FICHA 1 Azar y Probabilidad

1) $A =$ "sacar par" $= \{2, 4, 6\}$
$B =$ "sacar múltiplo de 3" $= \{3, 6\}$
$C =$ "sacar menor que 2" $= \{1\}$

a) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$; $P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
$A \cap B = \{6\}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$
$B \cup C = \{1, 3, 6\}$; $P(B \cup C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
$B \cap C = \emptyset$; $P(B \cap C) = 0$

b) A, B no son incompatibles porque $P(A \cap B) \neq 0$
c) B y C sí son incompatibles porque $P(B \cap C) = 0$
d) $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$
$A = \{2, 4, 6\}$

$A \cap \bar{A} = \emptyset$ (sea quien sea A)
$A \cup \bar{A} = \Omega$
$A \cap \Omega = A$
$A \cup \Omega = \Omega$
$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \cup \emptyset = A$

2) $P(A) = 0'6$
$P(B) = 0'7$
$P(A \cup B) = 0'9$

a) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \boxed{0'4}$
b) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \boxed{0'3}$
c) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
$0'6 + 0'7 - 0'9 = \boxed{0'4}$

d) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Morgan}}}{=} P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0'4 = \boxed{0'6}$

3) $P(M \cup N) = 0'6$
$P(M \cap N) = 0'1$
$P(\bar{M}) = 0'7$

a) $P(M) = 1 - P(\bar{M}) = \boxed{0'3}$
b) $P(N) = ?$
$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$
$0'6 = 0'3 + P(N) - 0'1$

$P(N) = 0'6 - 0'3 + 0'1 = \boxed{0'4}$

c) $P(\bar{N}) = 1 - P(N) = \boxed{0'6}$
d) $P(\bar{M} \cup \bar{N}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Morgan}}}{=} P(\overline{M \cap N}) = 1 - P(M \cap N) = 1 - 0'1 = \boxed{0'9}$

4) a) $P(\text{oro}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0'25$

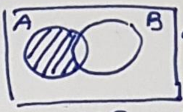
b) $P(\text{as}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0'1$

c) $P(\text{figura}) = \frac{12}{40} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0'3$

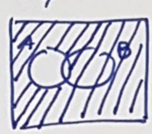
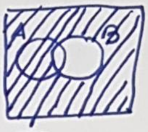
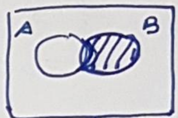
5) $\left.\begin{array}{l} P(A) = 0'7 \\ P(B) = 0'5 \\ P(A \cap B) = 0'4 \end{array}\right\}$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$
$= 0'7 + 0'5 - 0'4 = \boxed{0'8}$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Morgan}}}{=} P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \boxed{0'2}$

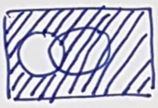
6) I. pensemos $A \cap \overline{B}$ = Los que están en A y están en $\overline{B}$ =
= los que están en A y NO están en B =  dibujo c)

II. pensemos, $\overline{A} - \overline{B}$ = los que NO están en A MENOS los que NO están en B : los que sí están en B pero no están en A i.e. $B - (A \cap B)$

 −  = 

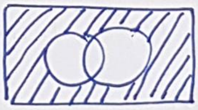
$\overline{A}$ − $\overline{B}$ dibujo a)

III. $\overline{A} \cup \overline{B}$ = losque NO están en A o NO están en B

 +  = 

$\overline{A}$ ∪ $\overline{B}$ $\overline{A \cap B}$ dibujo d)

IV. $\overline{A} \cap \overline{B}$ = Los que NO están en A y NO están en B

 claramente dibujo b)

$\overline{A \cup B}$

7) $P(A) = \frac{2}{5}$

$P(B) = \frac{1}{3}$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{3}$

a) $P(A \cup B) = ?$

como $P(\overline{A} \cap \overline{B}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Morgan}}}{=} P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = 1 - P(A \cup B)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

b) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{6+5-10}{15}$

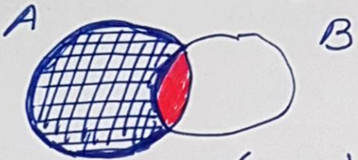
$= \boxed{\frac{1}{15}}$

8) Calcula quién es $P(A-B)$?

como $A-B = A \cap \overline{B} \Rightarrow P(A-B) = P(A \cap \overline{B})$

$A \cap \overline{B}$ = {los elementos que están en A y NO están en B} = {los elementos en A menos los de B} = $A-B$

Construyo el conjunto A como la unión disjunta de los que están en A pero NO en B, y los que están en A y B



$A = (A \cap \overline{B}) \underset{\text{disjunta}}{\cup} (A \cap B)$ por ser unión DISJUNTA

$\Rightarrow P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$

despejamos $\boxed{P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$

como $A-B = A \cap \overline{B}$ tenemos que

$\boxed{P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)}$ (*)

Análogamente: $P(B-A) = P(B \cap \overline{A}) = P(\overline{A} \cap B)$

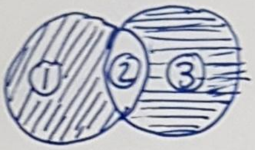
$\underset{(*)}{=} P(B) - P(B \cap A) = \boxed{P(B) - P(A \cap B)}$

Es importante este ejercicio y HAY que anotar estas fórmulas: $\boxed{\begin{array}{l} P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \\ P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \end{array}}$ porque se usan Muchísimo (ya están en el resumen)

(y esto ya lo pusieron en ABAU)

→ Demuestra que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Construimos $A \cup B$ como la unión disjunta de



$$A \cup B = \underbrace{(A \cap \overline{B})}_{1} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{2} \cup \underbrace{(B \cap \overline{A})}_{3}$$

por ser unión disjunta:

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A \cap \overline{B})} + P(A \cap B) + \underline{\underline{P(B \cap \overline{A})}} \underset{\uparrow \text{ ej. 8}}{=} \cancel{P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B)}$$

$$\underset{\uparrow \text{ ej. 8}}{=} \underbrace{P(A) - P(A \cap B)} + P(A \cap B) + \underline{\underline{P(B) - P(A \cap B)}} = \boxed{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

c.q.d.

es una fórmula importante, se usa muchísimo.

10) A, B indep. $\Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
(obviamente suponemos $P(A), P(B) \neq 0$)

NOTA para los alumnos: NUNCA, jamás, confundir $A|B$ con $A-B$

$P(A|B)$ es una probabilidad CONDICIONADA, literalmente es la probabilidad que ocurra A si ocurre B

En cambio $A - B$ es el conjunto de elementos de A MENOS los que son de B.

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

Son dos cosas distintas y NUNCA se pueden confundir

Demostración

"⇒" Supongamos A, B independientes ⇒ por definición

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$

por la definición de $P(A|B) =: \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \underset{\uparrow \text{ por ser indep.}}{=} P(A)$

⇒ despejando $\underbrace{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

c.q.d.

"⇐" Supongamos que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ tenemos que demostrar que son independientes

$$P(A|B) =: \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \underset{\uparrow \text{ hipótesis}}{=} \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$$

análogamente $P(B/A) =: \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hipótesis}}}{=} \dfrac{\cancel{P(A)}\cdot P(B)}{\cancel{P(A)}} = P(B)$

por tanto $\left.\begin{array}{l} P(A|B) = P(A) \\ P(B|A) = P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow$ A y B INDEPENDIENTES

c.q.d.

11) $\left.\begin{array}{l} P(A\cup B) = \frac{3}{4} \\ P(\overline{B}) = \frac{2}{3} \\ P(A\cap B) = \frac{1}{4} \end{array}\right\}$ ¿$P(A)$, $P(B)$, $P(\overline{A}\cap B)$?

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$P(A\cup B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ej. 9)}}}{=} P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$\frac{3}{4} = P(A) + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; despejando:

$P(A) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

$P(\overline{A}\cap B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ej. 8)}}}{=} P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \boxed{\frac{1}{12}}$

12) $\left.\begin{array}{l} A = \{1,2,3,4\} \\ B = \{1,3,5\} \\ C = \{2,4\} \end{array}\right\}$ a) $A\cup B = \{1,2,3,4,5\}$

$A\cap B = \{1,3\}$

$\overline{A} = \{5,6\}$

$\overline{B} = \{2,4,6\}$

b) $\overline{A\cup B} = \{6\}$ (mirando a))

$\overline{A\cap B} = \{2,4,5,6\}$ (mirando a))

$\overline{A}\cup\overline{B} = \{2,4,5,6\}$ (mirando a))

$\overline{A}\cap\overline{B} = \{6\}$

leyes de Morgan: ¿$P(\overline{A}\cup\overline{B}) = P(\overline{A\cap B})$?

$\frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$ Sí, se cumple

¿$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B})$?

$\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ Sí, se cumple

Ind. $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4\}$ } son sucesos INCOMPATIBLES
no tienen ningún elemento en común

$B \cup C = \{1, 3, 5, 2, 4\}$ $\qquad B \cap C = \phi$

↓

unión disjunta

13) $P(A) = 0'4$, $P(B) = 0'3$, $P(A \cap B) = 0'1$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$
$= 0'4 + 0'3 - 0'1 = \boxed{0'6}$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) \underset{\uparrow \text{Margan}}{=} P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) =$
$= 1 - 0'1 = \boxed{0'9}$

c) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0'4 - 0'1 = \boxed{0'3}$

d) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) \underset{\uparrow \text{Margan}}{=} P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \underset{\uparrow a)}{=} 1 - 0'6 = \boxed{0'4}$

14) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$

¿Son incompatibles?
para ser incompatibles $P(A \cap B) = 0$
Veamos:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3 + 6 - 8}{12} = \frac{1}{12} \neq 0 \Rightarrow$$

NO INCOMP

15) $P(A) = 0'7$, $P(B) = 0'6$, $P(A \cup B) = 0'9$

a) ¿indep?
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) =$
$= 0'7 + 0'6 - 0'9 = \boxed{0'4}$
$P(A) \cdot P(B) = 0'7 \cdot 0'6 = \boxed{0'42}$

$0'4 \neq 0'42 \Rightarrow$ NO SON INDEPENDIENTES

(cuidado con las aproximaciones decimales!)

(en ABAU si quisieras hacer aprox. decimales nunca hacerlo a MENOS de 4 cifras., con 4 son suficientes pero menos no)

b) $$P(A / \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0'7 - 0'4}{1 - 0'6} = \frac{0'3}{0'4} = \boxed{0'75}$$

$$P(B/\bar{A}) = \cancel{P(B)-P(A\cap B)}\ \frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} =$$

$$= \frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)} = \frac{0'6-0'4}{1-0'7} = \boxed{\frac{0'2}{0'3} \simeq 0'6667}$$

16) $\left.\begin{array}{l} P(A\cap B) = 0'1 \\ P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 0'6 \\ P(A/B) = 0'5 \end{array}\right\}$ a) $P(B) = ?$ $\quad P(A\cup B)$?

$$0'6 = P(\bar{A}\cap\bar{B}) \underset{\text{Morgan}}{=} P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B) = 0'6$$

$$\Rightarrow P(A\cup B) = 1-0'6 = \boxed{0'4}$$

* por $\quad 0'5 = P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0'1}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{0'1}{0'5} = \boxed{0'2}$

b) calculamos $P(A)$

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$$

$$0'1 = P(A) + 0'2 - 0'4$$

$$P(A) = 0'1 - 0'2 + 0'4 = 0'3$$

para que sean indep. $P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$

$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B) = 0'1 \quad \neq \\ P(A)\cdot P(B) = 0'3\cdot 0'2 = 0'6 \end{array}\right\}$ obviamente NO son indep.