3-7x^2+12x y $x^4-3x^3-4x^2$

c) $2x$, $2x+1$ y $4x^2-1$

d) x^2+x-2, $x+2$ y $3x+6$

Solución.

a) x^2-4 y x^2-4x+4

- $x^2-4=(x-2)(x+2)$
- $x^2-4x+4=(x-2)^2$

$$m.c.m\left(x^2-4,x^2-4x+4\right)=(x-2)^2(x+2)$$

$$m.c.d\left(x^2-4,x^2-4x+4\right)=(x-2)$$

b) x^3-7x^2+12x y $x^4-3x^3-4x^2$

- $x^3-7x^2+12x=x\left(x^2-7x+12\right)=x(x-3)(x-4)$
- $x^4-3x^3-4x^2=x^2\left(x^2-3x-4\right)=x^2(x-4)(x+1)$

$$m.c.m\left(x^3-7x^2+12x,x^4-3x^3-4x^2\right)=x^2(x-4)(x+1)(x-3)$$

$$m.c.d\left(x^3-7x^2+12x,x^4-3x^3-4x^2\right)=x(x-4)$$

c) $2x$, $2x+1$ y $4x^2-1$

- $2x$
- $2x+1$

- $4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1)$

$$m.c.m\left(2x, 2x+1, 4x^2-1\right) = 2x(2x+1)(2x-1)$$

$$m.c.d\left(2x, 2x+1, 4x^2-1\right) = 1$$

d) $x^2 + x - 2$, $x + 2$ y $3x + 6$

- $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$
- $x + 2$
- $3x + 6 = 3(x+2)$

$$m.c.m\left(x^2+x-2, x+2, 3x+6\right) = 3(x-1)(x+2)$$

$$m.c.d\left(x^2+x-2, x+2, 3x+6\right) = x+2$$

Volver a los enunciados

16 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-1}{2x+2}=$

b) $\dfrac{9x^2-4}{6x^2-4x}=$

c) $\dfrac{x^2-25}{x^2+25-10x}=$

d) $\dfrac{x^3+3x^2-13x-15}{x^3+x^2-9x-9}=$

e) $\dfrac{x^2-x-42}{x^2-8x+7}=$

f) $\dfrac{x^2-1}{x^4-1}=$

g) $\dfrac{x^3+x^2}{2x^2+4x+2}=$

h) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^3+x^2}=$

i) $\dfrac{2x^3-5x^2+x+2}{2x^3+x^2-8x-4}=$

j) $\dfrac{x^3-64}{x^2-16}$

Solución.

a) $\dfrac{x^2-1}{2x+2}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)}=\dfrac{x-1}{2}$

b) $\dfrac{9x^2-4}{6x^2-4x}=\dfrac{(3x+2)(3x-2)}{2x(3x-2)}=\dfrac{3x+2}{2x}$

c) $\dfrac{x^2-25}{x^2+25-10x}=\dfrac{(x+5)(x-5)}{(x-5)^2}=\dfrac{x+5}{x-5}$

d) $\dfrac{x^3+3x^2-13x-15}{x^3+x^2-9x-9}=\dfrac{(x+1)(x-3)(x+5)}{(x-3)(x+1)(x+3)}=\dfrac{x+5}{x+3}$

e) $\dfrac{x^2-x-42}{x^2-8x+7}=\dfrac{(x+6)(x-7)}{(x-1)(x-7)}=\dfrac{x+6}{x-1}$

f) $\dfrac{x^2-1}{x^4-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{1}{x^2+1}$

g) $\frac{x^3+x^2}{2x^2+4x+2}=\frac{x^2(x+1)}{2(x^2+2x+1)}=\frac{x^2(x+1)}{2(x+1)^2}=\frac{x^2}{2(x+1)}$

h) $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2}=\frac{(x-4)(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{x-4}{x^2}$

i) $\frac{2x^3-5x^2+x+2}{2x^3+x^2-8x-4}=\frac{(x-1)(x-2)(2x+1)}{(x+2)(x-2)(2x+1)}=\frac{x-1}{x+2}$

j) $\frac{x^3-64}{x^2-16}=\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{(x+4)(x-4)}=\frac{x^2+4x+16}{x+4}$

Volver a los enunciados

17 Calcula y simplifica:

a) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{x}=$

b) $\frac{2}{x^2}-\frac{x+1}{3x}=$

c) $\frac{2x+3}{x-1}-\frac{3x}{x+1}-\frac{7x+2}{x^2-1}=$

d) $\frac{x}{x-3}+\frac{x+1}{x^2-9}-\frac{2}{x^2-6x+9}=$

e) $\frac{3x-1}{x^2+2x+1}-\frac{4x^2-1}{x^2-2x-3}=$

f) $\left(\frac{x+1}{x}+\frac{3}{2x}-\frac{5}{x-4}\right)\cdot x=$

g) $\frac{1}{2x-1}\cdot\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=$

h) $\frac{6x+3}{x^2-1}:\left(\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}\right)=$

i) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right):\frac{3}{x^2}=$

j) $4-\frac{1}{2x-1}\cdot\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=$

k) $\left(\frac{x-1}{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{5}{x-4}\right)\cdot 2x^2=$

l) $\left(\frac{1}{x}:\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{x}{2}=$

m) $\frac{2x}{x+1}:\left(\frac{2x}{x+1}-1\right)=$

n) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=$

Solución.

a) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{4x}-\frac{1}{4x}+\frac{4}{4x}=\frac{5}{4x}$

b) $\frac{2}{x^2}-\frac{x+1}{3x}=\frac{6}{3x^2}-\frac{(x+1)\cdot x}{3x^2}=\frac{6}{3x^2}-\frac{x^2+x}{3x^2}=\frac{6-x^2-x}{3x^2}$

c) $\frac{2x+3}{x-1}-\frac{3x}{x+1}-\frac{7x+2}{x^2-1}=\frac{(2x+3)(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{3x(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{7x+2}{(x+1)(x-1)}=$

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \\ x+1 \\ x^2-1=(x+1)(x-1) \end{array}\right\}\ \text{m.c.m}=(x+1)(x-1)$$

$$=\frac{2x^2+2x+3x+3}{x-1}-\frac{3x^2-3x}{x+1}-\frac{7x+2}{x^2-1}=\frac{2x^2+2x+3x+3-3x^2+3x-7x-2}{(x+1)(x-1)}=$$

$$= \frac{-x^2+x+1}{(x+1)(x-1)}$$

d) $$\frac{x}{x-3}+\frac{x+1}{x^2-9}-\frac{2}{x^2-6x+9}=\frac{x(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)^2}+\frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)^2}-\frac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)^2}=$$

$$\left.\begin{matrix} x-3 \\ x^2-9=(x+3)(x-3) \\ x^2-6x+9=(x-3)^2 \end{matrix}\right\} \text{m.c.m}=(x+3)(x-3)^2$$

$$=\frac{x^3-9x}{(x+3)(x-3)^2}+\frac{x^2-3x+x-3}{(x+3)(x-3)^2}-\frac{2x+6}{(x+3)(x-3)^2}=\frac{x^3-9x+x^2-3x+x-3-2x-6}{(x+3)(x-3)^2}=$$

$$=\frac{x^3+x^2-13x-9}{(x+3)(x-3)^2}$$

e) $$\frac{3x-1}{x^2+2x+1}-\frac{4x^2-1}{x^2-2x-3}=\frac{(3x-1)(x-3)}{(x+1)^2(x-3)}-\frac{(4x^2-1)(x+1)}{(x+1)^2(x-3)}=$$

$$\left.\begin{matrix} x^2+2x+1=(x+1)^2 \\ x^2-2x-3=(x+1)(x-3) \end{matrix}\right\} \text{m.c.m}=(x+1)^2(x-3)$$

$$=\frac{3x^2-9x-x+3}{(x+1)^2(x-3)}-\frac{4x^3+4x^2-x-1}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{3x^2-9x-x+3-4x^3-4x^2+x+1}{(x+1)^2(x-3)}=$$

$$=\frac{-4x^3-x^2-9x+4}{(x+1)^2(x-3)}$$

f) $$\left(\frac{x+1}{x}+\frac{3}{2x}-\frac{5}{x-4}\right)\cdot x=\left(\frac{(x+1)\cdot 2\cdot(x-4)}{2x(x-4)}+\frac{3(x-4)}{2x(x-4)}-\frac{5\cdot 2x}{2x(x-4)}\right)\cdot x=$$

$$\left.\begin{matrix} x \\ 2x \\ x-4 \end{matrix}\right\} \text{m.c.m}=2x(x-4)$$

$$=\left(\frac{2x^2-8x+2x-8}{2x(x-4)}+\frac{3x-12}{2x(x-4)}-\frac{10x}{2x(x-4)}\right)\cdot x=\left(\frac{2x^2-8x+2x-8+3x-12-10x}{2x(x-4)}\right)\cdot x=$$

$$=\left(\frac{2x^2-13x-20}{2x(x-4)}\right)\cdot x=\frac{\left(2x^2-13x-20\right)\cdot x}{2x(x-4)}=\frac{2x^2-13x-20}{2(x-4)}$$

g) $$\frac{1}{2x-1}\cdot\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2x-1}\cdot\left(\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2}=\frac{2x-1}{(2x-1)x^2}=\frac{1}{x^2}$$

h) $$\frac{6x+3}{x^2-1}:\left(\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}\right)=\frac{6x+3}{x^2-1}:\left(\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right)=$$

$$=\frac{6x+3}{x^2-1}:\left(\frac{2x-2}{(x+1)(x-1)}+\frac{2x+2}{(x+1)(x-1)}\right)=\frac{6x+3}{x^2-1}:\frac{4x}{(x+1)(x-1)}=\frac{(6x+3)(x+1)(x-1)}{\left(x^2-1\right)\cdot 4x}=$$

$$=\frac{3(2x+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)\cdot 4x}=\frac{3(2x+1)}{4x}$$

i) $$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right):\frac{3}{x^2}=\left(\frac{x+3}{x(x+3)}-\frac{x}{x(x+3)}\right):\frac{3}{x^2}=\frac{3}{x(x+3)}:\frac{3}{x^2}=\frac{3x^2}{3x(x+3)}=\frac{x}{x+3}$$

j) $$4-\frac{1}{2x-1}\cdot\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=4-\frac{1}{2x-1}\cdot\left(\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=4-\frac{1}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2}=4-\frac{2x-1}{(2x-1)\cdot x^2}=$$

$$=4-\frac{1}{x^2}=\frac{4x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{4x^2-1}{x^2}$$

k) $$\left(\frac{x-1}{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{5}{x-4}\right)\cdot 2x^2=\left(\frac{(x-1)(x-4)}{x^2(x-4)}+\frac{3x(x-4)}{x^2(x-4)}-\frac{5x^2}{x^2(x-4)}\right)\cdot 2x^2=$$

$$\left.\begin{matrix}x^2\\ x\\ x-4\end{matrix}\right\}\ \text{m.c.m}=x^2(x-4)$$

$$=\left(\frac{x^2-4x-x+4}{x^2(x-4)}+\frac{3x^2-12x}{x^2(x-4)}-\frac{5x^2}{x^2(x-4)}\right)\cdot 2x^2=\left(\frac{x^2-4x-x+4+3x^2-12x-5x^2}{x^2(x-4)}\right)\cdot 2x^2=$$

$$=\left(\frac{-x^2-17x+4}{x^2(x-4)}\right)\cdot 2x^2=\frac{\left(-x^2-17x+4\right)\cdot 2x^2}{x^2(x-4)}=\frac{\left(-x^2-17x+4\right)\cdot 2}{x-4}$$

l) $\left(\frac{1}{x}:\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{x}{2}=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x}{2}=\frac{(x+1)\cdot x}{2x}=\boxed{\frac{x+1}{2}}$

m) $\frac{2x}{x+1}:\left(\frac{2x}{x+1}-1\right)=\frac{2x}{x+1}:\left(\frac{2x}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}\right)=\frac{2x}{x+1}:\left(\frac{2x}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}\right)=\frac{2x}{x+1}:\left(\frac{2x-x-1}{x+1}\right)=$

$=\frac{2x}{x+1}:\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{2x\cdot(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\boxed{\frac{2x}{x-1}}$

n) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=\left[\left(\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=\left[\left(\frac{x^2+1}{x}\right):\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=$

$=\frac{(x^2+1)\cdot x}{x\cdot(x^2-1)}\cdot(x-1)=\frac{(x^2+1)\cdot x\cdot(x-1)}{x\cdot(x^2-1)}=\frac{(x^2+1)\cdot x\cdot(x-1)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}=\boxed{\frac{x^2+1}{x+1}}$

Volver a los enunciados

18 Calcula a y b para que se cumpla: $\frac{3x+2}{(x-1)\cdot(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$

Solución.

Realizamos la operación en la parte derecha:

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)}{(x-1)(x+2)}+\frac{b(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{ax+2a}{(x-1)(x+2)}+\frac{bx-b}{(x-1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)(x+2)}$$

Así que nos queda la siguiente igualdad:

$$\frac{3x+2}{(x-1)\cdot(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)\cdot(x+2)}$$

Fijándonos en los numeradores:

$$\begin{aligned}3&=a+b\\2&=2a-b\end{aligned}$$

Resolvemos el sistema por reducción, sumando ambas ecuaciones:

$$\begin{cases}3=a+b\\2=2a-b\end{cases}$$

$$5=3a\ \rightarrow\ a=\frac{5}{3}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$3=a+b\ \rightarrow\ 3=\frac{5}{3}+b\ \rightarrow\ b=3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$$

Volver a los enunciados

19 Calcula el polinomio p(x) que verifica: $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}=\dfrac{p(x)}{x+1}$

Solución.

Si despejamos p(x) tenemos:

$$p(x)=\frac{(x^2+4x-5)(x+1)}{x^2-1}$$

Solo nos queda simplificar esta fracción, para ello factorizamos los polinomios:

$$x^2+4x-5=(x-1)(x+5)$$

$$x^2+4x-5=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot(-5)}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{-4\pm6}{2}\begin{cases}1\\-5\end{cases}$$

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

Así tenemos:

$$p(x)=\frac{(x^2+4x-5)(x+1)}{x^2-1}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+5)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}=x+5$$

Volver a los enunciados

20 Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.:

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

b) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

c) $25x^4 - 26x^2 + 1 = 0$

d) $7x^4 + 21x^2 - 28 = 0$

e) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

f) $-x^4 + 4x^2 + 5 = 0$

g) $\dfrac{x^4 - 5x^2}{2} = -2$

h) $\dfrac{x^4}{2} = \dfrac{13x^2}{2} - 18$

i) $\dfrac{x^4 + 9}{10} = x^2$

Solución.

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

$$\begin{cases} t = x^2 \\ t^2 = x^4 \end{cases} \quad t^2 - 5t - 36 = 0 \;\rightarrow\; t = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} \dfrac{18}{2} = 9 \\ \dfrac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

$$t = 9 \xrightarrow{t=x^2} x^2 = 9 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$t = -4 \xrightarrow{t=x^2} x^2 = -4 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{-4}$$

b) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

$$\begin{cases} t = x^2 \\ t^2 = x^4 \end{cases} \quad 9t^2 - 10t + 1 = 0 \;\rightarrow\; t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{18} = \frac{10 \pm 8}{18} = \begin{cases} \dfrac{18}{18} = 1 \\ \dfrac{2}{18} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

$$t = 1 \xrightarrow{t=x^2} x^2 = 1 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$t = \frac{1}{9} \xrightarrow{t=x^2} x^2 = \frac{1}{9} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$$

c) $25x^4 - 26x^2 + 1 = 0$

$$\begin{cases} t = x^2 \\ t^2 = x^4 \end{cases} \qquad 25t^2 - 26t + 1 = 0 \;\rightarrow\; t = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{50} = \frac{26 \pm 24}{50} = \begin{cases} \dfrac{50}{50} = 1 \\ \dfrac{2}{50} = \dfrac{1}{25} \end{cases}$$

$$t = 1 \xrightarrow{t=x^2} x^2 = 1 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$t = \frac{1}{25} \xrightarrow{t=x^2} x^2 = \frac{1}{25} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{25}} = \pm\frac{1}{5}$$

d) $7x^4 + 21x^2 - 28 = 0$

$$\begin{cases} t = x^2 \\ t^2 = x^4 \end{cases} \qquad 7t^2 + 21t - 28 = 0 \;\rightarrow\; t = \frac{-21 \pm \sqrt{441 + 784}}{14} = \frac{-21 \pm 35}{14} = \begin{cases} \dfrac{14}{14} = 1 \\ \dfrac{-56}{14} = -4 \end{cases}$$

$$t = 1 \xrightarrow{t=x^2} x^2 = 1 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$t = -4 \xrightarrow{t=x^2} x^2 = -4 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{-4}$$

e) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

$$\begin{cases} t = x^2 \\ t^2 = x^4 \end{cases} \qquad t^2 - 20t + 64 = 0 \;\rightarrow\; t = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 256}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2} = \begin{cases} \dfrac{32}{2} = 16 \\ \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

$$t = 16 \xrightarrow{t=x^2} x^2 = 16 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

$$t = 4 \xrightarrow{t=x^2} x^2 = 4 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

f) $-x^4+4x^2+5=0$

$$\begin{cases} t=x^2 \\ t^2=x^4 \end{cases} \qquad -t^2+4t+5=0 \;\rightarrow\; t=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{-2}=\frac{-4\pm 6}{-2}=\begin{cases}\frac{2}{-2}=-1\\ \frac{-10}{-2}=5\end{cases}$$

$$t=-1 \xrightarrow{t=x^2} x^2=-1 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{-1}$$

$$t=5 \xrightarrow{t=x^2} x^2=5 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{5}$$

g) $\frac{x^4-5x^2}{2}=-2 \;\rightarrow\; x^4-5x^2=-4 \;\rightarrow\; x^4-5x^2+4=0$

$$\begin{cases} t=x^2 \\ t^2=x^4 \end{cases} \qquad t^2-5t+4=0 \;\rightarrow\; t=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{8}{2}=4\\ \frac{2}{2}=1\end{cases}$$

$$t=4 \xrightarrow{t=x^2} x^2=4 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

$$t=1 \xrightarrow{t=x^2} x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

h) $\frac{x^4}{2}=\frac{13x^2}{2}-18 \;\rightarrow\; \frac{x^4}{2}=\frac{13x^2}{2}-\frac{36}{2} \;\rightarrow\; x^4=13x^2-36 \;\rightarrow\; x^4-13x^2+36=0$

$$\begin{cases} t=x^2 \\ t^2=x^4 \end{cases} \qquad t^2-13t+36=0 \;\rightarrow\; t=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\frac{13\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{18}{2}=9\\ \frac{8}{2}=4\end{cases}$$

$$t=9 \xrightarrow{t=x^2} x^2=9 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

$$t=4 \xrightarrow{t=x^2} x^2=4 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

i) $\dfrac{x^4+9}{10}=x^2 \rightarrow x^4+9=10x^2 \rightarrow x^4-10x^2+9=0$

$$\begin{cases} t=x^2 \\ t^2=x^4 \end{cases} \qquad t^2-10t+9=0 \rightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}=\begin{cases}\dfrac{18}{2}=9 \\ \dfrac{2}{2}=1\end{cases}$$

$$t=9 \xrightarrow{t=x^2} x^2=9 \rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

$$t=1 \xrightarrow{t=x^2} x^2=1 \rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Volver a los enunciados

21 Resuelve las siguientes ecuaciones con raíces:

a) $x+1-\sqrt{5x+1}=0$

b) $x+\sqrt{7-3x}=1$

c) $\sqrt{x^2+7}=2x+2$

d) $2-\sqrt{4x-5}=2x$

e) $2-\sqrt{x-3}=x-7$

f) $\sqrt{x^2-7}=\frac{x}{2}-1$

g) $3\sqrt{x-1}+11=2x$

h) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6$

i) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-5}=2$

j) $x+\sqrt{x}=\sqrt{3x+x^2}$

Solución.

a) $x=0$ y $x=3$

b) $x=-3$ y $\cancel{x=2}$

c) $\cancel{x=-3}$ y $x=\frac{1}{3}$

d) $\cancel{x=\frac{3}{2}}$

e) $x=7$ y $\cancel{x=12}$

f) $\cancel{x=-4}$ y $x=\frac{8}{3}$

g) $\cancel{x=\frac{13}{4}}$ y $x=10$

h) $x=5$ y $\cancel{x=221}$

i) $x=14$ y $x=6$

j) $x=0$ y $x=1$

Volver a los enunciados

22 Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas:

f) $\dfrac{x-1}{x}+x=1$ c) $\dfrac{x-3}{x}+\dfrac{x+3}{x^2}=\dfrac{2}{3}$ e) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2-5x}{x^2+3x}$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x}=22$ d) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{1}{4}=1$ f) $\dfrac{2x+3}{2x-1}-\dfrac{1}{x}=4$

Solución.

a) $\dfrac{x-1}{x}+x=1 \;\rightarrow\; \dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x^2}{x}=\dfrac{x}{x} \;\rightarrow\; x-1+x^2=x \;\rightarrow\; x^2-1=0$

$x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm 1$

b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x}=22 \;\rightarrow\; \dfrac{6}{6x}+\dfrac{3}{6x}+\dfrac{2}{6x}=\dfrac{132x}{6x} \;\rightarrow\; 11=132x$

$\rightarrow x=\dfrac{11}{132}=\dfrac{1}{12}$

c) $\dfrac{x-3}{x}+\dfrac{x+3}{x^2}=\dfrac{2}{3} \;\rightarrow\; \dfrac{3x(x-3)}{3x^2}+\dfrac{3(x+3)}{3x^2}=\dfrac{2x^2}{3x^2} \;\rightarrow\; 3x(x-3)+3(x+3)=2x^2$

$3x^2-9x+3x+9=2x^2 \;\rightarrow\; x^2-6x+9=0$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 9}}{2}=\frac{6\pm 0}{2}=\frac{6}{2}=3$$

d) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{1}{4}=1 \;\rightarrow\; \dfrac{4(x-1)}{4(x+1)}+\dfrac{x+1}{4(x+1)}=\dfrac{4(x+1)}{4(x+1)} \;\rightarrow\; 4(x-1)+x+1=4(x+1)$

$4x-4+x+1=4x+4 \;\rightarrow\; x=7$

e) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2-5x}{x^2+3x} \;\rightarrow\; \dfrac{x}{x(x+3)}-\dfrac{2(x+3)}{x(x+3)}=\dfrac{2-5x}{x(x+3)} \;\rightarrow\; x-2(x+3)=2-5x$

$x-2(x+3)=2-5x \;\rightarrow\; x-2x-6=2-5x \;\rightarrow\; 4x=8 \;\rightarrow\; x=2$

f) $\frac{2x+3}{2x-1}-\frac{1}{x}=4 \rightarrow \frac{x(2x+3)}{x(2x-1)}-\frac{2x-1}{x(2x-1)}=\frac{4x(2x-1)}{x(2x-1)}$

$x(2x+3)-(2x-1)=4x(2x-1) \rightarrow 2x^2+3x-2x+1=8x^2-4x$

$-6x^2+5x+1=0 \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot1\cdot(-6)}}{-12}=\frac{-5\pm7}{-12}=\begin{cases}\frac{-5+7}{-12}=\frac{-1}{6}\\ \frac{-5-7}{-12}=1\end{cases}$

Volver a los enunciados

23 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $4^x = 64$

b) $3^{-x} = 9$

c) $5^x = \frac{1}{125}$

d) $2^{x+1} = 0{,}25$

e) $5^x \cdot 5^{2x+1} = 125$

f) $2^{x+1} - 2^{x-1} = 12$

g) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

h) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

i) $9^x + 3^{x+1} - 108 = 0$

j) $5^{2x+1} + 3 \cdot 5^{2x+3} = \frac{76}{5}$

Solución.

a) $4^x = 64 \rightarrow 4^x = 4^3 \rightarrow x = 3$

b) $3^{-x} = 9 \rightarrow 3^{-x} = 3^2 \rightarrow -x = 2 \rightarrow x = -2$

c) $5^x = \frac{1}{125} \rightarrow 5^x = \frac{1}{5^3} = 5^{-3} \rightarrow x = -3$

d) $2^{x+1} = 0{,}25 \rightarrow 2^{x+1} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2} \rightarrow x + 1 = -2 \rightarrow x = -3$

e) $5^x \cdot 5^{2x+1} = 125$

Usando propiedades de las potencias en el primer miembro:

$$5^{x+2x+1} = 5^3 \rightarrow x + 2x + 1 = 3 \rightarrow 3x + 1 = 3 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

f) $2^{x+1} - 2^{x-1} = 12$

Usando propiedades de las potencias en el primer miembro:

$$2^x \cdot 2 - \frac{2^x}{2} = 12$$

Usamos el cambio de variable: $t = 2^x$

$$2t-\frac{t}{2}=12 \rightarrow \frac{4t}{2}-\frac{t}{2}=\frac{24}{2} \rightarrow 4t-t=24 \rightarrow 3t=24 \rightarrow t=8$$

Finalmente, deshacemos el cambio de variable:

$$t=2^x \rightarrow 8=2^x \rightarrow 2^3=2^x \rightarrow 3=x$$

g) $2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=7$

Usando propiedades de las potencias en el primer miembro:

$$\frac{2^x}{2}+2^x+2^x\cdot 2=7$$

Usamos el cambio de variable: $t=2^x$

$$\frac{t}{2}+t+2t=7 \rightarrow \frac{t}{2}+\frac{2t}{2}+\frac{4t}{2}=\frac{14}{2} \rightarrow t+2t+4t=14 \rightarrow 7t=14 \rightarrow t=2$$

Finalmente, deshacemos el cambio de variable:

$$t=2^x \rightarrow 2=2^x \rightarrow 2^1=2^x \rightarrow 1=x$$

h) $5^{2x}-6\cdot 5^x+5=0$

Usando propiedades de las potencias en el primer miembro:

$$\left(5^x\right)^2-6\cdot 5^x+5=0$$

Usamos el cambio de variable: $t=5^x$

$$t^2-6t+5=0 \rightarrow t=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{10}{2}=5\\ \frac{2}{2}=1\end{cases}$$

Finalmente, deshacemos el cambio de variable:

$$t=5^x \rightarrow 5=5^x \rightarrow 5^1=5^x \rightarrow 1=x$$
$$t=5^x \rightarrow 1=5^x \rightarrow 5^0=5^x \rightarrow 0=x$$

i) $9^x + 3^{x+1} - 108 = 0$

Usando propiedades de las potencias en el primer miembro:

$$\left(3^2\right)^x + 3^x \cdot 3 - 108 = 0 \rightarrow 3^{2x} + 3^x \cdot 3 - 108 = 0 \rightarrow \left(3^x\right)^2 + 3^x \cdot 3 - 108 = 0$$

Usamos el cambio de variable: $t = 3^x$

$$t^2 + 3t - 108 = 0 \rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 432}}{2} = \frac{-3 \pm 21}{2} = \begin{cases} \frac{18}{2} = 9 \\ \frac{-24}{2} = -12 \end{cases}$$

Finalmente, deshacemos el cambio de variable:

$$t = 3^x \rightarrow 9 = 3^x \rightarrow 3^2 = 3^x \rightarrow 2 = x$$

$$t = 3^x \rightarrow -12 = 3^x \quad \text{Sin solución}$$

j) $5^{2x+1} + 3 \cdot 5^{2x+3} = \frac{76}{5}$

Usando propiedades de las potencias en el primer miembro:

$$5^{2x} \cdot 5 + 3 \cdot 5^{2x} \cdot 5^3 = \frac{76}{5} \rightarrow \left(5^x\right)^2 \cdot 5 + 3 \cdot \left(5^x\right)^2 \cdot 5^3 = \frac{76}{5}$$

$$\rightarrow \left(5^x\right)^2 \cdot 5 + 3 \cdot \left(5^x\right)^2 \cdot 5^3 = \frac{76}{5} \rightarrow 5 \cdot \left(5^x\right)^2 + 375 \cdot \left(5^x\right)^2 = \frac{76}{5}$$

Usamos el cambio de variable: $t = 5^x$

$$5t^2 + 375t^2 = \frac{76}{5} \rightarrow 380t^2 = \frac{76}{5} \rightarrow t^2 = \frac{76}{5 \cdot 380} = \frac{1}{25} \rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{1}{25}} = \pm\frac{1}{5}$$

Finalmente, deshacemos el cambio de variable:

$$t = 5^x \rightarrow \frac{1}{5} = 5^x \rightarrow 5^{-1} = 5^x \rightarrow -1 = x$$

$$t = 5^x \rightarrow \frac{-1}{5} = 5^x \quad \text{Sin solución}$$

Volver a los enunciados

24 Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $3 = \log(4x)$

b) $-1 = \log(x+3)$

c) $\log_4\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{1}{2}$

d) $\ln(x-1) = 3$

e) $1 = \log_4 2 + \log_4(3+x)$

f) $\log_3(4x) = 1 - \log_3(3x)$

g) $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = 3$

h) $\log_6(2x-3) = \log_6 12 - \log_6 3$

i) $\log(3x+2) + \log(x+2) = \log(7x+6)$

j) $2\log_3(x+3) - \log_3(x+1) = 3\log_3 2$

Solución.

a) $3 = \log(4x)$

Usando la definición de logaritmo:

$$3 = \log(4x) \rightarrow 10^3 = 4x \rightarrow x = \frac{1000}{4} = 250$$

b) $-1 = \log(x+3)$

Usando la definición de logaritmo:

$$-1 = \log(x+3) \rightarrow 10^{-1} = x+3 \rightarrow \frac{1}{10} - 3 = x \rightarrow x = \frac{-29}{10}$$

c) $\log_4\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{1}{2}$

Usando la definición de logaritmo:

$$\log_4\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow 4^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{5} \rightarrow \sqrt{4} = \frac{x}{5} \rightarrow 2 = \frac{x}{5} \rightarrow x = 10$$

d) $\ln(x-1)=3$

Usando la definición de logaritmo:

$$\ln(x-1)=3 \;\rightarrow\; e^{3}=x-1 \;\rightarrow\; x=e^{3}+1\approx 21{,}09$$

e) $1=\log_4 2+\log_4(3+x)$

Usando las propiedades del logaritmo en el segundo miembro:

$$1=\log_4 2+\log_4(3+x) \;\rightarrow\; 1=\log_4 2(3+x) \;\rightarrow\; 1=\log_4(6+2x)$$

Ahora usamos la definición de logaritmo:

$$1=\log_4(6+2x) \;\rightarrow\; 4^{1}=6+2x \;\rightarrow\; 4-6=2x \;\rightarrow\; -2=2x \;\rightarrow\; x=-1$$

f) $\log_3(4x)=1-\log_3(3x)$

Primero colocamos los logaritmos en el mismo miembro para usar las propiedades:

$$\log_3(4x)=1-\log_3(3x) \;\rightarrow\; \log_3(4x)+\log_3(3x)=1 \;\rightarrow\; \log_3(4x\cdot 3x)=1$$

Ahora usamos la definición de logaritmo:

$$\log_3\left(12x^{2}\right)=1 \rightarrow\; 3^{1}=12x^{2} \;\rightarrow\; x^{2}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4} \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$$

IMPORTANTE:

$x=-\frac{1}{2}$ no es una solución válida porque $4x=-2$ y no podemos calcular $\log_3(4x)$ porque no podemos calcular logaritmos de números negativos.

g) $\log_2(x+1)-\log_2(x-1)=3$

Usando las propiedades de los logaritmos:

$$\log_2(x+1)-\log_2(x-1)=3 \;\rightarrow\; \log_2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=3$$

Ahora usamos la definición de logaritmo:

$$\log_2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=3 \;\rightarrow\; \frac{x+1}{x-1}=2^3 \;\rightarrow\; \frac{x+1}{x-1}=8 \;\rightarrow\; x+1=8\cdot(x-1)$$

$$x+1=8\cdot(x-1) \;\rightarrow\; x+1=8x-8 \;\rightarrow\; x-8x=-8-1 \;\rightarrow\; -7x=-9 \;\rightarrow\; x=\frac{9}{7}$$

h) $\log_6(2x-3)=\log_6 12-\log_6 3$

Usando las propiedades del logaritmo en el segundo miembro de la ecuación:

$$\log_6(2x-3)=\log_6 12-\log_6 3 \;\rightarrow\; \log_6(2x-3)=\log_6\frac{12}{3}$$

Sacamos los logaritmos:

$$\log_6(2x-3)=\log_6\frac{12}{3} \;\rightarrow\; 2x-3=4 \;\rightarrow\; 2x=7 \;\rightarrow\; x=\frac{7}{2}$$

i) $\log(3x+2)+\log(x+2)=\log(7x+6)$

Usando las propiedades de los logaritmos en la primera parte de la ecuación:

$$\log(3x+2)+\log(x+2)=\log(7x+6) \;\rightarrow\; \log(3x+2)\cdot(x+2)=\log(7x+6)$$

Sacamos los logaritmos:

$$\log(3x+2)\cdot(x+2)=\log(7x+6) \;\rightarrow\; (3x+2)\cdot(x+2)=7x+6$$

$$\rightarrow\; 3x^2+6x+2x+4=7x+6 \;\rightarrow\; 3x^2+x-2=0$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot2\cdot3}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{-1\pm5}{6}=\begin{cases}\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\\ \frac{-6}{6}=-1\end{cases}$$

IMPORTANTE:

$x=-1$ no es una solución valida porque $3x+2=-1$ y no podemos calcular $\log(3x+2)$ porque no podemos calcular el logaritmo de un número negativo.

j) $2\log_3(x+3)-\log_3(x+1)=3\log_3 2$

Usando las propiedades de los logaritmos en los dos miembros de la ecuación:

$$2\log_3(x+3)-\log_3(x+1)=3\log_3 2 \rightarrow \log_3(x+3)^2-\log_3(x+1)=\log_3 2^3$$

$$\rightarrow \log_3\frac{(x+3)^2}{x+1}=\log_3 2^3 \rightarrow \log_3\frac{x^2+6x+9}{x+1}=\log_3 8$$

Eliminamos los logaritmos:

$$\frac{x^2+6x+9}{x+1}=8 \rightarrow x^2+6x+9=8(x+1) \rightarrow x^2+6x+9=8x+8$$

$$\rightarrow x^2-2x+1=0 \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Volver a los enunciados