1. El 70% de empresas tiene errores en sus activos financieros, el 60% tiene errores en sus pasivos financieros y el 40% tiene errores en sus activos y en sus pasivos financieros. Obtén razonadamente el porcentaje de empresas sin errores en sus activos, en sus pasivos o en ambos. De una muestra de 500 empresas, ¿cuántas se espera que no tengan errores ni en sus activos ni en sus pasivos financieros?

Solución

Llamemos A al suceso "tener errores en los activos financieros" y B al suceso "tener errores en los pasivos financieros". Entonces, según el enunciado, $P(A)=0,7$; $P(B)=0,6$ y $P(A\cap B)=0,4$.

El suceso "no tener errores en los activos financieros" es $\overline{A}$. Entonces:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,7=0,3$$

lo que significa un porcentaje del 30%.

El suceso "no tener errores en los pasivos financieros" es $\overline{B}$. Entonces:

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,6=0,4$$

lo que significa un porcentaje del 40%.

El suceso "no tener errores en ambos" equivale a "no tener errores en los activos financieros y no tener errores en los pasivos financieros", es decir, $\overline{A}\cap\overline{B}$. Pero, por las leyes de Morgan, $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$.

Entonces:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)=$$

$$=1-(0,7+0,6-0,4)=1-0,9=0,1$$

lo que significa un porcentaje del 10%.

Según lo anterior se espera que un 10% de las empresas no tengan errores ni en sus activos ni en sus pasivos financieros. Si tenemos una muestra de 500 empresas podemos esperar que $500\cdot\frac{10}{100}=50$ empresas no tengan errores ni en sus activos ni en sus pasivos financieros.

2. Un jugador de fútbol, especialista en lanzar penaltis, mete 4 de cada 5 que tira. Para los próximos tres penaltis se consideran los siguientes sucesos: $A=\{\text{mete sólo uno de ellos}\}$, $B=\{\text{mete dos de los tres}\}$ y $C=\{\text{mete el primero}\}$. Halla la probabilidad de los sucesos $A\cup B$, $A\cap C$ y $B\cap C$.

Solución

Llamemos M al suceso "meter penalti". Entonces $P(M)=\frac{4}{5}$ y, por tanto, $P(\overline{M})=\frac{1}{5}$.

Observemos que el suceso A es equivalente a "meter el primero y no meter el segundo y no meter el tercero, o bien no meter el primero y meter el segundo y no meter el tercero, o bien no meter el primero y no meter el segundo y meter el tercero", que simbólicamente podemos escribir así:

$$A=\left(M_1\cap\overline{M_2}\cap\overline{M_3}\right)\cup\left(\overline{M_1}\cap M_2\cap\overline{M_3}\right)\cup\left(\overline{M_1}\cap\overline{M_2}\cap M_3\right)$$

Los subíndices indican el número del penalti lanzado. Observemos también que cada uno de los sucesos que van entre paréntesis son <u>incompatibles</u> dos a dos, es decir, no es posible que ocurra simultáneamente "meter el primer penalti y no los dos siguientes" y "no meter los dos primeros y meter el tercero", por ejemplo. Esta última observación nos lleva necesariamente a:

$$P(A)=P\left[\left(M_1\cap\overline{M_2}\cap\overline{M_3}\right)\cup\left(\overline{M_1}\cap M_2\cap\overline{M_3}\right)\cup\left(\overline{M_1}\cap\overline{M_2}\cap M_3\right)\right]=$$
$$=P\left(M_1\cap\overline{M_2}\cap\overline{M_3}\right)+P\left(\overline{M_1}\cap M_2\cap\overline{M_3}\right)+P\left(\overline{M_1}\cap\overline{M_2}\cap M_3\right)=\ \mathbf{(1)}$$

pues sabemos que si A, B y C son dos sucesos cualesquiera incompatibles dos a dos ($A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$ y $B\cap C=\varnothing$), entonces $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$.

Hagamos notar, para terminar esta parte, que el hecho de meter o no un penalti no influye para nada en lo que ocurra en el lanzamiento del siguiente, es decir, meter o no meter el primer penalti es <u>independiente</u> de meter o no meter el segundo y de meter o no meter el tercero. Teniendo en cuenta esto podemos continuar la expresión **(1)** así:

$$=P(M_1)\cdot P\left(\overline{M_2}\right)\cdot P\left(\overline{M_3}\right)+P\left(\overline{M_1}\right)\cdot P(M_2)\cdot P\left(\overline{M_3}\right)+P\left(\overline{M_1}\right)\cdot P\left(\overline{M_2}\right)\cdot P(M_3)=$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{125}+\frac{4}{125}+\frac{4}{125}=\frac{12}{125}$$

pues también hemos de saber que si A, B y C son sucesos independientes dos a dos, entonces

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

Con todo lo anterior hemos demostrado que $P(A)=\dfrac{12}{125}$.

Calculemos ahora $P(B)$. Por un razonamiento semejante al anterior podemos escribir ahora

$$B=\left(M_1\cap M_2\cap\overline{M_3}\right)\cup\left(M_1\cap\overline{M_2}\cap M_3\right)\cup\left(\overline{M_1}\cap M_2\cap M_3\right)$$

y, por tanto,

$$P(B)=P\left(M_1\cap M_2\cap\overline{M_3}\right)+P\left(M_1\cap\overline{M_2}\cap M_3\right)+P\left(\overline{M_1}\cap M_2\cap M_3\right)=$$
$$=P(M_1)\cdot P(M_2)\cdot P\left(\overline{M_3}\right)+P(M_1)\cdot P\left(\overline{M_2}\right)\cdot P(M_3)+P\left(\overline{M_1}\right)\cdot P(M_2)\cdot P(M_3)=$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{125}+\frac{16}{125}+\frac{16}{125}=\frac{48}{125}$$

Hallemos por último $P(C)$. Meter el primer penalti (con los penaltis segundo y tercero puede ocurrir cualquier cosa) se puede escribir simbólicamente así:

$$C=(M_1\cap M_2\cap M_3)\cup\left(M_1\cap\overline{M_2}\cap M_3\right)\cup\left(M_1\cap M_2\cap\overline{M_3}\right)\cup\left(M_1\cap\overline{M_2}\cap\overline{M_3}\right)$$

y entonces,

$$P(C)=P(M_1\cap M_2\cap M_3)+P\left(M_1\cap\overline{M_2}\cap M_3\right)+P\left(M_1\cap M_2\cap\overline{M_3}\right)+P\left(M_1\cap\overline{M_2}\cap\overline{M_3}\right)=$$
$$=P(M_1)\cdot P(M_2)\cdot P(M_3)+P(M_1)\cdot P\left(\overline{M_2}\right)\cdot P(M_3)+P(M_1)\cdot P(M_2)\cdot P\left(\overline{M_3}\right)+P(M_1)\cdot P\left(\overline{M_2}\right)\cdot P\left(\overline{M_3}\right)=$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{64}{125}+\frac{16}{125}+\frac{16}{125}+\frac{4}{125}=\frac{100}{125}$$

Resumiendo: $P(A)=\dfrac{12}{125}$, $P(B)=\dfrac{48}{125}$ y $P(C)=\dfrac{100}{125}$. Observa que no hemos simplificado. Ahora se verá porqué. Bien, después de todo el razonamiento anterior, que aunque largo no es difícil, estamos ya en condiciones de hallar las probabilidades que se nos piden en el problema:

- Puesto que los sucesos A y B son claramente incompatibles tenemos que

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{12}{125}+\frac{48}{125}=\frac{60}{125}$$

- Como $A\cap C=M_1\cap M_2\cap\overline{M_3}$, entonces:

$$P(A\cap C)=P\left(M_1\cap M_2\cap\overline{M_3}\right)=P(M_1)\cdot P(M_2)\cdot P\left(\overline{M_3}\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{125}$$

- Puesto que $B\cap C=\left(M_1\cap\overline{M_2}\cap M_3\right)\cup\left(M_1\cap M_2\cap\overline{M_3}\right)$, entonces:

$$P(B\cap C)=P\left(M_1\cap\overline{M_2}\cap M_3\right)+P\left(M_1\cap M_2\cap\overline{M_3}\right)=$$

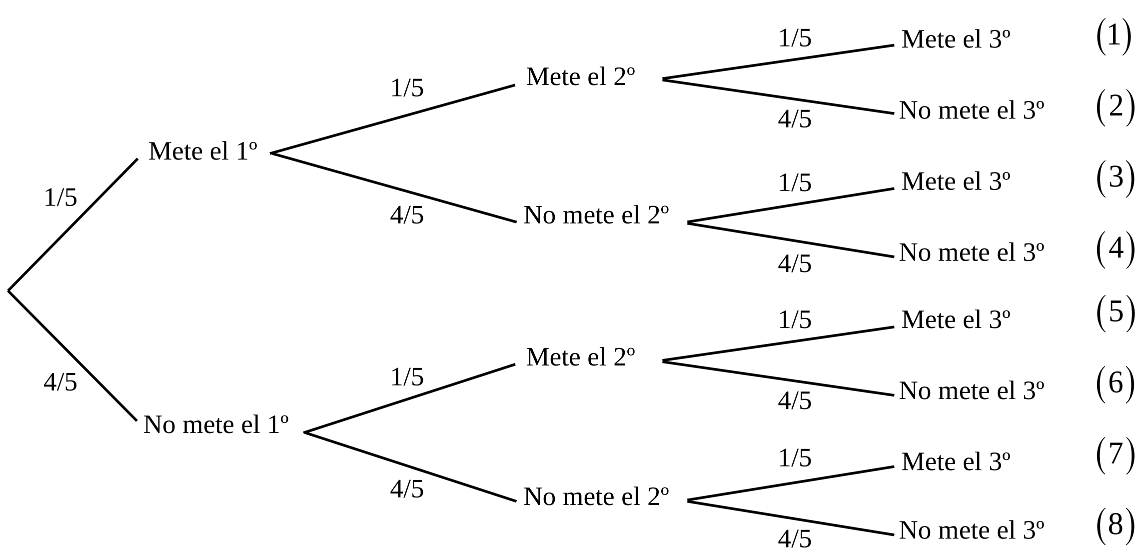
$$=P(M_1)\cdot P\left(\overline{M_2}\right)\cdot P(M_3)+P(M_1)\cdot P(M_2)\cdot P\left(\overline{M_3}\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{16}{125}+\frac{16}{125}=\frac{32}{125}$$

Observaciones

Para calcular la probabilidad de $A\cup B$ es necesario calcular $P(A)$ y $P(B)$ pues son dos sucesos incompatibles, y por tanto la suma de las probabilidades de los mismos. Sin embargo, no hubiera sido necesario calcular $P(C)$, pues se piden las probabilidades de $A\cap C$ y de $B\cap C$, cuyo cálculo no requiere, como se ha visto, de $P(C)$ y se hallan de forma similar a como se puede hallar $P(A)$ o $P(B)$. Observemos además que A y C no son independientes y por tanto no es lícito utilizar la fórmula $P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$. Lo mismo se puede decir de B y C.

Otra forma de hacer el ejercicio

Todo lo anterior se podría haber simplificado bastante si usamos un diagrama de árbol como el siguiente:



Ahora hemos de observar que:

- $P\left(A\cup B\right)=\left(2\right)+\left(3\right)+\left(4\right)+\left(5\right)+\left(6\right)+\left(7\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+$
  $+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{125}+\frac{16}{125}+\frac{4}{125}+\frac{16}{125}+\frac{4}{125}+\frac{4}{125}=\frac{60}{125}$.
- $P\left(A\cap C\right)=\left(4\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{125}$.
- $P\left(B\cap C\right)=\left(2\right)+\left(3\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{125}+\frac{16}{125}=\frac{32}{125}$.

Esta forma de resolver el ejercicio es más práctica, más intuitiva, más sencilla. En experimentos compuestos se ha de recordar que la probabilidad de un suceso elemental del mismo puede calcularse multiplicando las probabilidades de los sucesos elementales que conforman la experiencia compuesta. En el fondo el experimento lanzar sucesivamente tres penaltis es la experiencia compuesta de lanzar un penalti, luego otro y por fin el tercero. El uso de diagramas de árbol en este tipo de situaciones es fundamental para la correcta realización del ejercicio.

3. En una clase infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 3 alumnos al azar, halla la probabilidad de:

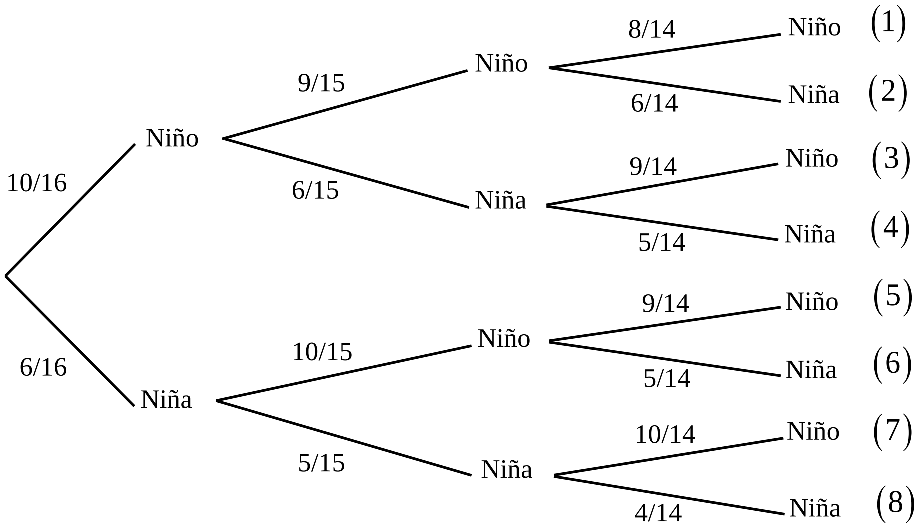
a) Seleccionar 3 niños.

b) Seleccionar 2 niños y una niña.

c) Seleccionar, al menos, un niño.

Solución

Este ejercicio es similar al anterior. Observemos el siguiente diagrama:



a) $P\left(\text{seleccionar 3 niños}\right)=\left(1\right)=\frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{8}{14}=\frac{720}{3360}=\frac{3}{14}$.

b) $P\left(\text{seleccionar 2 niños y 1 niña}\right)=\left(2\right)+\left(3\right)+\left(4\right)=\frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}+\frac{10}{16}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{9}{14}+\frac{6}{16}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}=\frac{1620}{3360}=\frac{27}{56}$.

c) $P\left(\text{seleccionar, al menos, 1 niño}\right)=1-P\left(\text{no seleccionar ningún niño}\right)=1-P\left(\text{seleccionar tres niñas}\right)=$
$=1-\left(8\right)=1-\frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}=1-\frac{120}{3360}=1-\frac{1}{28}=\frac{27}{28}$.

4. Si los sucesos A y B son independientes y compatibles, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) $P(A\cap B)=P(B)$.

b) $P(B\cup A)=P(A)+P(B)$.

c) $P(\overline{A}/B)=P(\overline{A})$.

Solución

a) Como A y B son sucesos independientes, entonces $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. Esta última expresión solamente es igual a $P(B)$ si $P(A)=1$, es decir, si $A=E$, y solamente en este caso será cierta la afirmación.

b) Sabemos que $P(B\cup A)=P(B)+P(A)-P(B\cap A)$. Si fuera cierta la afirmación, tendríamos que $P(A)+P(B)=P(B)+P(A)-P(B\cap A)\Rightarrow P(B\cap A)=0$, y de aquí tendríamos que deducir que $B\cap A=\varnothing$. Cosa que es imposible pues, por hipótesis, A y B son compatibles (tienen intersección no vacía). Por tanto, la afirmación no es cierta.

c) Usando la fórmula de la probabilidad condicionada: $P(\overline{A}/B)=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(\overline{A})\cdot P(B)}{P(B)}=P(\overline{A})$, l que indica que la afirmación es cierta. Obsérvese $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)$ porque al ser A y B independientes también lo son $\overline{A}$ y B (¿serías capaz de demostrar esta afirmación?)

5. Dos niños escriben en un papel una vocal cada uno, ¿cuál es la probabilidad de que sea la misma?

Solución

Hemos de hallar la probabilidad de que los dos escriban la “*a*”, o que los dos escriban la “*e*”, o que los dos escriban la “*i*”, o que los dos escriban la “*o*”, o bien que los dos escriban la “*u*”. Además, tengamos en cuenta que lo que escriba uno de los niños no depende para nada en lo que escriba el otro. Por tanto:

$$P(aa\cup ee\cup ii\cup oo\cup uu)=P(aa)+P(ee)+P(ii)+P(oo)+P(uu)=$$
$$=P(a)\cdot P(a)+P(e)\cdot P(e)+P(i)\cdot P(i)+P(o)\cdot P(o)+P(u)\cdot P(u)=$$
$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{25}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$$

6. Se ha comprobado que el 48 % de los alumnos de Bachillerato de cierta región son aficionados a la música clásica y a la pintura, y que el 60 % de los aficionados a la pintura también son aficionados a la música clásica. Si se elige al azar un alumno de Bachillerato de esa región, ¿qué probabilidad hay de que no sea aficionado a la pintura?

Solución

Llamemos A al suceso “ser aficionado a la pintura” y B al suceso “ser aficionado a la música clásica”. Según el enunciado $P(A\cap B)=0,48$ y $P(A/b)=0,6$. Tenemos que hallar $P(\overline{B})$. Pero resulta que $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, con lo que, despejando, $P(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A/B)}\Rightarrow P(B)=\dfrac{0,48}{0,6}=0,8$. Y de aquí obtenemos que $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,8=0,2$.

7. En una clase hay 12 alumnos y 16 alumnas. El profesor saca a 4 a la pizarra.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean alumnas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean alumnos?

Solución

El profesor va eligiendo personas de la clase al azar, hasta cuatro personas distintas. Consideremos entonces los sucesos A, "sacar a una alumna" y B, "sacar a un alumno".

a) $P(\text{todas alumnas}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)\cdot P(A_2 / A_1)\cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2)\cdot P(A_4 / A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$

$= \frac{16}{28}\cdot\frac{15}{27}\cdot\frac{14}{26}\cdot\frac{13}{25} = \frac{43680}{491400} \cong 0,089$.

b) $P(\text{todos alumnos}) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = P(B_1)\cdot P(B_2 / B_1)\cdot P(B_3 / B_1 \cap B_2)\cdot P(B_4 / B_1 \cap B_2 \cap B_3) =$

$= \frac{12}{28}\cdot\frac{11}{27}\cdot\frac{10}{26}\cdot\frac{9}{25} = \frac{11880}{491400} \cong 0,024$.

Los subíndices indican el lugar en el que ha salido una alumna o a un alumno. Por ejemplo, A_2 significa que la persona que ha salido en segundo lugar es una alumna.

Se podría haber dibujado un diagrama de árbol, pero basta tenerlo en mente para la resolución del problema. Obsérvese, por otro lado, cómo es la expresión que proporciona la probabilidad de la intersección de sucesos cuando, como en este caso, no son independientes.

8. En una muestra de 1000 personas hay 300 que saben inglés, 100 que saben ruso y 50 ambos idiomas. Con estos datos averigua si son independientes o no los sucesos "saber inglés" y "saber ruso".

Solución

Llamemos A al suceso "saber inglés" y B al suceso "saber ruso". Entonces $P(A) = \frac{300}{1000} = 0,3$; $P(B) = \frac{100}{1000} = 0,1$ y $P(A \cap B) = \frac{50}{1000} = 0,05$. Para que los sucesos A y B sean independientes se ha de cumplir que $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$. Pero $P(A)\cdot P(B) = 0,3\cdot 0,1 = 0,03 \neq 0,05 = P(A \cap B)$. Así pues, A y B no son independientes.

9. La probabilidad de que un niño, cuando sea mayor, estudie una carrera universitaria es 1/6, y en el caso de una niña es 1/10. Si se toman al azar un niño y una niña, calcula las probabilidades siguientes:

a) Que los dos estudien una carrera universitaria.

b) Que ninguno de ellos estudie una carrera universitaria.

c) Que al menos uno de ellos estudie una carrera universitaria

Solución

Llamemos A al suceso "que un niño, cuando sea mayor, estudie una carrera universitaria" y B al suceso "que una niña, cuando sea mayor, estudie una carrera universitaria". Según el enunciado, $P(A) = \frac{1}{6}$ y $P(B) = \frac{1}{10}$. Además A y B son claramente sucesos independientes pues el hecho de que un niño estudie, cuando sea mayor, una carrera universitaria, no debe de influir en el hecho de que una niña lo haga también o no.

a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{60}$.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{60}\right) =$

$= 1 - \frac{15}{60} = \frac{45}{60}$.

Este apartado también se podría haber hecho considerando que si A y B son independientes entonces $\overline{A}$ y $\overline{B}$ también lo son y, por tanto, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} = \frac{45}{60}$.

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{60} = \frac{15}{60}$.

10. Juan y Pedro lanzan una pelota a un blanco. La probabilidad de que Juan dé en el blanco es 1/3 y la probabilidad de que dé Pedro es 1/4. Supóngase que Juan lanza primero y que los dos chicos se van turnando para lanzar:

a) Calcula la probabilidad de que el primer lanzamiento que dé en el blanco sea el segundo de Juan.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan dé en el blanco antes de que lo haga Pedro?

Solución

Llamemos A al suceso "Juan da en el blanco" y B al suceso "Pedro da en el blanco". Entonces $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$. Además, los sucesos A y B son independientes pues el hecho de Juan dé o no en el blanco no influye en el hecho de que Pedro dé o no en el blanco.

a) Debe de ocurrir que Juan, que es el primero que lanza, no dé en el blanco, que luego tampoco dé Pedro y finalmente, en el siguiente lanzamiento, Juan consiga dar en el blanco. Este suceso se puede simbolizar así: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap A$, cuya probabilidad es:

$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap A) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

b) Observemos que Juan dará antes que Pedro si Juan da la primera vez que lanza. En caso contrario solamente dará antes que Pedro si éste falla y a continuación él acierta. En la siguiente tabla vemos las posibilidades:

Lanzamiento de Juan	Suceso: "Juan da en el blanco antes que Pedro"	Probabilidad
1	A	$\frac{1}{3}$
2	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap A$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$
3	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cap A$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$

4	$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{A}\cap\overline{B}\cap A$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3}$
....	....	....
n	$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{A}\cap\overline{B}\cap\ldots\cap\overline{A}\cap\overline{B}\cap A$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}$
....	....	....

Por tanto, la probabilidad de que Juan dé en el blanco antes que Pedro debe de calcularse sumando todos los resultados de la última columna:

$$P(\text{Juan da en el blanco antes que Pedro})=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots\right)$$

La expresión que hay entre paréntesis es la suma S_n de los términos de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$ que se obtiene mediante la fórmula $S_n=\frac{a_n\cdot r-a_1}{r-1}$, donde a_n es el término *n*-ésimo de la progresión, a_1 el primero y *r* la razón de la progresión. En nuestro caso:

$$S_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-1}{-\frac{1}{2}}=-2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-1\right)=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$$

Obsérvese que cuando *n* tiende a infinito (es decir, cuando el número de lanzamientos se hace tan grande como sea necesario hasta que Juan dé en el blanco, mientras Pedro vaya fallando) la expresión $\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$ tiende a cero, ya que $2^n\to+\infty$ cuando $n\to+\infty$. Así pues $S_n=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ tiende a 2 y, por tanto: $P(\text{Juan da en el blanco antes que Pedro})=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$.

11. Estudiando un determinado colectivo de personas resulta que: 2 de cada 5 son morenas, y 3 de cada 9 tienen los ojos azules, teniendo el resto los ojos de distinto color al azul. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que una persona sea morena y tenga los ojos azules.

b) Que una persona sea morena o no tenga los ojos azules

c) Que tres personas sean morenas.

d) Que dos personas sean morenas o tengan los ojos azules.

Solución

Llamemos M al suceso "ser morena" y A al suceso "tener los ojos azules". Entonces, según el enunciado, $P(M)=\frac{2}{5}$ y $P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. Además, ambos sucesos son claramente independientes pues el color del pelo o de la piel no debe de influir para nada en el color que se tenga de ojos.

a) $P(M\cap A)=P(M)\cdot P(A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$.

b) $P(M\cup\overline{A})=P(M)+P(\overline{A})-P(M\cap\overline{A})=P(M)+P(\overline{A})-P(M)\cdot P(\overline{A})=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}=$

$=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}-\frac{4}{15}=\frac{6+10-4}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$.

c) $P(M\cap M\cap M)=P(M)\cdot P(M)\cdot P(M)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{125}$.

d) $P\left[(M\cap M)\cup(A\cap A)\right]=P(M\cap M)+P(A\cap A)-P(M\cap M\cap A\cap A)=$

$=P(M)\cdot P(M)+P(A)\cdot P(A)-P(M)\cdot P(M)\cdot P(A)\cdot P(A)=\frac{4}{25}+\frac{1}{9}-\frac{4}{25}\cdot\frac{1}{9}=$

$\frac{4}{25}+\frac{1}{9}-\frac{4}{225}=\frac{36+25-4}{225}=\frac{57}{225}=\frac{19}{75}$.

12. En una clase, un 40% de alumnos aprobaron filosofía, y un 50% matemáticas. Se sabe que la probabilidad de aprobar filosofía si se ha aprobado matemáticas es 0,6.

a) ¿Qué porcentaje de alumnos aprobaron ambas asignaturas?

b) De los alumnos que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

Solución

Sea F el suceso "aprobar filosofía" y M el suceso "aprobar matemáticas". Entonces $P(F)=0,4$ y $P(M)=0,5$. Además se sabe también que $P(F/M)=0,6$. Esto último nos indica que en este caso los sucesos F y M, por alguna razón, no son independientes (si fueran independientes $P(F/M)=P(F)$).

a) Como $P(F/M)=\frac{P(F\cap M)}{P(M)}$, entonces $P(F\cap M)=P(F/M)\cdot P(M)=0,6\cdot 0,5=0,3$. Es decir, un 30% de los alumnos aprueban filosofía y matemáticas.

b) $P(M/F)=\frac{P(M\cap F)}{P(F)}=\frac{0,3}{0,4}=0,75$. O sea, de los alumnos que aprobaron filosofía, un 75 % aprobó matemáticas.

13. Para la señalización de emergencia de un hospital se han instalado dos indicadores que funcionan independientemente. La probabilidad de que el indicador A se accione durante la avería es de 0,99; mientras que para el indicador B, la probabilidad es de 0,95.

a) Calcula la probabilidad de que durante una avería se accione un solo indicador.

b) Calcula la probabilidad de que durante una avería no se accione ninguno de los dos indicadores.

Solución

a) Evidentemente, los sucesos $A \cap \overline{B}$ y $B \cap \overline{A}$ son incompatibles (no pueden ocurrir ambos al mismo tiempo). Por tanto:

$$P\left[\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\right]=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(B\cap\overline{A}\right)=P(A-B)+P(B-A)=$$
$$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(B\cap A)=P(A)+P(B)-2\cdot P(A\cap B)=$$
$$=0,99+0,05-2\cdot 0,99\cdot 0,95=0,99+0,95-1,881=0,059\,.$$

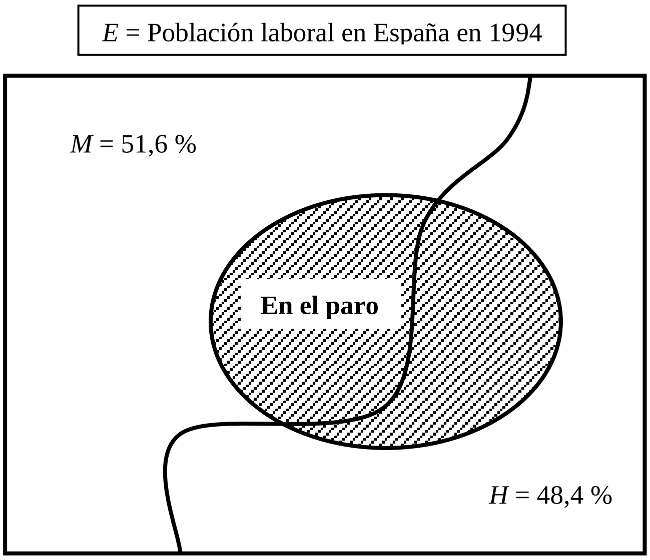
b) $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)=$

$$=1-(0,99+0,95-0,99\cdot 0,95)=1-0,9995=0,0005\,.$$

14. En 1994, en España, el 51,6 % de la población en edad laboral (16 – 65 años) son mujeres y el 48,4 % son hombres. De ellos, están en el paro el 31,4 % de las mujeres y el 19,8 % de los hombres. Elegida al azar una persona en edad laboral, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el paro?

Solución

Si llamamos M al suceso "ser mujer en edad laboral" y H al suceso "ser hombre en edad laboral", entonces $P(M)=0,516$ y $P(H)=0,484$.



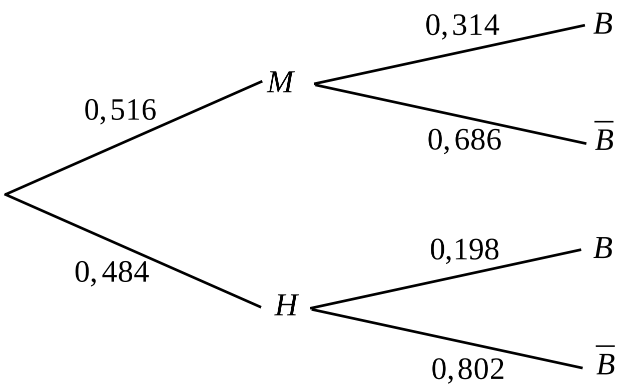
Además, si B es el suceso "estar en el paro", entonces también sabemos que: $P(B/M)=0,314$ y $P(B/H)=0,198$.

Analizando con detenimiento el diagrama (ver figura de la derecha) podemos concluir que:

$$P(B)=P\left[(M\cap B)\cup(H\cap B)\right]=$$
$$=P(M\cap B)+P(H\cap B)=$$
$$=P(M)\cdot P(B/M)+P(H)\cdot P(H/M)=$$
$$=0,516\cdot 0,314+0,484\cdot 0,198=0,258\,.$$

Hemos de observar que estamos en las condiciones de aplicar el ***teorema de la probabilidad total***. De hecho, la resolución anterior es la aplicación directa del mismo.

También podríamos haber hecho este problema haciendo uso del diagrama de árbol de la izquierda.



Entonces, claramente, $P(B)=0,516\cdot 0,314+0,484\cdot 0,198\cong 0,258$.

15. Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 del otro color. A continuación se extrae una segunda bola. Se pide:

a) Probabilidad de que la segunda bola sea verde.

b) Probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

Solución

Llamemos R_1 al suceso "sacar bola roja en la primera extracción" y R_2 al suceso "sacar bola roja en la segunda extracción". Llamemos también V_1 al suceso "sacar bola verde en la primera extracción" y V_2 al suceso "sacar bola verde en la segunda extracción".

Es fundamental entender bien el experimento y observar que el color que salga en la segunda extracción va a depender claramente de lo que haya salido en la primera.

Si salió bola roja en la primera extracción hemos de meter dos verdes en la urna con lo que tendremos en este caso 4 rojas (ya hemos extraído una) y 10 verdes. Ahora bien, si salió bola verde en la primera extracción hemos de meter dos rojas y tendremos ahora 7 rojas y 7 verdes. Teniendo esto en cuenta y considerando los datos que aporta el enunciado tendremos las probabilidades siguientes:

$$P(R_1)=\frac{5}{13},\ P(V_1)=\frac{8}{13},\ P(R_2/R_1)=\frac{4}{14},\ P(V_2/R_1)=\frac{10}{14}.\ P(R_2/V_1)=\frac{7}{14},\ P(V_2/V_1)=\frac{7}{14}$$

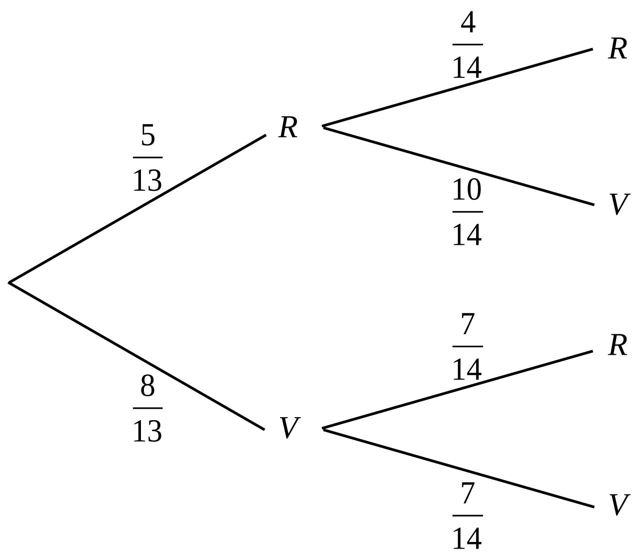
Entonces:

a) Haciendo uso del teorema de la probabilidad total:

$$P(V_2)=P\left[(V_2\cap R_1)\cup(V_2\cap V_1)\right]=P(V_2\cap R_1)+P(V_2\cap V_1)=P(V_2/R_1)\cdot P(R_1)+P(V_2/V_1)\cdot P(V_1)=$$
$$=\frac{10}{14}\cdot\frac{5}{13}+\frac{7}{14}\cdot\frac{8}{13}=\frac{106}{182}\cong 0{,}582.$$

b) $$P\left[(R_1\cap R_2)\cup(V_1\cap V_2)\right]=P(R_1\cap R_2)+P(V_1\cap V_2)=P(R_2/R_1)\cdot P(R_1)+P(V_2/V_1)\cdot P(V_1)=$$
$$=\frac{4}{14}\cdot\frac{5}{13}+\frac{7}{14}\cdot\frac{8}{13}=\frac{76}{182}\cong 0{,}418.$$

También se pueden hacer ambos apartados haciendo uso del siguiente diagrama de árbol, el cual aclarará, y mucho, las posibilidades que se dan en el problema. Para su construcción no hay que olvidar, claro está, las condiciones que se imponen antes de extraer la segunda bola.



16. Dos profesores comparten un número de teléfono. De las llamadas que llegan, 2/5 son para el profesor A y 3/5 son para el profesor B. Sus ocupaciones docentes les alejan de este teléfono, de modo que A está fuera el 50 % del tiempo y B el 25 %. Calcula la probabilidad de estar presente un profesor cuando le llamen.

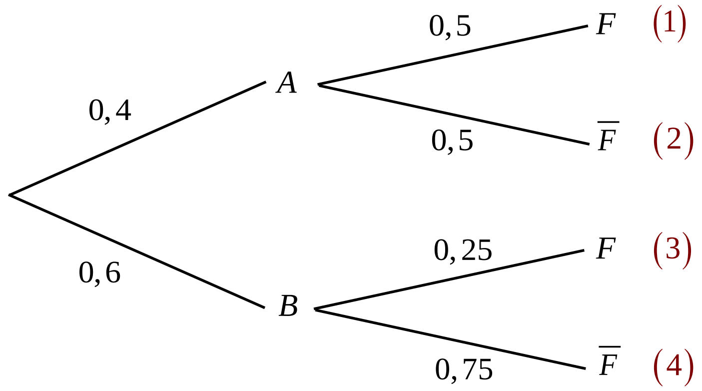
Solución

Llamemos A al suceso "llamar al profesor A", B al suceso "llamar al profesor B" y F al suceso "estar fuera". Según el enunciado, $P(A)=2/5=0,4$; $P(B)=3/5=0,6$; $P(F/A)=0,5$ y $P(F/B)=0,25$. De estas dos últimas probabilidades se deducen claramente estas otras dos probabilidades: $P(\overline{F}/A)=0,5$ (probabilidad estar presente sabiendo que se trata del profesor A) y $P(\overline{F}/B)=0,75$ (probabilidad estar presente sabiendo que se trata del profesor B).

La probabilidad de estar presente un profesor cuando le llamen se puede calcular del siguiente modo:

$$P\left[\left(\overline{F}\cap A\right)\cup\left(\overline{F}\cap B\right)\right]=P\left(\overline{F}\cap A\right)+P\left(\overline{F}\cap B\right)=P\left(\overline{F}/A\right)\cdot P(A)+P\left(\overline{F}/B\right)\cdot P(B)=$$
$$=0,5\cdot 0,4+0,75\cdot 0,6=0,2+0,45=0,65.$$

Volvemos a insistir en la utilidad de los diagramas de árbol para resolver este tipo de problemas.



Ahora es fácil darse cuenta de que la probabilidad que se pide es justamente estar en la posición (2) o en la posición (4) del diagrama anterior, es decir:

$$P(\text{estar presente un profesor cuando le llamen})=(2)+(4)=0,4\cdot 0,5+0,6\cdot 0,75=0,2+0,45=0,65.$$

17. Una bolsa contiene 3 monedas, una de las cuales está acuñada con 2 caras, mientras que las otras dos son normales. Se escoge una moneda al azar y se lanza sucesivamente 4 veces, obteniéndose 4 caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la de 2 caras? Razona la respuesta.

Solución

Llamemos M_1 al suceso "escoger la moneda acuñada con dos caras", M_2 al suceso "escoger la segunda moneda", M_3 al suceso "escoger la tercera moneda" y $4C$ al suceso "salir cuatro caras en cuatro lanzamientos de una moneda". Es claro que $P(M_1)=P(M_2)=P(M_3)=\dfrac{1}{3}$. La probabilidad que se pide la podemos expresar simbólicamente así: $P(M_1/4C)=\dfrac{P(M_1\cap 4C)}{P(4C)}$. Esta fórmula no es otra cosa que la aplicación del Teorema de Bayes. Se trata del cálculo de una probabilidad "a posteriori", es decir, sabemos el resultado final (cuatro caras) y queremos saber si este resultado vino de M_1.

Por un lado, $P(M_1 \cap 4C) = P(4C/M_1) \cdot P(M_1) = 1 \cdot \frac{1}{3}$. Obsérvese que $P(4C/M_1) = 1$. Esto es porque si la moneda elegida es la acuñada con dos caras, sea cual sea el número de lanzamientos que hagamos con ella, siempre saldrá cara. Por otro lado, aplicando el teorema de la probabilidad total, se tiene que:

$$P(4C) = P\left[(M_1 \cap 4C) \cup (M_2 \cap 4C) \cup (M_3 \cap 4C)\right] = P(M_1 \cap 4C) + P(M_2 \cap 4C) + P(M_3 \cap 4C) =$$

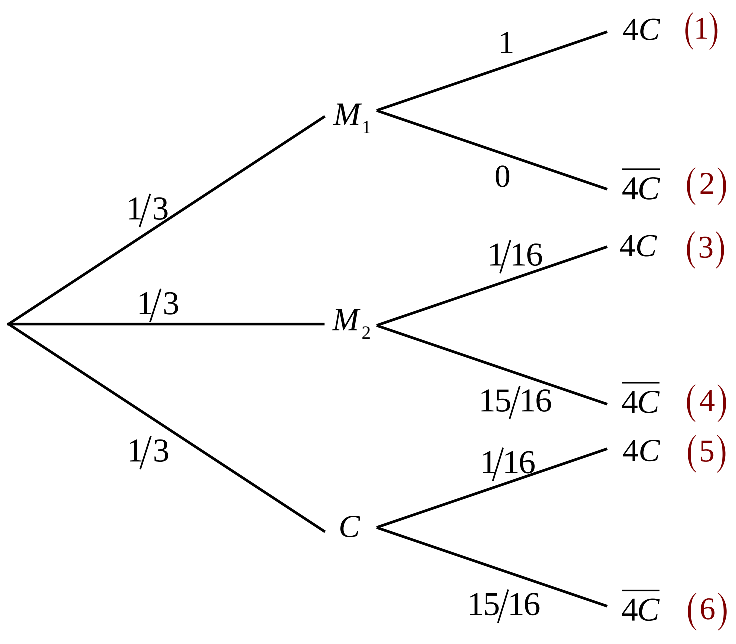
$$= P(4C/M_1) \cdot P(M_1) + P(4C/M_2) \cdot P(M_2) + P(4C/M_3) \cdot P(M_3) = 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{48} + \frac{1}{48} = \frac{16+1+1}{48} = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}.$$

Obsérvese que la probabilidad de que salgan cuatro caras sabiendo que la moneda elegida es la segunda o la tercera ha de ser igual a la probabilidad de que salga cara multiplicada por sí misma cuatro veces. Por eso $P(M_2/4C) = P(M_3/4C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

Finalmente, se tiene que $P(M_1/4C) = \frac{P(M_1 \cap 4C)}{P(4C)} = \frac{1/3}{3/8} = \frac{8}{9}$.

Para resolver este problema haciendo uso de un diagrama de árbol procederíamos del siguiente modo.



Entonces:

$$P(M_1/4C) = \frac{P(M_1 \cap 4C)}{P(4C)} = \frac{(1)}{(1)+(3)+(5)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{48} + \frac{1}{48}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{18}{48}} = \frac{48}{54} = \frac{8}{9}.$$

18. El despertador de Javier no funciona muy bien, pues el 20 % de las veces no suena. Cuando suena, Javier llega tarde a clase con probabilidad 0,2, pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0,9.

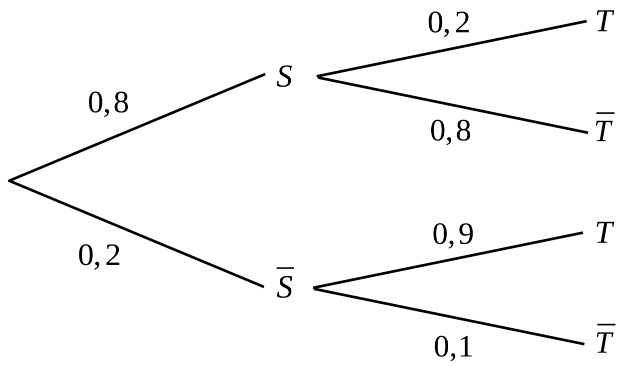
a) Determina la probabilidad de que llegue tarde a clase y haya sonado el despertador.

b) Determina la probabilidad de que llegue temprano.

c) Javier ha llegado tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?

Solución

Sean S el suceso "el despertador de Javier suena y T el suceso "Javier llega tarde a clase". Entonces $P(S)=0,8$; $P(T/S)=0,2$ y $P(T/\overline{S})=0,9$. Usaremos el siguiente diagrama de árbol para contestar a cada uno de los apartados.



Antes de nada es conveniente observar que las probabilidades que hay en las primeras ramificaciones de los diagramas de árbol son probabilidades directas (en este caso, la de que suene o la de que no suene el despertador, las cuales suman 1). Las probabilidades en las segundas ramificaciones son probabilidades (es decir la de llegar o no llegar tarde condicionado a que suene o que no suene el despertador). Por último, si multiplicamos las probabilidades de las ramificaciones obtenemos la probabilidad de la intersección. El ejemplo más claro es la resolución del apartado a), en el que hay que hallar la probabilidad que llegue tarde a clase y haya sonado el despertador (véase a continuación). Esto se deduce, en general, de la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$$

a) $P(T\cap S)=P(S)\cdot P(T/S)=0,8\cdot 0,2=0,16$.

b) La probabilidad de llegar temprano es la misma que la de no llegar tarde. O sea:

$$P(\overline{T})=P\left[(\overline{T}\cap S)\cup(\overline{T}\cap\overline{S})\right]=P(\overline{T}\cap S)+P(\overline{T}\cap\overline{S})=P(S)\cdot P(\overline{T}/S)+P(\overline{S})\cdot P(\overline{T}/\overline{S})=$$
$$=0,8\cdot 0,8+0,2\cdot 0,1=0,64+0,02=0,66\ .$$

Esto no es otra cosa que la aplicación directa del teorema de la probabilidad total que, como es evidente, usando el diagrama se ve muchísimo más claro.

c) $$P(S/T)=\frac{P(S\cap T)}{P(T)}=\frac{P(S\cap T)}{P(S\cap T)+P(\overline{S}\cap T)}=\frac{0,8\cdot 0,2}{0,8\cdot 0,2+0,2\cdot 0,9}=\frac{0,16}{0,34}=0,47\ .$$

La anterior es una probabilidad "a posteriori". Sabemos que Javier llegó tarde a clase y queremos averiguar la probabilidad de que haya sonado el despertador. Esto es una aplicación del teorema de Bayes. Aunque podemos utilizar los apartados anteriores para calcularla, se ha usado el diagrama.

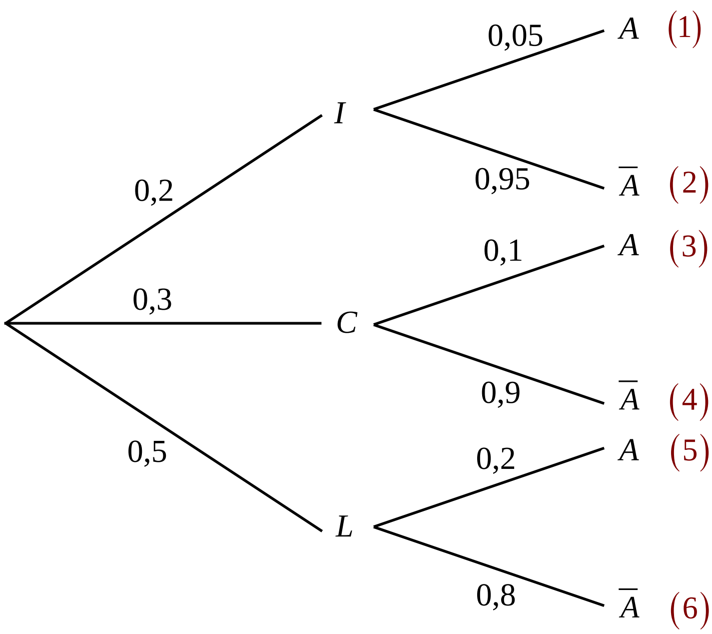
19. En una universidad en la que no hay más que estudiantes de ingeniería, ciencias y letras, acaban la carrera el 5 % de ingeniería, el 10 % de ciencias y el 20% de letras. Se sabe que el 20% estudian ingeniería, el 30% ciencias y el 50% letras. Tomado un estudiante cualquiera al azar, se pide.

a) Probabilidad de que haya acabado la carrera y sea de ingeniería.

b) Si se tiene la carrera terminada, ¿cuál es la probabilidad de que sea de ingeniería?

Solución

Sean los sucesos I: "ser estudiante de ingeniería", C: "ser estudiante de ciencias", L: "ser estudiante de letras" y A: "acabar la carrera". Entonces, según el enunciado, tenemos las siguientes probabilidades: $P(A/I)=0,05$; $P(A/C)=0,1$; $P(A/L)=0,2$; $P(I)=0,2$; $p(C)=0,3$ y $P(L)=0,5$. Elaboremos un diagrama de árbol con todos estos datos.



Entonces:

a) $P(A\cap I)=(1)=0,2\cdot 0,05=0,01$.

Lo podemos hacer igualmente así: $P(A\cap I)=P(I)\cdot P(A/I)=0,2\cdot 0,05=0,01$.

b) $P(I/A)=\dfrac{P(I\cap A)}{P(A)}=\dfrac{(1)}{(1)+(3)+(5)}=\dfrac{0,2\cdot 0,05}{0,2\cdot 0,05+0,3\cdot 0,1+0,5\cdot 0,2}=\dfrac{0,01}{0,14}\cong 0,071$.

Esto es una aplicación del teorema de Bayes. Por supuesto, también se puede contestar así:

$$P(I/A)=\frac{P(I\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A/I)\cdot P(I)}{P(A/I)\cdot P(I)+P(A/C)\cdot P(C)+P(A/L)\cdot P(L)}=$$

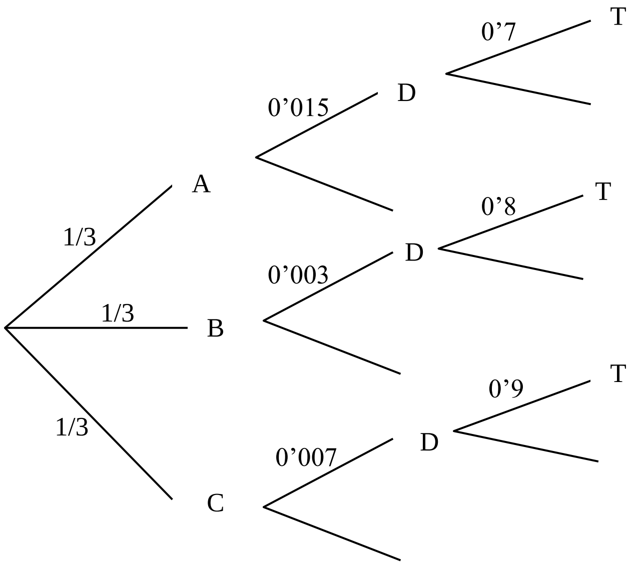
$$=\frac{0,05\cdot 0,2}{0,05\cdot 0,2+0,1\cdot 0,3+0,2\cdot 0,5}=\frac{0,01}{0,14}\cong 0,071.$$

Obsérvese que la probabilidad $P(A)$, hallada en el denominador de la expresión anterior, es una aplicación del teorema de la probabilidad total.

20. Una fábrica produce tres tipos diferentes de bolígrafos, A, B y C. El número total de unidades producidas de cada uno de ellos es el mismo (un tercio del total). Salen defectuosos, sin embargo, un 15 por mil de todos los del tipo A, un 3 por mil de todos los del tipo B y un 7 por mil de todos los del tipo C. En un control de calidad se detectan el 70 % de todos los bolígrafos defectuosos del tipo A, el 80 % de los del tipo B y el 90 % de los del tipo C. Los bolígrafos defectuosos en dicho control se tiran. Si se saca al azar uno de estos bolígrafos defectuosos que se han tirado, calcula la probabilidad de que sea del tipo A.

Solución

Llamemos A al suceso "escoger al azar un bolígrafo del tipo A", B al suceso "escoger al azar un bolígrafo del tipo B", C al suceso "escoger al azar un bolígrafo del tipo C, D al suceso "elegir un bolígrafo defectuoso" y T al suceso "tirar un bolígrafo". Observemos el siguiente diagrama:



Entonces la probabilidad de que uno de los bolígrafos que se han tirado sea del tipo A se puede escribir del siguiente modo:

$$P\left(A/\left(D\cap T\right)\right)=\frac{P(A\cap D\cap T)}{P(D\cap T)}=$$

$$=\frac{P(A)\cdot P(D/A)\cdot P\left(T/\left(D\cap A\right)\right)}{P(A)\cdot P(D/A)\cdot P\left(T/\left(D\cap A\right)\right)+P(B)\cdot P(D/B)\cdot P\left(T/\left(D\cap B\right)\right)+P(C)\cdot P(D/C)\cdot P\left(T/\left(D\cap C\right)\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0,015\cdot 0,7}{\frac{1}{3}\cdot 0,015\cdot 0,7+\frac{1}{3}\cdot 0,003\cdot 0,8+\frac{1}{3}\cdot 0,007\cdot 0,9}\cong 0,547\,.$$

Es importante, en casos como este, hacer una reflexión acerca de la aplicación del teorema de Bayes. Obsérvese que el suceso $D\cap T$ es la unión de los tres sucesos siguientes, incompatibles además dos a dos: $A\cap D\cap T$, $B\cap D\cap T$ y $C\cap D\cap T$. Basta aplicar ahora en cada caso la probabilidad de la intersección de tres sucesos.

Como se puede apreciar, haciendo uso del diagrama en árbol la resolución del ejercicio es casi inmediata y además todo lo anterior adquiere sentido.

21. El 35 % de los créditos de un banco son para vivienda, el 50 % son para industria y el 15 % para consumo diverso. Resultan fallidos el 20 % de los créditos para vivienda, el 15 % de los créditos para industrias y el 70 % de los créditos para consumo. Calcula la probabilidad de que se pague un crédito elegido al azar.

Solución

Sean los sucesos $V = \{$crédito para vivienda$\}$, $I = \{$crédito para industria$\}$, $C = \{$crédito para consumo diverso$\}$ y $F = \{$un crédito resulta fallido$\}$. Entonces, según el enunciado del problema, tenemos los siguientes dados:

$$P(V) = 0{,}35 \ ; \ P(I) = 0{,}5 \ ; \ P(C) = 0{,}15 \ ; \ P(F/V) = 0{,}2 \ ; \ P(F/I) = 0{,}15 \ ; \ P(F/C) = 0{,}7$$

Haciendo uso del teorema de la probabilidad total:

$$P(F) = P\left[(F \cap V) \cup (F \cap I) \cup (F \cap C)\right] = P(F \cap V) + P(F \cap I) + P(F \cap C) =$$

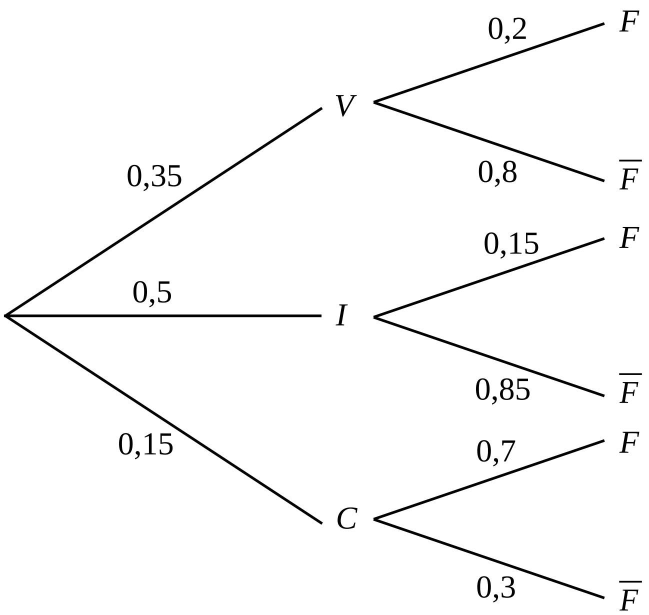
$$= P(F/V) \cdot P(V) + P(F/I) \cdot P(I) + P(F/C) \cdot P(C) = 0{,}2 \cdot 0{,}35 + 0{,}15 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}15 = 0{,}25$$

La probabilidad de que se conceda un crédito es la de que no resulte fallido, es decir,

$$P\left(\overline{F}\right) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

Haciendo un diagrama de árbol es más sencillo y mucho más intuitivo realizar este ejercicio.

Teniendo en cuenta que lo primero que hacemos es pedir el crédito y luego esperar a ver si resulta fallido o no, podemos elaborar el siguiente diagrama de árbol.



Ahora es evidente que para calcular la probabilidad de que el crédito resulte fallido hay que multiplicar las probabilidades que acaben en el suceso F y sumar todas ellas:

$$P(F) = 0{,}35 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}15 + 0{,}15 \cdot 0{,}7 = 0{,}25$$

Evidentemente, se puede hallar directamente lo que se pide, es decir, que se paque un crédito elegido al azar o, lo que es lo mismo, que no resulte fallido:

$$P\left(\overline{F}\right) = 0{,}35 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}85 + 0{,}15 \cdot 0{,}3 = 0{,}75$$

22. Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 blancas. Se selecciona una bola al azar, se descarta y se colocan 2 bolas de otro color en la urna. Luego se saca de la urna una segunda bola. Determina la probabilidad de que:

a) La segunda bola sea roja.

b) Ambas bolas sean del mismo color.

c) La primera sea roja si la segunda lo es.

Solución

Consideremos los sucesos $R_1 = \{\text{sacar la primera bola roja}\}$, $B_1 = \{\text{sacar la primera bola blanca}\}$, $R_2 = \{\text{sacar la segunda bola roja}\}$ y $B_2 = \{\text{sacar la segunda bola blanca}\}$. Entonces, según se detalla en el enunciado, podemos considerar las siguientes probabilidades.

Por la regla de Laplace está claro que $P(R_1) = \frac{5}{8}$; $P(B_1) = \frac{3}{8}$.

Si se extrae la primera bola roja, la descartamos (quedando 4 rojas) e introducimos dos blancas (del otro color), con lo que en total, para la segunda extracción, habría 4 rojas y 5 blancas (un total de nueve bolas). Por tanto, en este caso, $P(R_2 / R_1) = \frac{4}{9}$; $P(B_2 / R_1) = \frac{5}{9}$.

Si se extrae la primera bola blanca, la descartamos (quedando 2 blancas) e introducimos dos rojas (del otro color), con lo que en total, para la segunda extracción, habría 7 rojas y 2 blancas (un total de nueve bolas). Por tanto, en este caso, $P(R_2 / B_1) = \frac{7}{9}$; $P(B_2 / B_1) = \frac{2}{9}$.

a) La probabilidad de que la segunda bola sea roja será, por el teorema de la probabilidad total:

$$P(R_2) = P\left[(R_2 \cap R_1) \cup (R_2 \cap B_1)\right] = P(R_2 \cap R_1) + P(R_2 \cap B_1) =$$
$$= P(R_2 / R_1) \cdot P(R_1) + P(R_2 / B_1) \cdot P(B_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{20}{72} + \frac{21}{72} = \frac{41}{72}$$

b) La probabilidad de que ambas sean del mismo color será:

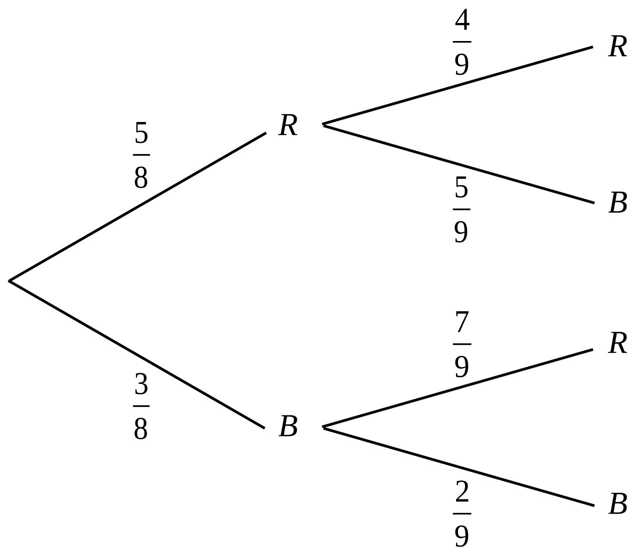
$$P\left[(R_2 \cap R_1) \cup (B_2 \cap B_1)\right] = P(R_2 \cap R_1) + P(B_2 \cap B_1) =$$
$$= P(R_2 / R_1) \cdot P(R_1) + P(B_2 / B_1) \cdot P(B_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{20}{72} + \frac{6}{72} = \frac{26}{72} = \frac{13}{36}$$

c) La probabilidad de que la primera bola sea roja si la segunda lo es la hallaremos así (aquí estamos haciendo uso del teorema de Bayes: esta es una probabilidad llamada "a posteriori").

$$P(R_1 / R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_2 / R_1) \cdot P(R_1)}{P(R_2)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{41}{72}} = \frac{\frac{20}{72}}{\frac{41}{72}} = \frac{20}{41}$$

Obsérvese que para hallar $P(R_2)$ hay que hacer uso del teorema de la probabilidad total; cosa que habíamos hecho en el apartado a).

Al igual que en el ejercicio anterior, todo es mucho más fácil si hacemos un diagrama de árbol como el siguiente, donde la primera ramificación hace referencia a la primera extracción y la segunda ramificación a la segunda extracción.



Ahora resulta muy fácil hallar las probabilidades que se piden en los tres apartados, caminando por las ramas adecuadas.

a) Probabilidad de que la segunda bola sea roja.

$$P(R_2)=P(RR)+P(BR)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{9}=\frac{20}{72}+\frac{21}{72}=\frac{41}{72}.$$

b) Probabilidad de que ambas bolas sean del mismo color.

$$P\left[(R_2\cap R_1)\cup(B_2\cap B_1)\right]=P(RR)+P(BB)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9}=\frac{20}{72}+\frac{6}{72}=\frac{26}{72}=\frac{13}{36}$$

c) Probabilidad de que la primera sea roja si la segunda lo es.

$$P(R_1/R_2)=\frac{P(R_1\cap R_2)}{P(R_2)}=\frac{P(RR)}{P(RR)+P(BR)}=\frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}}{\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{8}}=\frac{\frac{20}{72}}{\frac{41}{72}}=\frac{20}{41}$$

23. De los créditos concedidos por un banco, un 42 % lo son para clientes nacionales, un 33 % para clientes de la Unión Europea y un 25 % para individuos del resto del mundo. De esos créditos, son destinados a vivienda un 30 %, un 24 % y un 14 % según sean nacionales, de la UE o del resto del mundo. Elegido un cliente al azar, ¿qué probabilidad hay de que el crédito concedido no sea para vivienda?

Solución

Llamemos $N=\{$crédito para clientes nacionales$\}$, $UE=\{$créditos para clientes de la unión europea$\}$, $RM=\{$crédito para clientes del resto del mundo$\}$ y $V=\{$crédito destinado a vivienda$\}$.

Entonces, según el enunciado del problema, tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(N)=0,42\ ;\ P(UE)=0,33\ ;\ P(RM)=0,25\ ;$$

$$P(V/N)=0,3\ ;\ P(V/UE)=0,24\ ;\ P(V/RM)=0,14$$

Aplicando el teorema de la probabilidad total podemos hallar la probabilidad de que un crédito concedido sea para vivienda:

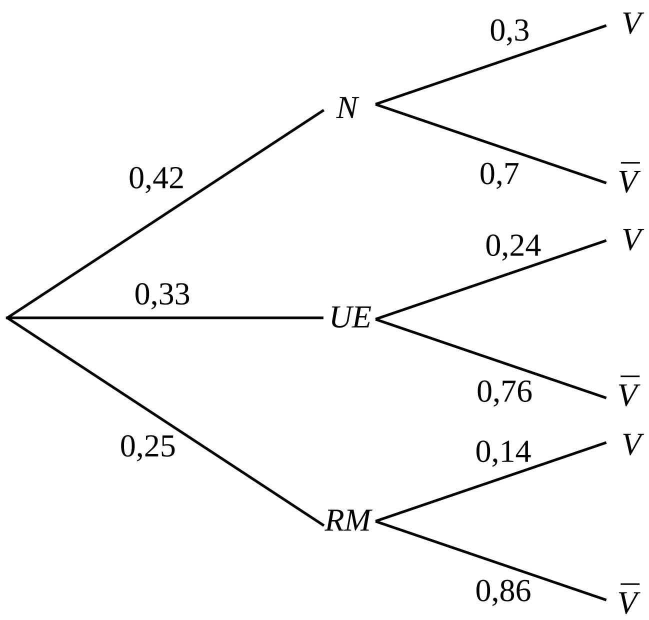
$$P(V)=P\left[(V\cap N)\cup(V\cap UE)\cup(V\cap RM)\right]=P(V\cap N)+P(V\cap UE)+P(V\cap RM)=$$

$$=P(V/N)\cdot P(N)+P(V/UE)\cdot P(UE)+P(V/RM)\cdot P(RM)=$$
$$=0,3\cdot 0,42+0,24\cdot 0,33+0,14\cdot 0,25=0,2402$$

Por tanto, la probabilidad de que el crédito concedido no sea para vivienda será:

$$P(\overline{V})=1-P(V)=1-0,2402=0,7598$$

Haciendo un diagrama de árbol es más sencillo y mucho más intuitivo realizar este ejercicio.



Ahora es evidente que la probabilidad de que el crédito concedido sea para vivienda consiste es multiplicar las probabilidades que acaben en el suceso V y sumar todas ellas:

$$P(V)=0,42\cdot 0,3+0,33\cdot 0,24+0,25\cdot 0,14=0,2402$$

Evidentemente, se puede hallar directamente lo que se pide, es decir, que el crédito concedido no sea para vivienda:

$$P(\overline{V})=0,42\cdot 0,7+0,33\cdot 0,76+0,25\cdot 0,86=0,7598$$

24. En cierta empresa se producen dos bienes A y B en la proporción 3 a 4. La probabilidad de que un bien de tipo A tenga defecto de fabricación es del 3 %, y del tipo B, del 5 %. Se analiza un bien, elegido al azar, y resulta correcto, ¿qué probabilidad existe de que sea del tipo A?

Solución

Sean los sucesos $A=$ {elegir un bien del tipo A}, $B=${elegir un bien del tipo B} y $D=${elegir un bien con defecto de fabricación}. Como la producción de los bienes A y B está en proporción de 3 a 4, quiere decir que de cada 7 bienes, 3 son del tipo A y 4 del tipo B, con lo que la probabilidad de elegir un bien del tipo A y de elegir un bien del tipo B son, respectivamente,

$$P(A)=\frac{3}{7}\quad ;\quad P(B)=\frac{4}{7}$$

Además, se conoce también la probabilidad de que un bien tenga defecto de fabricación si sabemos que es del tipo A o del tipo B:

$$P(D/A)=0,03 \quad ; \quad P(D/B)=0,05$$

Ahora analizamos un bien elegido al azar y resultado correcto, es decir, no defectuoso (esta es la condición). Debemos hallar la probabilidad de que este bien sea del tipo A.

Aplicando el teorema de Bayes se tiene:

$$P\left(A/\overline{D}\right)=\frac{P\left(A\cap\overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}=\frac{P\left(\overline{D}/A\right)\cdot P(A)}{1-P(D)}= \quad \textbf{(1)}$$

Por un lado, $P\left(\overline{D}/A\right)=1-P(D/A)=1-0,03=0,97$.

Por otro lado, la probabilidad de que un bien sea defectuoso la podemos hallar con los datos que tenemos, haciendo uso del teorema de la probabilidad total

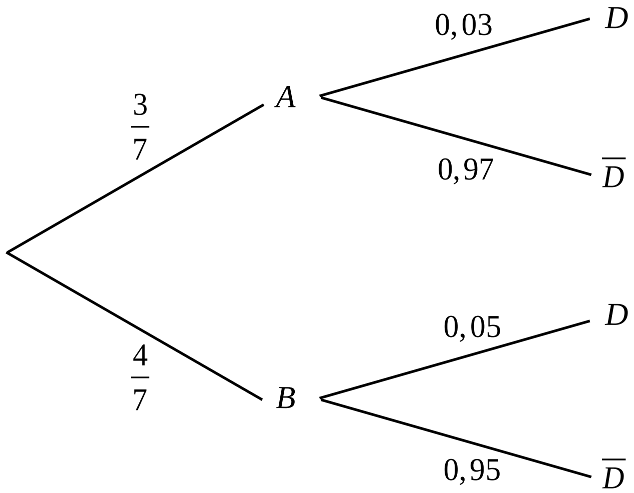
$$P(D)=P\left[(D\cap A)\cup(D\cap B)\right]=P(D\cap A)+P(D\cap B)=$$
$$=P(D/A)\cdot P(A)+P(D/B)\cdot P(B)=0,03\cdot\frac{3}{7}+0,05\cdot\frac{4}{7}=\frac{0,29}{7}\cong 0,0414$$

Por tanto:

$$\textbf{(1)} \quad =\frac{0,97\cdot\frac{3}{7}}{1-0,0414}=\frac{0,4157}{0,9586}=0,4337$$

De nuevo, al igual que en ejercicios anteriores, haciendo uso de un diagrama de árbol el ejercicio es mucho más fácil. Veámoslo.

No es difícil elaborar el siguiente diagrama. Primero hemos elegido un bien, que puede ser de tipo A o de tipo B y, a continuación, procedemos a analizar si es o no defectuosos. De esta manera el diagrama de árbol queda como sigue:



Ahora, es muy fácil hallar la probabilidad que nos piden haciendo uso de la fórmula de la probabilidad condicionada (como hemos visto anteriormente, esto es una aplicación del teorema de Bayes).

$$P\left(A/\overline{D}\right)=\frac{P\left(A\cap\overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}=\frac{P\left(A\cap\overline{D}\right)}{P\left(A\cap\overline{D}\right)+P\left(B\cap\overline{D}\right)}=\frac{\frac{3}{7}\cdot 0,97}{\frac{3}{7}\cdot 0,97+\frac{4}{7}\cdot 0,95}=\frac{0,4157}{0,9586}=0,4337$$

25. Tenemos tres urnas: U_1 con 3 bolas rojas y 5 negras, U_2 con 2 bolas rojas y 1 negra y U_3 con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna U_1?

Solución

Si llamamos U_1 al suceso "escoger la urna 1", U_2 al suceso "escoger la urna 2", U_3 al suceso "escoger la urna 3", R al suceso "extraer bola roja" y N al suceso "extraer bola negra", lo que se pide es la probabilidad "a posteriori" $P(U_1/R)$: se sabe que la bola que ha salido fue roja y nos preguntamos la por la probabilidad de que proceda de la urna U_1.

Haciendo uso del teorema de Bayes y del teorema de la probabilidad total, tenemos:

$$P(U_1/R)=\frac{P(U_1\cap R)}{P(R)}=\frac{P(R/U_1)\cdot P(U_1)}{P(R)}=\frac{P(R/U_1)\cdot P(U_1)}{P(R/U_1)\cdot P(U_1)+P(R/U_2)\cdot P(U_2)+P(R/U_2)\cdot P(U_2)}=$$

$$=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{24}}{\frac{3}{24}+\frac{2}{9}+\frac{2}{15}}=\frac{\frac{3}{24}}{\frac{45+80+48}{360}}=\frac{\frac{3}{24}}{\frac{173}{360}}=\frac{1080}{4152}\cong 0,26\,.$$

Se deja al lector la resolución del problema haciendo uso de un diagrama de árbol.

26. Se tiene una urna vacía y se lanza una moneda al aire. Si sale cara, se introduce en la urna una bola blanca y, si sale cruz, se introduce una bola negra. El experimento se repite tres veces y, a continuación, se introduce la mano en una urna, retirando una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que en la urna queden una bola blanca y otra negra?

Solución

Advertencia: este problema no es fácil de entender pero quizá no de plantear, y requiere gran atención.

Para que en la urna queden una bola blanca y otra negra después de extraer una bola, es porque en la misma había dos bolas blancas y una negra o bien dos bolas negras y una bola blanca. Llamemos $2BN$ al suceso "después de repetir el experimento tres veces, en la urna hay dos bolas blancas y una negra" y $2NB$ al suceso "después de repetir el experimento tres veces en la urna hay dos bolas negras y una blanca". Llamemos también C al suceso "salir cara al lanzar una moneda" y X al suceso "salir cruz al lanzar una moneda". Entonces,

$$P(2BN)=P(\text{salir dos caras y una cruz en tres lanzamientos de una moneda})=$$
$$=P(CCX)+P(CXC)+P(XCC)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

De manera parecida,

$$P(2NB)=P(\text{salir dos cruces y una cara en tres lanzamientos de una moneda})=$$
$$=P(XXC)+P(XCX)+P(CXX)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}\,.$$

Llamemos ahora B al suceso "extraer bola blanca" y N al suceso "extraer bola negra". Obsérvese que el suceso del cual se pide hallar su probabilidad es $(2BN\cap B)\cup(2NB\cap N)$. Así pues:

$$P\left[(2BN\cap B)\cup(2NB\cap N)\right]=P(2BN\cap B)+P(2NB\cap N)=$$

$$=P(B/2BN)\cdot P(2BN)+P(N/2NB)\cdot P(2NB)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\,.$$

27. En segundo de Bachillerato de cierto instituto hay un total de 100 estudiantes, de los cuales 40 son hombres, 30 usan gafas y 15 son hombres y usan gafas. Si seleccionamos al azar un estudiante de dicho curso:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no use gafas?

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado no usa gafas, ¿qué probabilidad hay de que sea hombre?

Solución

Llamemos H al suceso "ser hombre" y M al suceso "ser mujer". Llamemos también G al suceso "usar gafas". Según el enunciado, $P(H)=\frac{40}{100}=0,4$. Entonces, $P(M)=P(\overline{H})=1-P(H)=1-0,4=0,6$. También sabemos que $P(G)=\frac{30}{100}=0,3$ y $P(H\cap G)=\frac{15}{100}=0,15$.

a) $P(M\cap\overline{G})=P(\overline{H}\cap\overline{G})=P(\overline{H\cup G})=1-P(H\cup G)=1-\left[P(H)+P(G)-P(H\cap G)\right]=$

$=1-(0,4+0,3-0,15)=1-0,55=0,45$.

Obsérvese que en la resolución se ha utilizado una de las leyes de Morgan: $\overline{H}\cap\overline{G}=\overline{H\cup G}$.

b) $P(H/\overline{G})=\dfrac{P(H\cap\overline{G})}{P(\overline{G})}=\dfrac{P(H-G)}{1-P(G)}=\dfrac{P(H)-P(H\cap G)}{1-P(G)}=\dfrac{0,4-0,15}{1-0,3}=\dfrac{0,25}{0,7}\cong 0,357$.

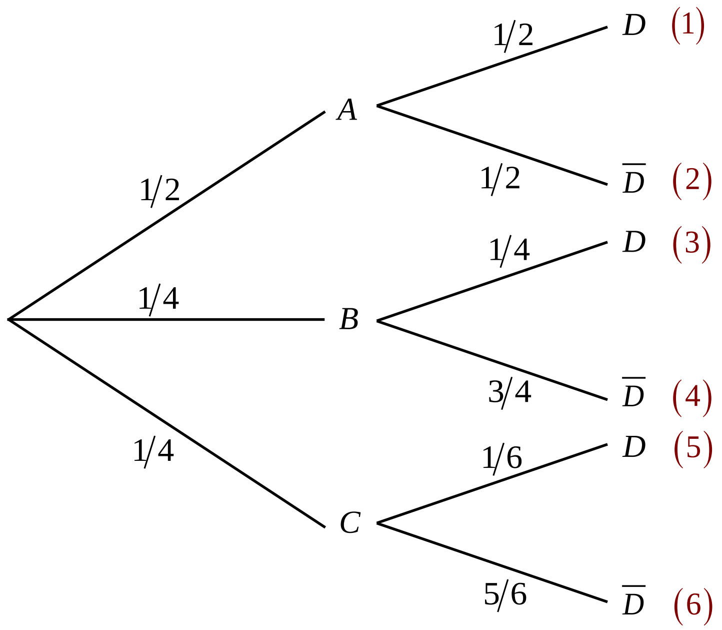
28. Una fábrica de coches tiene tres cadenas de producción: A, B y C. La cadena A fabrica el 50 % del total de coches producidos, la B el 25 % y la C el resto. Si la probabilidad de que un coche resulte defectuoso es de $\frac{1}{2}$ en la cadena A, de $\frac{1}{4}$ en la cadena B y de $\frac{1}{6}$ en la cadena C, calcula:

a) La probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido fabricado por la cadena A.

b) La probabilidad de que un coche haya sido producido por la cadena C si éste no es defectuoso.

Solución

Llamemos D al suceso "que un coche resulte defectuoso". Usaremos un diagrama de árbol.



a) $P\left(A\cap D\right)=(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

b) $P\left(C/\overline{D}\right)=\dfrac{P\left(C\cap\overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}=\dfrac{(6)}{(2)+(4)+(6)}=\dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}}=\dfrac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{5}{24}}=\dfrac{\frac{5}{24}}{\frac{31}{48}}=\frac{240}{744}=\frac{10}{31}\cong 0,32$.

29. Elvira se sabe 18 unidades de las 22 de que consta el libro de Geografía. En un examen, por medio de bolas, se eligen dos unidades al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sepa las dos?

Solución

Llamemos S al suceso “saberse una unidad de las 22 de que consta el libro? Entonces, como Elvira se sabe 18 de las 22, tenemos que $P\left(S\right)=\frac{18}{22}=\frac{9}{11}$. Si se eligen dos unidades, la probabilidad de que se sepa las dos será $P\left(S_1\cap S_2\right)=P\left(S_1\right)\cdot P\left(S_2/S_1\right)$. Se ha llamado S_1 al suceso “saberse la primera unidad que salga” y S_2 al suceso “saberse la segunda unidad que salga”. Hay que observar que Elvira se sabrá las dos unidades cuando se sepa la primera que ha salido y, en ese caso, que se sepa también la segunda”. Obsérvese también que, en este caso, los sucesos no son independientes pues, para saberse las dos (que se da por supuesto que son distintas), tiene que saberse una de ellas y, bajo esa condición, saberse también la otra. En definitiva, $P\left(S_1\cap S_2\right)=P\left(S_1\right)\cdot P\left(S_2/S_1\right)=\frac{18}{22}\cdot\frac{17}{21}=\frac{306}{462}\cong 0,662$.

30. En una urna hay tres bolas azules y cuatro verdes. Si se extraen simultáneamente dos bolas al azar, halla la probabilidad de que ambas bolas sean del mismo color.

Solución

Llamemos A al suceso “sacar bola azul” y V al suceso “sacar bola verde”. Entonces la probabilidad de que ambas bolas sean del mismo color es la de que ambas sean azules o la de que ambas sean verdes, probabilidad que podemos expresar y calcular del siguiente modo:

$$P\left[\left(A_1\cap A_2\right)\cup\left(V_1\cap V_2\right)\right]=P\left(A_1\cap A_2\right)+P\left(V_1\cap V_2\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2/A_1\right)+P\left(V_1\right)\cdot P\left(V_2/V_1\right)=$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{6}{42}+\frac{12}{42}=\frac{18}{42}=\frac{9}{21}\cong 0,42857.$$

Se puede hacer un diagrama de árbol para resolver este problema (¡inténtalo!), pero creo que se entiende razonablemente bien tal y como se ha realizado.

31. Un cajón contiene cuatro calcetines negros, seis marrones y dos azules. Si se toman dos calcetines al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean negros? ¿Y la de que ambos sean del mismo color?

Solución

Se vuelve a insistir en la utilidad del uso de diagramas de árbol en la resolución de problemas, pero llamando N al suceso “coger calcetín negro”, M al suceso “coger calcetín marrón” y A al suceso “coger calcetín azul”, por un proceso repetido ya varias veces, podemos proceder así:

$$P\left(\text{ambos negros}\right)=P\left(NN\right)=P\left(N\right)\cdot P\left(N/N\right)=\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}=\frac{12}{132}\cong 0,091.$$

$$P\left(\text{ambos del mismo color}\right)=P\left(NN\right)+P\left(MM\right)+P\left(AA\right)=\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}+\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}+\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}=\frac{44}{132}\cong 0,333.$$

32. La probabilidad de que un ciclista gane una carrera en día lluvioso es 0,08 y la de que gane una carrera en día seco es 0,3. Si la probabilidad de que el día de la carrera sea lluvioso es 0,25, ¿cuál será la probabilidad de que el ciclista gane la carrera?

Solución

Llamemos L al suceso "ser día lluvioso" y G al suceso "ganar la carrera". Haremos uso del teorema de la probabilidad total.

$$P(G)=P\left[(L\cap G)\cup(\overline{L}\cap G)\right]=P(L\cap G)+P(\overline{L}\cap G)=P(L)\cdot P(G/L)+P(\overline{L})\cdot P(G/\overline{L})=$$

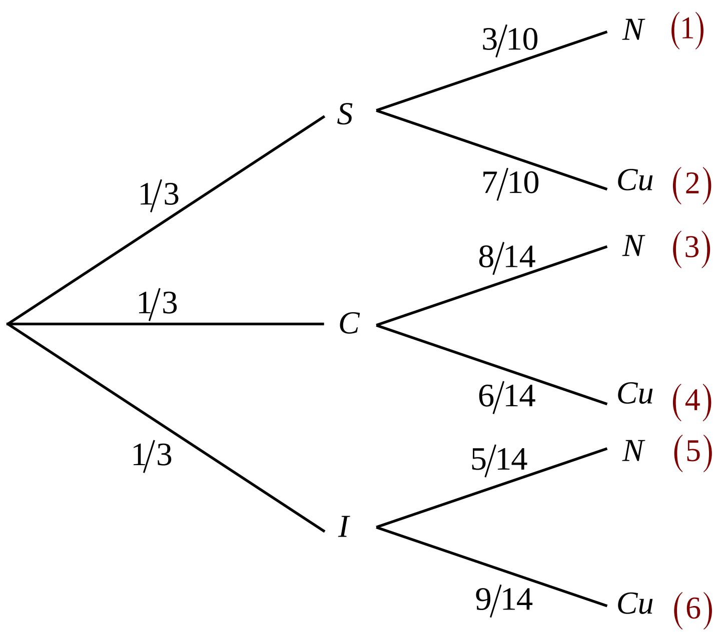
$$=0,25\cdot 0,08+0,75\cdot 0,3=0,02+0,225=0,245$$

De nuevo, si se quiere, se puede confeccionar un diagrama de árbol y comprobar que, efectivamente, se obtiene la misma solución.

33. Una librería tiene tres estantes con la siguiente composición: en el estante superior hay 3 novelas y 7 cuentos, en el estante central hay 8 novelas y 6 cuentos y en el inferior hay 5 novelas y 9 cuentos. Se escoge un estante al azar y se saca de él un libro. Si el libro ha resultado ser novela, ¿cuál es la probabilidad de que se haya sacado del estante central?

Solución

En la resolución haremos uso de un diagrama de árbol. Tendremos en cuenta que S es el suceso "escoger el estante superior", C es el suceso "escoger el estante central" y I es el suceso "escoger el estante inferior". También llamaremos N al suceso "escoger una novela" y Cu al suceso "escoger un cuento".



Entonces:

$$P(C/N)=\frac{P(C\cap N)}{P(N)}=\frac{(3)}{(1)+(3)+(5)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{14}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{14}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{14}}=\frac{\frac{4}{21}}{\frac{1}{10}+\frac{4}{21}+\frac{5}{42}}=\frac{\frac{4}{21}}{\frac{86}{210}}=\frac{40}{86}=\frac{20}{43}\cong 0,465\,.$$

Obsérvese que se trata de una probabilidad a posteriori y que también se puede calcular haciendo uso del teorema de Bayes y del teorema de la probabilidad total, tal y como se ha hecho en algún problema anterior.

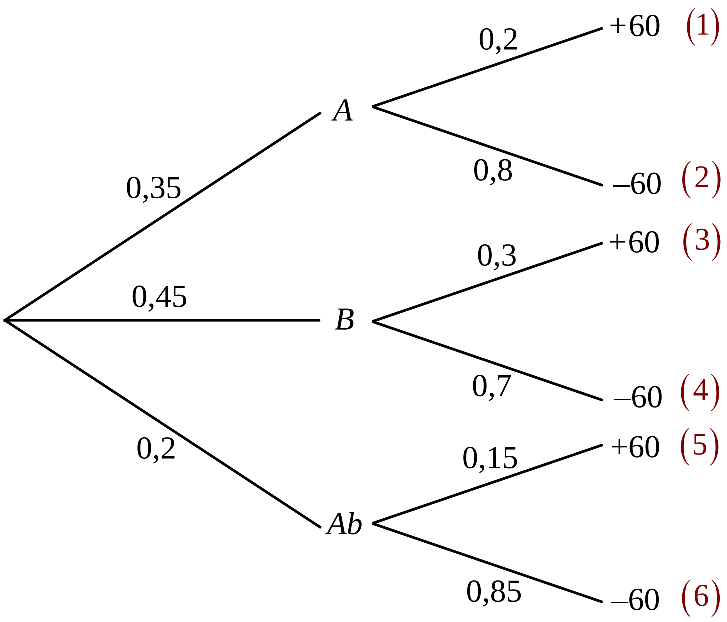
34. En una ciudad el 35 % de los censados vota al partido A, el, 45 % al partido B y el 20 % restante se abstiene. Se sabe, además, que el 20 % de los votantes del partido A, el 30 % de los votantes del partido B y el 15 % de los que se abstienen son mayores de 60 años. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un ciudadano censado, elegido al azar, sea mayor de 60 años?

b) Si dicho ciudadano es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

Solución

Un diagrama de árbol adaptado a esta situación puede ser el siguiente (el lector sabrá, con seguridad, interpretar cada uno de los sucesos y cada una de las probabilidades que aparecen en él).



a) $P(+60)=(1)+(3)+(5)=0,35\cdot 0,2+0,45\cdot 0,3+0,2\cdot 0,15=0,07+0,135+0,03=0,235$.

b) $P(Ab/+60)=\dfrac{P(Ab\cap +60)}{P(+60)}=\dfrac{(5)}{0,235}=\dfrac{0,03}{0,235}\cong 01277$.

35. Una urna A contiene 6 bolas blancas y 4 negras, una segunda urna B contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se selecciona una urna al azar y de ella se extraen 2 bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean blancas.

b) Las dos bolas sean del mismo color.

c) Las dos bolas sean de distinto color.

Solución

Vamos a hacerlo sin hacer uso de un diagrama. Esperamos que no se comprenda muy mal del todo, y que se entiendan bien las abreviaturas que se usan para cada uno de los sucesos.

a) $P\left[(BB\cap U_1)\cup(BB\cap U_2)\right]=P(BB\cap U_1)+P(BB\cap U_2)=P(U_1)\cdot P(BB/U_1)+P(U_2)\cdot P(BB/U_2)=$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{10}\cdot\dfrac{5}{9}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{4}{6}=\dfrac{30}{180}+\dfrac{20}{84}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{21}=\dfrac{17}{42}\cong 0,40476$.

b) Vamos a hallar, en primer lugar, la probabilidad de que las dos bolas sean negras. Procederemos de manera similar a como se ha hecho en el apartado anterior.

$$P\left[(NN\cap U_1)\cup(NN\cap U_2)\right]=P(NN\cap U_1)+P(NN\cap U_2)=P(U_1)\cdot P(NN/U_1)+P(U_2)\cdot P(NN/U_2)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{12}{180}+\frac{2}{84}=\frac{1}{15}+\frac{1}{42}=\frac{19}{210}\cong 0,09.$$

Entonces:

$$P(\text{las dos bolas sean del mismo color})=P(\text{las dos bolas blancas})+P(\text{las dos bolas verdes})=$$

$$=0,40476+0,09=0,4952.$$

c) Que las dos bolas sean de distinto color es lo contrario de que las dos bolas sean del mismo color. Por tanto:

$$P(\text{dos bolas sean de distinto color})=1-P(\text{dos bolas sean del mismo color})=1-0,4952=0,5048.$$

36. Un trabajador tiene que coger un determinado autobús para ir a su trabajo. Lo coge en el 80% de los casos y en esa situación la probabilidad de llegar puntual al trabajo es 0,9. Si no lo coge, llega tarde el 50% de las veces. Calcula:

a) Si llega puntual, ¿cuál es la probabilidad de que haya cogido el autobús?

b) Si llega tarde, ¿cuál es la probabilidad de que haya perdido el autobús?

Solución

Sea C el suceso “coger el autobús” y T el suceso llegar tarde al trabajo. Entonces, según el enunciado:

$$P(C)=0,8;\ P(\overline{C})=0,2;\ P(\overline{T}/C)=0,9;\ P(T/C)=0,1;\ P(\overline{T}/\overline{C})=0,5;\ P(T/\overline{C})=0,5\ .$$

a) $$P(C/\overline{T})=\frac{P(C\cap\overline{T})}{P(\overline{T})}=\frac{P(C\cap\overline{T})}{P(C\cap\overline{T})+P(\overline{C}\cap\overline{T})}=\frac{P(C)\cdot P(\overline{T}/C)}{P(C)\cdot P(\overline{T}/C)+P(\overline{C})\cdot P(\overline{T}/\overline{C})}=$$

$$=\frac{0,8\cdot 0,9}{0,8\cdot 0,9+0,2\cdot 0,5}=\frac{0,72}{0,82}\cong 0,878.$$

b) $$P(\overline{C}/T)=\frac{P(\overline{C}\cap T)}{P(T)}=\frac{P(\overline{C}\cap T)}{P(C\cap T)+P(\overline{C}\cap T)}=\frac{P(\overline{C})\cdot P(T/\overline{C})}{P(C)\cdot P(T/C)+P(\overline{C})\cdot P(T/\overline{C})}=$$

$$=\frac{0,2\cdot 0,5}{0,8\cdot 0,1+0,2\cdot 0,5}=\frac{0,1}{0,18}\cong 0,556.$$

Evidentemente, volvemos a insistir en que la confección de un diagrama de árbol puede hacer mucho más intuitiva la resolución del problema.

Obsérvese también que, en ambos apartados, se ha hecho uso tanto del teorema de Bayes (directamente) como del teorema de la probabilidad total (para hallar cada una de las probabilidades que aparecen en el denominador.

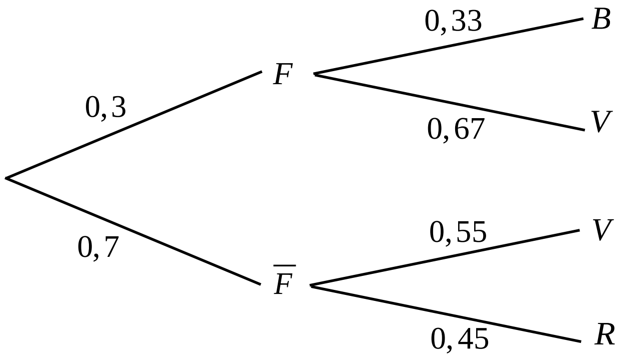
37. Extraemos una carta de una baraja española; si sale figura, extraemos una bola de la urna I; en caso contrario, la extraemos de la urna II. Las urnas tienen la siguiente composición: urna I: 4 bolas blancas y 8 bolas verdes; urna II: 6 bolas verdes y 5 bolas rojas. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) La bola es verde y de la urna II.

b) La bola es blanca.

Solución

Hagamos uso de un diagrama de árbol para resolver este problema. Para ello vamos a suponer que una baraja española tiene 40 cartas y 12 figuras (4 sotas, 4 caballos y 4 reyes). Por tanto, si llamamos F al suceso "extraer figura", tenemos que $P(F)=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}=0,3$.



a) Sacar bola de la urna II equivale a no sacar figura de la baraja. Por tanto:

$$P\left(V\cap\overline{F}\right)=0,7\cdot 0,55=0,385.$$

b) $P(B)=P(B\cap F)=0,3\cdot 0,33=0,099$.

38. La probabilidad de que una persona adquiera en una librería un periódico es de 0,4. La probabilidad de que adquiera una revista es de 0,3. La probabilidad de que adquiera ambas publicaciones es de 0,2. Calcula las probabilidades de los siguientes casos:

a) Que adquiera alguna publicación.

b) Que no adquiera ninguna.

c) Que adquiera sólo un periódico.

Solución

Llamemos A al suceso "adquirir un periódico" y B al suceso "adquirir una revista". Entonces, según el enunciado, tenemos que $P(A)=0,4$; $P(B)=0,3$ y $P(A\cap B)=0,2$.

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)+P(A\cap B)=0,4+0,3-0,2=0,5$.

b) $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-0,5=0,5$.

c) $P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0,4-0,2=0,2$.

39. Se lanzan 5 dados sobre una mesa. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan sólo números pares? ¿Y de salga al menos un seis?

Solución

Llamemos A al suceso "salir par al lanzar un dado". Entonces $P(A)=\frac{1}{2}=0,5$. Si lanzamos 5 dados, lo que salga en uno no depende para nada de lo que salga en otro. Por tanto:

$$P(\text{sólo pares})=P(A\cap A\cap A\cap A\cap A)=P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)=0,5^5=0,03125\,.$$

La probabilidad de que salga al menos un seis es justamente la contraria de la que no salga ninguno. Si llamamos B al suceso "no salir 6 al lanzar un dado", tenemos que $P(B)=\frac{5}{6}$. Por tanto:

$$P(\text{salir al menos un seis})=1-P(\text{no salir ningún seis})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^5=1-0,833^5\cong 0,5981\,.$$

40. De una baraja de 40 cartas se extraen tres naipes consecutivamente. Calcula la probabilidad de obtener la secuencia sota, caballo, rey.

Solución

Supondremos que se trata de una baraja española con cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos. Llamemos S, C y R a los sucesos "sacar sota", "sacar caballo" y "sacar rey", respectivamente. La probabilidad de que el primer naipe sea sota es $P(S)=\frac{4}{40}=0,1$. Una vez que hemos sacado una sota, quedan 39 naipes. Por tanto, la probabilidad de que el segundo naipe sea un caballo es $P(C)=\frac{4}{39}\cong 0,1026$. Y, una vez que hemos extraído una sota y un caballo, la probabilidad de sacar un rey es $P(R)=\frac{4}{38}\cong 0,105$. Entonces la probabilidad de la secuencia sota, caballo, rey ha de ser:

$$P(SCR)=\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{39}\cdot\frac{4}{38}\cong 0,1\cdot 0,1026\cdot 0,105=0,001077\,.$$