LOGARITMOS

1 Calcula los siguientes logaritmos usando la definición:

a) $\log_2 0{,}125$ c) $\log_3 \frac{2}{54}$ e) $\log_{16} 2$ g) $\log_{16} 64$

b) $\log_3 0{,}333\ldots$ d) $\log 0{,}00001$ f) $\log_{64} 2$ h) $\log_4 \sqrt{2}$

Solución.

2 Realiza las siguientes operaciones calculando previamente cada uno de los logaritmos usando la definición:

a) $\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_9 \frac{1}{3} + \log 0{,}001 - \log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4} =$ b) $\log_3 \frac{1}{81} - 3\log_4 2 + \ln\sqrt[3]{e^2} - \log_{\frac{1}{2}} 32 =$

Solución.

3 Calcula el valor de x, utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_x \frac{1}{4} = 2$ c) $\log x^2 = -2$ e) $\ln\sqrt[3]{\frac{1}{e}} = x$ g) $\log_x 16 = \frac{1}{2}$

b) $\log_x 4 = \frac{-1}{2}$ d) $\log\left(\frac{x}{x-1}\right) = 2$ f) $\log_{\frac{1}{x}} 27 = 3$ h) $\log_2 \frac{1}{8} = x$

Solución.

4 Utiliza la definición y las propiedades de los logaritmos para:

a) Reducir a un solo logaritmo y calcular: $\log 40 + \log 25$

b) Calcular $\log 8$ sabiendo que $\log 2 = 0{,}301$.

Solución.

5 Sabiendo que $\log_2 A = 1{,}9$, $\log_2 B = -2{,}3$ y $\log_2 C = -3{,}2$ calcular:

a) $\log_2 \dfrac{A^2}{0{,}5 \cdot \sqrt{B}}$

c) $\log_2 \dfrac{8A^2}{B^7}$

e) $\log_2 \dfrac{A}{\sqrt{B} \cdot C^2}$

b) $\log_2 \left(\dfrac{A}{B^{-1}}\right)^2$

d) $\log_2 \sqrt[3]{\dfrac{B^{-3}}{16 \cdot A}}$

f) $\log_2 \left(32 \cdot A \cdot B^3\right)^2$

Solución.

6 Emplea la fórmula del cambio de base para calcular los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 2$

c) $\log_3 32$

e) $\log_2 30$

b) $\log_2 9$

d) $\log_2 10$

f) $\log_8 2$

Solución.

7 Reduce a un solo logaritmo cada una de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{1}{5}\log A - 2\log C + \dfrac{1}{2}\log B$

d) $\dfrac{2}{3}\log A - 4\log B + 3$

b) $\dfrac{2}{3}\log A - \dfrac{1}{2}\log C + \dfrac{1}{3}\log B^2$

e) $\dfrac{-\log A}{2} - 3\log B^2$

c) $\dfrac{\ln A^{-3}}{2} + 3\ln B$

f) $4\log_2 A^{\frac{-1}{2}} - \dfrac{3}{5}\log_2 B + 1$

Solución.

1 Calcula los siguientes logaritmos de forma razonada:

a) $\log_2 0{,}125$

b) $\log_3 0{,}333\ldots$

c) $\log_3 \frac{2}{54}$

d) $\log 0{,}00001$

e) $\log_{16} 2$

f) $\log_{64} 2$

g) $\log_{16} 64$

h) $\log_4 \sqrt{2}$

Solución.

a) $\log_2 0{,}125$

$$2^x = 0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3} \quad \rightarrow \quad \log_2 0{,}125 = -3$$

b) $\log_3 0{,}333\ldots$

$$3^x = 0{,}\widehat{3} = \frac{3-0}{9} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \quad \rightarrow \quad \log_3 0{,}333\ldots = -1$$

c) $\log_3 \frac{2}{54}$

$$3^x = \frac{2}{54} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3} \quad \rightarrow \quad \log_3 \frac{2}{54} = -3$$

d) $\log 0{,}00001$

$$10^x = 0{,}00001 = \frac{1}{100000} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5} \quad \rightarrow \quad \log 0{,}00001 = -5$$

e) $\log_{16} 2$

$$16^x = 2 \rightarrow \left(2^4\right)^x = 2 \rightarrow 2^{4x} = 2^1 \rightarrow 4x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \log_{16} 2 = \frac{1}{4}$$

f) $\log_{64} 2$

$$64^x = 2 \rightarrow \left(2^6\right)^x = 2 \rightarrow 2^{6x} = 2 \rightarrow 6x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{6} \quad \rightarrow \boxed{\log_{64} 2 = \frac{1}{6}}$$

g) $\log_{16} 64$

$$16^x = 64 \rightarrow \left(4^2\right)^x = 4^3 \rightarrow 4^{2x} = 4^3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \boxed{\log_{16} 64 = \frac{3}{2}}$$

h) $\log_4 \sqrt{2}$

$$4^x = \sqrt{2} \rightarrow \left(2^2\right)^x = 2^{\frac{1}{2}} \rightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{1}{2}} \rightarrow 2x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \boxed{\log_4 \sqrt{2} = \frac{1}{4}}$$

Volver a los enunciados

2 Realiza las siguientes operaciones calculando previamente cada uno de los logaritmos usando la definición:

a) $\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_9 \frac{1}{3} + \log 0{,}001 - \log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4} =$

b) $\log_3 \frac{1}{81} - 3\log_4 2 + \ln\sqrt[3]{e^2} - \log_{\frac{1}{2}} 32 =$

Solución.

a) $\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_9 \frac{1}{3} + \log 0{,}001 - \log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$

Calcularemos los cuatro logaritmos de forma independiente y luego realizamos la operación:

- $\log_{\frac{1}{3}} 27$

  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 \rightarrow \left(3^{-1}\right)^x = 3^3 \rightarrow 3^{-x} = 3^3 \rightarrow -x = 3 \rightarrow x = -3 \quad \rightarrow \quad \log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$

- $\log_9 \frac{1}{3}$

  $9^x = \frac{1}{3} \rightarrow \left(3^2\right)^x = 3^{-1} \rightarrow 3^{2x} = 3^{-1} \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad \log_9 \frac{1}{3} = \frac{-1}{2}$

- $\log\ 0{,}001$

  $10^x = 0{,}001 \rightarrow 10^x = 10^{-3} \rightarrow \quad x = -3 \quad \rightarrow \quad \log\ 0{,}001 = -3$

- $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$

  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \rightarrow x = -2 \rightarrow \log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4} = -2$

Entonces:

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_9 \frac{1}{3} + \log 0{,}001 - \log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4} = -3 - \frac{1}{2} - 3 + 2 = \frac{-9}{2}$$

b) $\log_3 \frac{1}{81} - 3\log_4 2 + \ln\sqrt[3]{e^2} - \log_{\frac{1}{2}} 32 =$

Calcularemos los cuatro logaritmos de forma independiente y luego realizamos la operación:

- $\log_3 \frac{1}{81}$

  $3^x = \frac{1}{81} \rightarrow 3^x = \frac{1}{3^4} \rightarrow 3^x = 3^{-4} \rightarrow x = -4 \rightarrow \log_3 \frac{1}{81} = -4$

- $\log_4 2$

  $4^x = 2 \rightarrow (2^2)^x = 2 \rightarrow 2^{2x} = 2 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

- $\ln\sqrt[3]{e^2}$

  $e^x = \sqrt[3]{e^2} \rightarrow e^x = e^{\frac{2}{3}} \rightarrow x = \frac{2}{3} \rightarrow \ln\sqrt[3]{e^2} = \frac{2}{3}$

- $\log_{\frac{1}{2}} 32$

  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32 \rightarrow (2^{-1})^x = 2^5 \rightarrow 2^{-x} = 2^5 \rightarrow -x = 5 \rightarrow x = -5 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$

Entonces:

$$\log_3 \frac{1}{81} - 3\log_4 2 + \ln\sqrt[3]{e^2} - \log_{\frac{1}{2}} 32 = -4 - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + 5 = \frac{1}{6}$$

Volver a los enunciados

3 Calcula el valor de x, utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_x \frac{1}{4} = 2$ c) $\log x^2 = -2$ e) $\ln\sqrt[3]{\frac{1}{e}} = x$ g) $\log_x 16 = \frac{1}{2}$

b) $\log_x 4 = \frac{-1}{2}$ d) $\log\left(\frac{x}{x-1}\right) = 2$ f) $\log_{\frac{1}{x}} 27 = 3$ h) $\log_2 \frac{1}{8} = x$

Solución.

a) $\log_x \frac{1}{4} = 2 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Intercambiamos la raíz y el 4.

b) $\log_x 4 = \frac{-1}{2} \rightarrow x^{\frac{-1}{2}} = 4 \rightarrow \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 4 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 4 \rightarrow \frac{1}{4} = \sqrt{x} \rightarrow$

$\rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 = (\sqrt{x})^2 \rightarrow \frac{1}{16} = x$

En este caso las dos soluciones son válidas

c) $\log x^2 = -2 \rightarrow 10^{-2} = x^2 \rightarrow \frac{1}{10^2} = x^2 \rightarrow \frac{1}{100} = x^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{100}} = \pm\frac{1}{10}$

d) $\log\left(\frac{x}{x-1}\right) = 2 \rightarrow 10^2 = \frac{x}{x-1} \rightarrow 100(x-1) = x \rightarrow 100x - 100 = x \rightarrow$

$\rightarrow 99x = 100 \rightarrow x = \frac{100}{99}$

e) $\ln\sqrt[3]{\frac{1}{e}} = x \rightarrow e^x = \sqrt[3]{\frac{1}{e}} \rightarrow e^x = e^{\frac{-1}{3}} \rightarrow x = \frac{-1}{3}$

f) $\log_{\frac{1}{x}} 27 = 3 \rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^3 = 27 \rightarrow \frac{1}{x^3} = 27 \rightarrow \frac{1}{27} = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

g) $\log_x 16 = \frac{1}{2} \rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 16 \rightarrow \sqrt{x} = 16 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = 16^2 \rightarrow x = 256$

h) $\log_2 \frac{1}{8} = x \rightarrow 2^x = \frac{1}{8} \rightarrow 2^x = \frac{1}{2^3} \rightarrow 2^x = 2^{-3} \rightarrow x = -3$

Volver a los enunciados

4 Utiliza la definición y las propiedades de los logaritmos para:

a) Reducir a un solo logaritmo y calcular: $\log 40 + \log 25$

b) Calcular $\log 8$ sabiendo que $\log 2 = 0{,}301$.

Solución.

a) Usando la propiedad del producto tenemos que:

$$\log 40 + \log 25 = \log 40 \cdot 25 = \log 1000 = 3$$

b) Si factorizamos 8 y utilizamos la propiedad de la potencia tenemos que:

$$\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2 = 3 \cdot 0{,}301 = 0{,}903$$

Volver a los enunciados

5 Sabiendo que $\log_2 A = 1{,}9$, $\log_2 B = -2{,}3$ y $\log_2 C = -3{,}2$ calcular:

a) $\log_2 \dfrac{A^2}{0{,}5\cdot\sqrt{B}}$

b) $\log_2\left(\dfrac{A}{B^{-1}}\right)^2$

c) $\log_2 \dfrac{8A^2}{B^7}$

d) $\log_2 \sqrt[3]{\dfrac{B^{-3}}{16\cdot A}}$

e) $\log_2 \dfrac{A}{\sqrt{B}\cdot C^2}$

f) $\log_2\left(32\cdot A\cdot B^3\right)^2$

Solución.

a) $\log_2 \dfrac{A^2}{0{,}5\cdot\sqrt{B}} = \log_2 \dfrac{A^2}{0{,}5\cdot B^{\frac{1}{2}}} = \log_2 A^2 - \log_2 0{,}5\cdot B^{\frac{1}{2}} = \log_2 A^2 - \left(\log_2 0{,}5 + \log B^{\frac{1}{2}}\right) =$

$= 2\log_2 A - \left(\log_2 0{,}5 + \dfrac{1}{2}\log B\right) = 2\cdot 1{,}9 - \left[-1 + \dfrac{1}{2}\cdot(-2{,}3)\right] = 5{,}95$

b) $\log_2\left(\dfrac{A}{B^{-1}}\right)^2 = \log_2 \dfrac{A^2}{B^{-2}} = \log_2 A^2 - \log_2 B^{-2} = 2\log_2 A + 2\log_2 B = 2\cdot 1{,}9 + 2\cdot(-2{,}3) = -0{,}8$

c) $\log_2 \dfrac{8A^2}{B^7} = \log_2 8A^2 - \log_2 B^7 = \log_2 8 + \log_2 A^2 - \log_2 B^7 = \log_2 8 + 2\log_2 A - 7\log_2 B =$

$= 3 + 2\cdot 1{,}9 - 7\cdot(-2{,}3) = 22{,}9$

d) $\log_2 \sqrt[3]{\dfrac{B^{-3}}{16\cdot A}} = \log_2 \dfrac{B^{-1}}{16^{\frac{1}{3}}\cdot A^{\frac{1}{3}}} = \log_2 B^{-1} - \log_2 16^{\frac{1}{3}}\cdot A^{\frac{1}{3}} = \log_2 B^{-1} - \left(\log_2 16^{\frac{1}{3}} + \log_2 A^{\frac{1}{3}}\right) =$

$= -\log_2 B - \left(\dfrac{1}{3}\log_2 16 + \dfrac{1}{3}\log_2 A\right) = -(-2{,}3) - \left(\dfrac{1}{3}\cdot 4 + \dfrac{1}{3}\cdot 1{,}9\right) = \dfrac{1}{3} = 0{,}\widehat{3}$

e) $\log_2 \dfrac{A}{\sqrt{B}\cdot C^2} = \log_2 \dfrac{A}{B^{\frac{1}{2}}\cdot C^2} = \log_2 A - \log_2 B^{\frac{1}{2}}\cdot C^2 = \log_2 A - \left(\log_2 B^{\frac{1}{2}} + \log_2 C^2\right) =$

$= \log_2 A - \left(\dfrac{1}{2}\log_2 B + 2\log_2 C\right) = 1{,}9 - \left[\dfrac{1}{2}\cdot(-2{,}3) + 2\cdot(-3{,}2)\right] = 9{,}45$

f) $\log_2 \left(32\cdot A\cdot B^3\right)^2 = \log_2 32^2\cdot A^2\cdot B^6 = \log_2 32^2 + \log_2 A^2 + \log_2 B^6 =$

$= 2\log_2 32 + 2\log_2 A + 6\log_2 B = 2\cdot 5 + 2\cdot 1{,}9 + 6\cdot(-2{,}3) = 0$

Volver a los enunciados

6 Emplea la fórmula del cambio de base para calcular los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 2$ c) $\log_3 32$ e) $\log_2 30$

b) $\log_2 9$ d) $\log_2 10$ f) $\log_8 2$

Solución.

a) $\log_3 2 = \dfrac{\log 2}{\log 3} = 0{,}631$

b) $\log_2 9 = \dfrac{\log 9}{\log 2} = 3{,}17$

c) $\log_2 32 = \dfrac{\log 32}{\log 2} = 3{,}155$

d) $\log_2 10 = \dfrac{\log 10}{\log 2} = 3{,}322$

e) $\log_2 30 = \dfrac{\log 30}{\log 2} = 4{,}907$

f) $\log_8 2 = \dfrac{\log 2}{\log 8} = \dfrac{1}{3} = 0{,}\widehat{3}$

NOTA: En todos los casos se ha redondeado a tres cifras decimales.

Volver a los enunciados

7 Reduce a un solo logaritmo cada una de las siguientes expresiones:

a) $\frac{1}{5}\log A - 2\log C + \frac{1}{2}\log B$

b) $\frac{2}{3}\log A - \frac{1}{2}\log C + \frac{1}{3}\log B^2$

c) $\frac{\ln A^{-3}}{2} + 3\ln B$

d) $\frac{2}{3}\log A - 4\log B + 3$

e) $\frac{-\log A}{2} - 3\log B^2$

f) $4\log_2 A^{\frac{-1}{2}} - \frac{3}{5}\log_2 B + 1$

Solución.

a) $\frac{1}{5}\log A - 2\log C + \frac{1}{2}\log B = \log A^{\frac{1}{5}} - \log C^2 + \log B^{\frac{1}{2}} = \log \frac{A^{\frac{1}{5}}}{C^2} + \log B^{\frac{1}{2}} =$

$= \log \frac{A^{\frac{1}{5}}}{C^2} \cdot B^{\frac{1}{2}} = \log \frac{\sqrt[5]{A} \cdot \sqrt{B}}{C^2}$

b) $\frac{2}{3}\log A - \frac{1}{2}\log C + \frac{1}{3}\log B^2 = \log A^{\frac{2}{3}} - \log C^{\frac{1}{2}} + \log B^{\frac{2}{3}} = \log \frac{A^{\frac{2}{3}}}{C^{\frac{1}{2}}} + \log B^{\frac{2}{3}} =$

$= \log \frac{A^{\frac{2}{3}}}{C^{\frac{1}{2}}} \cdot B^{\frac{2}{3}} = \log \frac{\sqrt[3]{A^2} \cdot \sqrt[3]{B^2}}{\sqrt{C}} = \log \frac{\sqrt[3]{A^2 \cdot B^2}}{\sqrt{C}}$

c) $\frac{\ln A^{-3}}{2} + 3\ln B = \frac{1}{2}\ln A^{-3} + 3\ln B = \ln A^{\frac{-3}{2}} + \ln B^3 = \ln A^{\frac{-3}{2}} \cdot B^3 = \ln \frac{B^3}{A^{\frac{3}{2}}} = \ln \frac{B^3}{\sqrt{A^3}}$

Reescribimos el primer sumando

d) $\frac{2}{3}\log A - 4\log B + 3 = \frac{2}{3}\log A - 4\log B + \log 1000 = \log A^{\frac{2}{3}} - \log B^4 + \log 1000 =$

Escribimos 3 como logaritmo en base 10

$= \log A^{\frac{2}{3}} - \log B^4 + \log 1000 = \log \frac{A^{\frac{2}{3}}}{B^4} + \log 1000 = \log \frac{A^{\frac{2}{3}}}{B^4} \cdot 1000 = \log \frac{1000\sqrt[3]{A^2}}{B^4}$

Reescribimos el primer sumando

e) $\dfrac{-\log A}{2} - 3\log B^2 = \dfrac{-1}{2}\log A - 3\log B^2 = \log A^{\frac{-1}{2}} - \log B^6 = \log \dfrac{A^{\frac{-1}{2}}}{B^6} = \log \dfrac{1}{A^{\frac{1}{2}} \cdot B^6} =$

$= \log \dfrac{1}{\sqrt{A} \cdot B^6}$

Escribimos 1 como logaritmo en base 2

f) $4\log_2 A^{\frac{-1}{2}} - \dfrac{3}{5}\log_2 B + 1 = 4\log_2 A^{\frac{-1}{2}} - \dfrac{3}{5}\log_2 B + \log_2 2 = \log_2 A^{\frac{-4}{2}} - \log_2 B^{\frac{3}{5}} + \log_2 2 =$

$= \log_2 \dfrac{A^{-2}}{B^{\frac{3}{5}}} + \log_2 2 = \log_2 \dfrac{A^{-2}}{B^{\frac{3}{5}}} \cdot 2 = \log_2 \dfrac{2}{A^2 \cdot B^{\frac{3}{5}}} = \log_2 \dfrac{2}{A^2 \cdot \sqrt[5]{B^3}}$

Volver a los enunciados