TEMA 9
Distribución binomial

¿Qué vamos a estudiar en este tema?

1. Introducción. Conceptos previos

Antes de empezar con la distribución, vamos a repasar algunos conceptos importantes:

*** <u>Tipos de variables:</u>**

Las variables objeto de estudio se pueden clasificar en:

- **<u>Variables cualitativas</u>:** Aquellas variables que no se pueden medir numéricamente ya que hacen referencia a una cualidad o atributo (el color del pelo, deporte favorito...).

- **<u>Variables cuantitativas</u>:** Aquellas variables que se pueden medir numéricamente (la nota en un examen de matemáticas, el peso de una persona...). Se clasifican en:

  - **Discretas**: No aceptan cualquier valor. Solo aquellos que pertenecen a un conjunto.
    Ejemplo: Número de hijos: 0, 1, 2, 3...

  - **Continuas**: Pueden tomar varios valores dentro de un intervalo.
    Ejemplo: Estatura de una persona en metros: 1,23 m, 1,68 m , 1,89 m, 2,03 m...

*** <u>Factorial de un número:</u>**

El **Factorial de un número** es el producto de dicho número multiplicado por todos los números naturales menores que él hasta el uno. Se representa con una exclamación **"!"**.

Vamos a ver un par de ejemplos sencillos:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

*** <u>Número combinatorio:</u>**

Se representa como $\binom{m}{p}$ y se lee m sobre p. Se puede calcular de dos formas:

Forma 1. Usando la siguiente fórmula:

$$\boxed{\binom{m}{p} = \frac{m!}{p! \cdot (m-p)!}} \xrightarrow{\text{Ejemplo}} \boxed{\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10}$$

Forma 2. Usando la calculadora (busca la tecla que pone "nCr" o "C"):

$$\boxed{\binom{5}{2} = 5 \langle nCr \rangle 2 = 10}$$

Evidentemente la forma 2 es más rápida. ¡¡Practica con la calculadora los siguientes ejemplos!!

$\binom{4}{2} = 6$ $\binom{6}{0} = 1$ $\binom{7}{6} = 7$ $\binom{5}{5} = 1$

2. Definición y características de la distribución binomial

Una distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que se representa por $B(n,p)$ siendo n el número de ensayos o intentos y p la probabilidad de éxito.

Como veremos en los ejemplos posteriores, cumple las siguientes **características:**

1. Realizamos n veces un determinado experimento en el que consideramos únicamente la posibilidad de éxito o de fracaso (es decir tenemos solo dos opciones).

2. Estas probabilidades son constantes.

3. El resultado de cada prueba es independiente de las anteriores.

Es decir, atendiendo a estas características, serían ejemplos de distribución binomial:

* Lanzar una moneda (en la que puede salir cara o cruz).
* Tirar a canasta (en la que podemos encestar o no).
* Contestar un problema tipo test (en el que podemos acertar o no).
* Lanzar un penalti (en el que podemos marcar gol o no).

¡¡Interesante!! ¿Si lanzamos un dado de seis caras, puede ser una distribución binomial?
Lo cierto es que dependerá de la formulación de la pregunta. Si la pregunta es "¿Saldrá un 3?", será binomial ya que solo tenemos dos opciones (que salga o que no).

¡¡Importante!! En estadística y probabilidad es importante "colocarnos" en el problema, es decir, saber qué método tenemos que utilizar en cada momento para resolverlo con eficacia.

Fíjate que cualquier problema de distribución binomial podríamos resolverlo por diagrama de árbol, sin embargo, a medida que va aumentando de volumen se hace más tedioso este método. Pongamos, por ejemplo, "lanzar una moneda". Hasta 3 lanzamientos el diagrama de árbol sería manejable e incluso recomendable, sin embargo, a partir de 4 lanzamientos sería más eficaz resolverlo mediante distribución binomial.

3. Distribución binomial por fórmula

Para resolver los problemas planteados a través de una distribución binomial, **siempre podremos usar la siguiente formula:**

$$p(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Siendo:

n: Número de ensayos o intentos.

k: Número de éxitos (lo que nos pregunta el problema).

p: Probabilidad de éxito.

q: Probabilidad de fracaso. Se calcula $q = (1 - p)$

Para resolver ejercicios de distribución binomial, nos será muy útil recordar algunas formas de expresar probabilidades del tema anterior:

$$P(x < a) = 1 - P(x \geq a) \quad P(x \leq a) = 1 - P(x > a)$$

$$P(x > a) = 1 - P(x \leq a) \quad P(x \geq a) = 1 - P(x < a)$$

Veamos algunos ejemplos que nos ayudarán a ser unos "maquinas" en distribución binomial:

Ejemplo 1. Un jugador marca el 90% de los penaltis que intenta. Si lanza 8 penaltis en una temporada, calcula la probabilidad de:

a) Marcar 7 penaltis.

b) Marcar 8 penaltis.

c) Marcar más de 6 penaltis.

d) Marcar al menos 6 penaltis.

Sabemos que es un problema de distribución binomial porque cumple sus características:
"Realizamos n veces un determinado experimento en el que consideramos únicamente la posibilidad de éxito o de fracaso, siendo constantes las probabilidades y en el que el resultado de cada prueba es independiente de las anteriores".

- Antes de empezar, debemos definir la **variable aleatoria** x **y la distribución binomial:**

$x =$ **Número de penaltis marcados**

$$\left.\begin{matrix} n = 8 \\ p = 0,9 \end{matrix}\right\} \rightarrow B(8,\ 0,9) \qquad q = 1 - p \rightarrow q = 0,1 \text{ (probabilidad de fracaso)}$$

- Una vez definida la distribución, empezamos a resolver las preguntas aplicando la fórmula:

a) Probabilidad de marcar 7 penaltis ($k = 7$):

$$P(x = 7) = \binom{8}{7} 0,9^7 (1 - 0,9)^{8-7} = \mathbf{0,3826}$$

La probabilidad de que marque siete penaltis es de 0,3826

b) Probabilidad de marcar 8 penaltis ($k = 8$):

$$P(x = 8) = \binom{8}{8} 0,9^8 (1 - 0,9)^{8-8} = \mathbf{0,4305}$$

La probabilidad de que marque ocho penaltis es de 0,4305

c) Probabilidad de marcar más de 6 penaltis ($k > 6$):

Será la probabilidad de marcar 7 u 8 penaltis. Por lo tanto se expresa como:

$$P(x > 6) = P(x = 7) + P(x = 8)$$

$$P(x > 6) = 0,3826 + 0,4305 = \mathbf{0,8131}$$

La probabilidad de que marque más de seis penaltis es de 0,8131

d) Probabilidad de marcar al menos 6 penaltis ($k \geq 6$):

Será la probabilidad de marcar 6, 7 u 8 penaltis. Por lo tanto se expresa como:

$$P(x \geq 6) = P(x = 6) + P(x = 7) + P(x = 8)$$

Calculamos primero $P(x = 6)$ ya que no lo conocemos:

$$P(x = 6) = \binom{8}{6} 0,9^6 (1 - 0,9)^{8-6} = \mathbf{0,1488}$$

$$P(x \geq 6) = P(x = 6) + P(x = 7) + P(x = 8) = 0,1488 + 0,3826 + 0,4305 = \mathbf{0,9619}$$

La probabilidad de que marque al menos seis penaltis es de 0,9619

¡¡Fíjate!! **Cuidado con la diferencia entre más de seis** ($k > 6$) **y al menos seis** ($k \geq 6$).

Ejemplo 2. La probabilidad de que un tirador acierte en el blanco es del 10%. Si tira 10 veces, calcula la probabilidad de:

a) Que no acierte ninguna vez.

b) Que acierte una vez.

c) Que acierte menos de 2 veces.

d) Que acierte a lo sumo 2 veces.

Sabemos que es un problema de distribución binomial porque cumple sus características.

$x =$ Número de aciertos en el blanco

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{n = 10} \\ \boldsymbol{p = 0,1} \end{array}\right\} \to \boldsymbol{B(10,\ 0,1)} \qquad q = 1 - p \to q = 0{,}9 \ \text{(probabilidad de fracaso)}$$

a) Probabilidad de que no acierte ninguna vez en el blanco ($k = 0$):

$$\boldsymbol{P(x=0)} = \binom{10}{0} 0{,}1^0 (1-0{,}1)^{10-0} = \boldsymbol{0,3487}$$

La probabilidad de que no acierte ninguna vez en el blanco es de 0,3487

b) Probabilidad de que acierte una vez en el blanco ($k = 1$):

$$\boldsymbol{P(x=1)} = \binom{10}{1} 0{,}1^1 (1-0{,}1)^{10-1} = \boldsymbol{0,3874}$$

La probabilidad de que acierte una vez en el blanco es de 0,3874

c) Probabilidad de que acierte menos de 2 vez en el blanco ($k < 2$):

Será la probabilidad de acertar una o ninguna vez en el blanco. Por lo tanto se expresa como:

$$\boldsymbol{P(x<2) = P(x=0) + P(x=1)}$$

$$\boldsymbol{p(x<2)} = 0{,}3487 + 0{,}3874 = \boldsymbol{0,7361}$$

La probabilidad de que acierte menos de 2 veces en el blanco es de 0,7361

d) Probabilidad de que acierte a lo sumo 2 veces en el blanco ($k \le 2$):

Será la probabilidad de acertar dos, una o ninguna vez. Por lo tanto se expresa como:

$$\boldsymbol{P(x\le 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)}$$

Calculamos $P(x=2) \ \to \ \boldsymbol{P(x=2)} = \binom{10}{2} 0{,}1^2 (1-0{,}1)^{10-2} = \boldsymbol{0,1937}$

$$\boldsymbol{P(x\le 2)} = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = 0{,}3487 + 0{,}3874 + 0{,}1937 = \boldsymbol{0,9298}$$

La probabilidad de que acierte a lo sumo 2 veces en el blanco es de 0,9298

¡¡Fíjate!! **Cuidado con la diferencia entre menos de dos ($k < 2$) y a lo sumo dos ($k \le 2$).**

Ejemplo 3. El 5% de los huevos de un supermercado están rotos. Halla la probabilidad de que un cliente que compra una docena de huevos encuentre algún huevo roto.

Sabemos que es un problema de distribución binomial porque cumple sus características.

$x =$ <u>Número de huevos rotos</u>

$$\left.\begin{matrix} n = 12 \\ p = 0,05 \end{matrix}\right\} \rightarrow B(12,\ 0,05) \qquad q = 1 - p \rightarrow q = 0,95 \ \text{(probabilidad de fracaso)}$$

Probabilidad de encontrar algún huevo roto ($k \geq 1$):

Será la probabilidad de encontrar uno, dos, tres... y así hasta doce huevos rotos. Por lo tanto se expresa como: $P(x \geq 1) = P(x = 1) + P(x = 2) + \cdots + P(x = 12)$

Como esta tarea es muy trabajosa, podemos usar la probabilidad del suceso contrario y aplicarlo al problema: $P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1) = \mathbf{1 - P(x = 0)}$

Calculamos $P(x = 0) \rightarrow \mathbf{P(x = 0)} = \binom{12}{0} 0{,}05^0 (1 - 0{,}05)^{12-0} = \mathbf{0,5404}$

Luego $\mathbf{P(x \geq 1)} = 1 - P(x = 0) = 1 - 0{,}5404 = \mathbf{0,4596}$

La probabilidad de encontrar algún huevo roto en una docena será de 0,4596

Ejemplo 4. En cierto instituto aprueban matemáticas el 80% de los alumnos. Si elegimos a 10 alumnos al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Aprueben 9 alumnos.

b) Suspendan 3 alumnos.

Sabemos que es un problema de distribución binomial porque cumple sus características.

$x =$ <u>Número de alumnos que aprueban matemáticas</u>

$$\left.\begin{matrix} n = 10 \\ p = 0,8 \end{matrix}\right\} \rightarrow B(10,\ 0,8) \qquad q = 1 - p \rightarrow q = 0,2 \ \text{(probabilidad de fracaso)}$$

a) Probabilidad de que aprueben 9 alumnos ($k = 9$):

$P(x = 9) = \binom{10}{9} 0{,}8^9 (1 - 0{,}8)^{10-9} = \mathbf{0,2684}$

b) Probabilidad de que suspendan 3 alumnos. ¡¡Interesante!! Puesto que ahora la pregunta cambia, podríamos resolverlo de dos formas:

*** Forma 1: Suspender 3 alumnos implica que aprueban los 7 restantes ($k = 7$):**

$P(x = 7) = \binom{10}{7} 0{,}8^7 (1 - 0{,}8)^{10-7} = \mathbf{0,2013}$

*** Forma 2: Puesto que pregunta por "suspender", podemos alterar la distribución binomial, de manera que ahora $p = 1 - 0{,}8 = \mathbf{0{,}2}$**

$x =$ <u>Número de alumnos que suspenden matemáticas</u>

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{n = 10} \\ \boldsymbol{p = 0{,}2} \end{matrix}\right\} \rightarrow B(\mathbf{10},\ \mathbf{0{,}2})$$

Probabilidad de que suspendan 3 alumnos ($k = 3$):

$$P(x = 3) = \binom{10}{3} 0{,}2^3 (1 - 0{,}2)^{10-3} = \mathbf{0{,}2013}$$

La probabilidad de que suspendan tres alumnos matemáticas será de 0,2013

Evidentemente el resultado de ambas formas debe ser idéntico... ¡Parece más fácil la primera!

4. Parámetros de la distribución binomial

Es frecuente que nos pidan calcular los siguientes parámetros:

*** Valor esperado, esperanza matemática o media:**

Es una **medida de centralización** que representa la idea de **valor medio**. Se representa como $\boldsymbol{\mu}$ o $\boldsymbol{E(x)}$ y se calcula como el producto entre las veces que realizamos el experimento (n) y la probabilidad de éxito (p). Es decir:

$$\boxed{\boldsymbol{\mu = n \cdot p}}$$

*** Varianza:**

Es una **medida de dispersión** que nos ayuda a calcular la desviación típica. Se representa como $\boldsymbol{\sigma^2}$ y se calcula como el producto entre las veces que realizamos el experimento (n), la probabilidad de éxito (p) y la probabilidad de fracaso (q). Es decir:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma^2 = n \cdot p \cdot q}} \quad \text{Siendo } q = 1 - p$$

*** Desviación típica:**

Es una **medida de dispersión** que relaciona si los datos del experimento están cerca o lejos de la media. Se representa como $\boldsymbol{\sigma}$ y se calcula como la raíz cuadrada del producto entre las veces que realizamos el experimento (n), la probabilidad de éxito (p) y la probabilidad de fracaso (q). Es decir:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}}} \quad \text{Siendo } q = 1 - p$$

Ejemplo 5. Un examen tipo test tiene 20 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro respuestas, de la que solo una es correcta. Si se contesta aleatoriamente, calcula la media y la desviación típica.

Sabemos que es un problema de distribución binomial porque cumple sus características.

$x =$ Número de preguntas correctas en un examen

$$\left.\begin{matrix} n = 20 \\ p = 1/4 \end{matrix}\right\} \rightarrow B(20, 1/4) \qquad q = 1 - p \rightarrow q = 3/4 \text{ (probabilidad de fracaso)}$$

- Media (μ):

$$\mu = n \cdot p = 20 \cdot 1/4 = 5 \rightarrow \boxed{\mu = 5}$$

- Desviación típica (σ):

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{20 \cdot 1/4 \cdot 3/4} = \frac{\sqrt{15}}{2} \simeq 1,94 \rightarrow \boxed{\sigma \simeq 1,94}$$

5. Distribución binomial por tabla (adjunta en la página 284)

Para resolver los problemas planteados a través de una distribución binomial, también podemos hacerlo rápidamente a través de una tabla de distribución binomial **donde se reflejan los resultados de probabilidad para ciertos valores de n y p.**

Por ejemplo, si nos pidieran calcular la probabilidad para $n = 5$; $p = 0,05$; $k = 3$ **en la table de distribución binomial, simplemente tendríamos que relacionar dichos valores:**

$n = 5 \; p = 0{,}05 \; k = 3 \rightarrow \boxed{P(x = 3) = 0,0011}$

n	k	p 0,01	0,05
2	0	0,9801	0,9025
	1	0,0198	0,0950
	2	0,0001	0,0025
3	0	0,9703	0,8574
	1	0,0294	0,1354
	2	0,0003	0,0071
	3	0,0000	0,0001
4	0	0,9606	0,8145
	1	0,0388	0,1715
	2	0,0006	0,0135
	3	0,0000	0,0005
	4	0,0000	0,0000
5	0	0,9510	0,7738
	1	0,0480	0,2036
	2	0,0010	0,0214
	3	0,0000	0,0011
	4	0,0000	0,0000
	5	0,0000	0,0000

← $p = 0,05$

$n = 5 \rightarrow$

$k = 3 \rightarrow$

¡Resultado!

¡¡Importante!! Como podemos ver, es mucho más rápido usar la tabla que la fórmula, sin embargo, **la tabla está limitada a ciertos valores de n y p por lo que NO podremos usarla para resolver todos los problemas mientras que con la fórmula SÍ**

Ejemplo 6. Calcula las siguientes probabilidades por la tabla de distribución binomial si es posible:

a) $\boldsymbol{n = 6 \;\; p = 0,4 \;\; k = 5}$

b) $\boldsymbol{n = 12 \;\; p = 0,1 \;\; k = 7}$

c) $\boldsymbol{n = 3 \;\; p = 0,8 \;\; k = 2}$

$a)\; n = 6 \;\; p = 0{,}4 \;\; k = 5 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P(x = 5) = 0,0369}}$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4449	0,4225	0,3600
	1		0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4442	0,4550	0,4800
	2		0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1109	0,1225	0,1600
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2967	0,2746	0,2160
	1		0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320
	2		0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2219	0,2389	0,2880
	3		0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0369	0,0429	0,0640
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1979	0,1785	0,1296
	1		0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3953	0,3845	0,3456
	2		0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2960	0,3105	0,3456
	3		0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0985	0,1115	0,1536
	4		0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1320	0,1160	0,0778
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3295	0,3124	0,2592
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3291	0,3364	0,3456
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1643	0,1811	0,2304
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0410	0,0488	0,0768
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0881	0,0754	0,0467
	1		0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2638	0,2437	0,1866
	2		0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110
	3		0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2191	0,2355	0,2765
	4		0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0821	0,0951	0,1382
	5		0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0164	0,0205	0,0369
	6		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041

← $p = 0,4$

$n = 6$ →

$k = 5$ →

¡Resultado!

$b)\; n = 12 \;\; p = 0{,}1 \;\; k = 7 \;\rightarrow$ **No podemos hacerlo por la tabla ya que está limitada a $\boldsymbol{n = 9}$**

$c)\; n = 3 \;\; p = 0{,}8 \;\; k = 2 \;\rightarrow$ En principio, no podríamos hacerlo por la tabla ya que está limitada a $p = 0{,}5$. **Sin embargo, podemos alterar la distribución binomial, de manera que ahora $\boldsymbol{p} = 1 - 0{,}8 = \boldsymbol{0,2}$. Ahora el valor de k será $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{1}$. Por lo tanto:**

$n = 3 \;\; p = 0{,}2 \;\; k = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P(x = 1) = 0,3840}}$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400
	1		0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200
	2		0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120
	1		0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840
	2		0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960
	3		0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080

← $p = 0,4$

$n = 3$ →

$k = 1$ →

¡Resultado!

Como has podido comprobar, este método es algo más "enrevesado". Por eso usaremos generalmente la <u>fórmula</u>.

"Remix" de ejercicios del tema:
Distribución binomial
Evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad

1. Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir ", calcula razonadamente:

a) La media y la desviación típica de la variable.

b) La probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres.

Sabemos que es un problema de distribución binomial porque cumple sus características.

X = Número de múltiplos de tres que pueden salir

Los múltiplos de tres en un dado de seis caras son el número tres y el seis $\rightarrow$ $p = 1/3$

$$\left.\begin{array}{l} n = 5 \\ p = 1/3 \end{array}\right\} \rightarrow B(5, 1/3) \qquad q = 1 - p \rightarrow q = 2/3 \text{ (probabilidad de fracaso)}$$

a) - Media (μ) = $n \cdot p = 5 \cdot 1/3 = 5/3$

- Desviación típica (σ) = $\sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot 1/3 \cdot 2/3} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

b) Probabilidad de obtener cuatro o más múltiples de tres ($k \geq 4$):

Será la probabilidad de obtener cuatro o cinco múltiplos de tres. Por lo tanto se expresa como:

$P(x \geq 4) = P(x = 4) + P(x = 5)$

$P(x \geq 4) = 0{,}0410 + 0{,}0041 = \boxed{0{,}0451}$

¡¡Nota!! Hemos usado la tabla pero también podríamos haberlo calculado con la fórmula

La probabilidad de obtener cuatro o más múltiples de tres será de 0,0451

2. El 30% de los habitantes de un determinado pueblo ve un concurso de televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, de las 10 personas elegidas, estuvieran viendo el concurso:

a) Tres o menos personas.

b) Ninguna de las 10 personas a las que se ha llamado.

Sabemos que es un problema de distribución binomial porque cumple sus características.

$x =$ **Número de personas que ven el concurso**

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{n = 10} \\ \boldsymbol{p = 0,3} \end{matrix}\right\} \rightarrow \boldsymbol{B(10,\ 0,3)} \qquad q = 1 - p \rightarrow q = 0{,}7 \quad \text{(probabilidad de fracaso)}$$

a) Probabilidad de que tres o menos personas vean el concurso ($k \leq 3$):

Será la probabilidad de que vea el programa tres, dos, una o ninguna persona. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{P(x \leq 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3)}$$

$$\begin{cases} P(x = 0) = \binom{10}{0} 0{,}3^0 (1 - 0{,}3)^{10-0} = 0{,}0282 \\ P(x = 1) = \binom{10}{1} 0{,}3^1 (1 - 0{,}3)^{10-1} = 0{,}1211 \\ P(x = 2) = \binom{10}{2} 0{,}3^2 (1 - 0{,}3)^{10-2} = 0{,}2335 \\ P(x = 3) = \binom{10}{3} 0{,}3^3 (1 - 0{,}3)^{10-3} = 0{,}2668 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P(x \leq 3)} = 0{,}0282 + 0{,}1211 + 0{,}2335 + 0{,}2668 = \boldsymbol{0,6496}$$

La probabilidad de que tres o menos personas vean el concurso será de 0,6496

b) Probabilidad de que ninguna persona vea el concurso ($k = 0$):

$$\boldsymbol{P(x = 0)} = \binom{10}{0} 0{,}3^0 (1 - 0{,}3)^{10-0} = \boldsymbol{0,0282}$$

La probabilidad de que ninguna de las diez personas vea el concurso es de 0,0282

3. Se estima que en una partida de bombillas el 10% son defectuosas. Si se eligen al azar 6 bombillas de esta partida, calcula:

a) La probabilidad de que no haya ninguna bombilla defectuosa.

b) La probabilidad de obtener más de dos bombillas defectuosas.

c) La media y la desviación típica de la distribución.

Sabemos que es un problema de distribución binomial porque cumple sus características.

$x =$ **Número de bombillas defectuosas**

$$\left.\begin{array}{l} n = 6 \\ p = 0,1 \end{array}\right\} \rightarrow B(6,\ 0,1) \qquad q = 1 - p \rightarrow q = 0,9 \ \text{(probabilidad de fracaso)}$$

a) Probabilidad de que no haya ninguna bombilla defectuosa ($k = 0$):

$$P(x=0) = \binom{6}{0} 0,1^0 (1-0,1)^{6-0} = \mathbf{0,5314}$$

La probabilidad de que no haya ninguna bombilla defectuosa será de 0,5314

b) Probabilidad de obtener más de dos bombillas defectuosas ($k > 2$):

Como esta tarea es muy trabajosa, podemos usar la probabilidad del suceso contrario y aplicarlo al problema: $P(x > 2) = 1 - P(x \leq 2)$

Calculamos $P(x \leq 2)$ siendo $P(x \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$

$$\begin{cases} P(x=0) = \binom{6}{0} 0,1^0 (1-0,1)^{6-0} = 0,5314 \\ P(x=1) = \binom{6}{1} 0,1^1 (1-0,1)^{6-1} = 0,3543 \\ P(x=2) = \binom{6}{2} 0,1^2 (1-0,1)^{6-2} = 0,0984 \end{cases}$$

Luego $P(x \leq 2) = 0,5314 + 0,3543 + 0,0984 = \mathbf{0,9841}$

Por lo tanto $P(x > 2) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - 0,9841 = \mathbf{0,0159}$

La probabilidad de obtener más de dos bombillas defectuosas será de 0,0159

c) - Media (μ) $= n \cdot p = 6 \cdot 0,1 = \mathbf{0,6}$

- Desviación típica (σ) $= \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{6 \cdot 0,1 \cdot 0,9} \simeq \mathbf{0,735}$

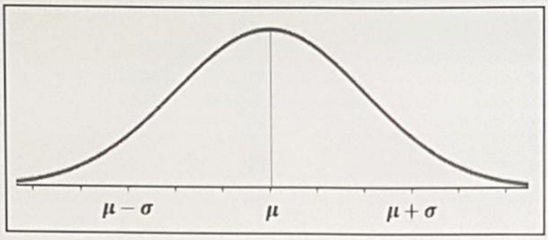
TEMA 10
Distribución normal

¿Qué vamos a estudiar en este tema?

1. Definición y características de la distribución normal

Una <u>distribución normal</u> es una distribución de probabilidad continua que se representa por $N(\mu, \sigma)$ siendo μ la media y σ la desviación típica.

Su gráfica de densidad **tiene forma de campana y es simétrica**. A esta gráfica también se la conoce como **<u>campana de Gauss</u>**.



Por debajo de la gráfica de densidad se encuentran el conjunto de todas las probabilidades del experimento y su suma es 1

2. Distribución normal <u>estándar</u> $N(0, 1)$

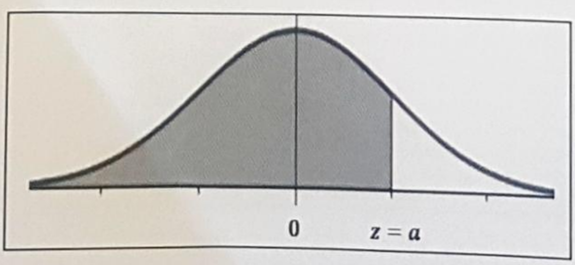
Es la distribución normal de media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$. Esta distribución presenta simetría par, es decir es simétrica respecto al eje OY.
Esta forma de distribución es muy importante, ya que nos ayudará a resolver los problemas de probabilidad asociada a cualquier tipo de distribución normal.

2.1. Tabla de distribución normal (adjunta en la <u>página 304</u>)

La distribución normal estándar lleva consigo una **<u>tabla</u>** que será nuestra herramienta de trabajo fundamental para resolver este tipo de problemas, por lo que será necesario familiarizarnos con ella y aprender a utilizarla... **¿Qué debemos conocer de ella?:**

* Para buscar probabilidades en una distribución normal estándar $N(0,1)$, denotamos la **variable z** y debemos tener en cuenta que **para nuestros cálculos no nos influirá si la inecuación está de la forma $>, \geq$ o $<, \leq$**

* La tabla está diseñada para cálculos de la forma $P(z \leq a)$, siendo a un número positivo. Fíjate que la zona gris es la probabilidad que estamos buscando:

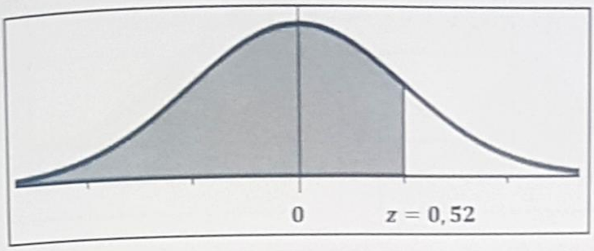


¡¡Recuerda!! La distribución estándar $N(0,1)$ presenta simetría par y por debajo de la curva se encuentran todas las probabilidades del problema cuya suma es 1

Distinguiremos los siguientes casos:

Caso 1: Si $P(z \leq \text{número positivo})$ $\xrightarrow{\text{Resolución}}$ **TABLA**

Buscaremos directamente en la tabla de distribución normal. Por ejemplo, $P(z \leq 0{,}52)$:



z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673

$$P(z \leq 0,52) = 0,6985$$

Calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(z \leq 0,73)$; b) $P(z \leq 1,47)$; c) $P(z \leq 2)$; d) $P(z \leq 3,47)$; e) $P(z \leq 5,35)$

Simplemente tendremos que buscar la solución en nuestra tabla de distribución normal:

a) $P(z \leq 0{,}73) = \mathbf{0,7673}$

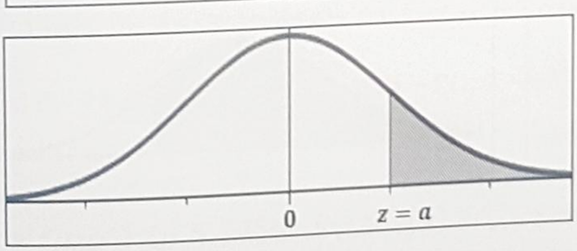
b) $P(z \leq 1{,}47) = \mathbf{0,9292}$

c) $P(z \leq 2) = \mathbf{0,9772}$

d) $P(z \leq 3{,}47) = \mathbf{0,9997}$

e) $P(z \leq 5{,}35) = \mathbf{1}$ (¡¡Fíjate!! La probabilidad a partir de $P(z \leq 3{,}7)$ siempre es 1)

Caso 2: Si $P(z \geq \text{número positivo})$ $\xrightarrow{\text{Resolución}}$ **1 − TABLA**



La tabla no permite calcular $P(z \geq \text{numero positivo})$ pero sabemos que la suma de las probabilidades es 1, entonces:

$$P(z \geq \mathrm{a}) = \mathbf{1} - P(z \leq a)$$

Calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(z \geq 0,51)$; b) $P(z \geq 1,32)$; c) $P(z \geq 3,44)$

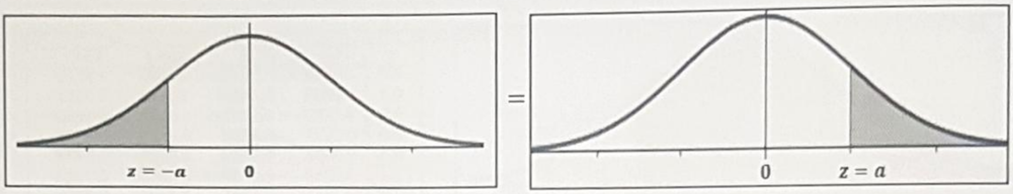
a) $P(z \geq 0{,}51) = 1 - P(z \leq 0{,}51) = 1 - 0{,}6950 = \mathbf{0,3050}$

b) $P(z \geq 1{,}32) = 1 - P(z \leq 1{,}32) = 1 - 0{,}9066 = \mathbf{0,0934}$

c) $P(z \geq 3{,}44) = 1 - P(z \leq 3{,}44) = 1 - 0{,}9997 = \mathbf{0,0003}$

Caso 3: Si $P(z \leq \text{número negativo})$ $\xrightarrow{\text{Resolución}}$ **1 − TABLA**

La tabla no permite calcular $P(z \leq \text{numero negativo})$ pero sabemos que la curva es simétrica respecto al eje OY, entonces: $\boldsymbol{P(z \leq -a) = P(z \geq a)}$



Por lo tanto, estaríamos de nuevo en el **caso 2**: $\boldsymbol{P(z \leq -a) = P(z \geq a) = 1 - P(z \leq a)}$

Calcula las siguientes probabilidades:

a) $\boldsymbol{P(z \leq -0,67)}$; **b)** $\boldsymbol{P(z \leq -1,52)}$; **c)** $\boldsymbol{P(z \leq -2,38)}$

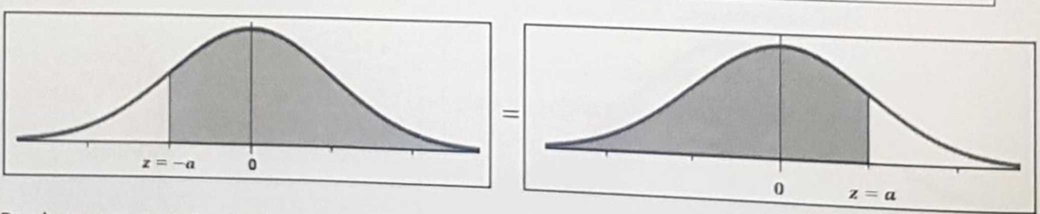
a) $P(z \leq -0{,}67) = P(z \geq 0{,}67) = 1 - P(z \leq 0{,}67) = 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$

b) $P(z \leq -1{,}52) = P(z \geq 1{,}52) = 1 - P(z \leq 1{,}52) = 1 - 0{,}9357 = 0{,}0643$

c) $P(z \leq -2{,}38) = P(z \geq 2{,}38) = 1 - P(z \leq 2{,}38) = 1 - 0{,}9913 = 0{,}0087$

Caso 4: Si $P(z \geq \text{número negativo})$ $\xrightarrow{\text{Resolución}}$ **TABLA**

La tabla no permite calcular $P(z \geq \text{numero negativo})$ pero sabemos que la curva es simétrica respecto al eje OY, entonces: $\boldsymbol{P(z \geq -a) = P(z \leq a)}$



Por lo tanto, estaríamos de nuevo en el **caso 1** que resolveremos directamente con la **tabla.**

Calcula las siguientes probabilidades:

a) $\boldsymbol{P(z \geq -0,38)}$; **b)** $\boldsymbol{P(z \geq -1,42)}$; **c)** $\boldsymbol{P(z \geq -2,81)}$

a) $P(z \geq -0{,}38) = P(z \leq 0{,}38) = \boldsymbol{0,6480}$

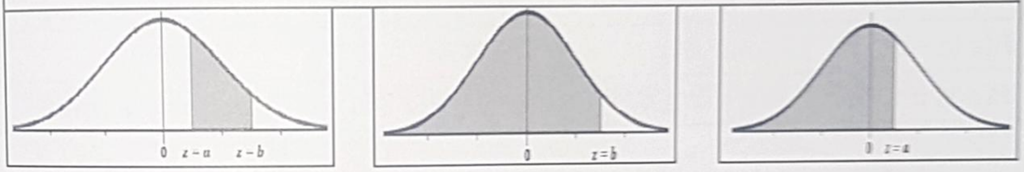
b) $P(z \geq -1{,}42) = P(z \leq 1{,}42) = \boldsymbol{0,9222}$

c) $P(z \geq -2{,}81) = P(z \leq 2{,}81) = \boldsymbol{0,9975}$

Caso 5: Si $P(a \leq z \leq b)$, donde a y b son cualquier valor y además $b > a$

Los ejercicios con intervalos son muy típicos y se resuelven haciendo la diferencia entre $P(z \leq b)$ y $P(z \leq a)$ ya que de esta forma, conseguiremos la probabilidad buscada:

$P(a \leq z \leq b)$	$=$	$P(z \leq b)$	$-$	$P(z \leq a)$



¡¡Fíjate!! En los intervalos siempre el símbolo es menor o igual ($\leq$) y tenemos que hacer la diferencia de probabilidad entre el mayor y el menor ya que si lo hiciésemos al revés, nos daría negativo. Recuerda que eso es imposible ya que la probabilidad siempre va de cero a uno.

Calcula las siguientes probabilidades:

a) $\boldsymbol{P(0,21 \leq z \leq 2,37)}$; **b)** $\boldsymbol{P(-1,37 \leq z \leq 0,76)}$

c) $\boldsymbol{P(-0,8 \leq z \leq 0,8)}$; **d)** $\boldsymbol{P(-2,45 \leq z \leq 2,45)}$

a) $P(0{,}21 \leq z \leq 2{,}37) = P(z \leq 2{,}37) - P(z \leq 0{,}21) = 0{,}9911 - 0{,}5832 = \mathbf{0,4079}$

b) $P(-1{,}37 \leq z \leq 0{,}76) = P(z \leq 0{,}76) - P(z \leq -1{,}37) =$

$= P(z \leq 0{,}76) - [1 - P(z \leq 1{,}37)] = 0{,}7764 - (1 - 0{,}9147) = \mathbf{0,6911}$

¡¡Fíjate!! Los dos siguientes ejercicios son de **<u>intervalos simétricos</u>**:

c) $P(-0{,}8 \leq z \leq 0{,}8) = P(z \leq 0{,}8) - P(z \leq -0{,}8) =$

$= P(z \leq 0{,}8) - [1 - P(z \leq 0{,}8)] = 0{,}7881 - (1 - 0{,}7881) = \mathbf{0,5762}$

d) $P(-2{,}45 \leq z \leq 2{,}45) = P(z \leq 2{,}45) - P(z \leq -2{,}45) =$

$= P(z \leq 2{,}45) - [1 - P(z \leq 2{,}45)] = 0{,}9929 - (1 - 0{,}9929) = \mathbf{0,9858}$

Para reforzar este apartado, vamos a hacer un pequeño cuadro-resumen de los casos anteriores así como un ejercicio final que los mezcle... ¡¡Vamos a ello con energía!!

CUADRO-RESUMEN DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES DISTRIBUCION NORMAL $N(0,1)$			
CASO		**RESOLUCIÓN**	
1	$P(z \leq a)$	$P(z \leq a)$	**TABLA**
2	$P(z \geq a)$	$P(z \geq a) = 1 - P(z \leq a)$	**1 −TABLA**
3	$P(z \leq -a)$	$P(z \leq -a) = P(z \geq a) = 1 - P(z \leq a)$	**1 −TABLA**
4	$P(z \geq -a)$	$P(z \geq -a) = P(z \leq a)$	**TABLA**
5	$P(a \leq z \leq b)$	$P(a \leq z \leq b) = P(z \leq b) - P(z \leq a)$	**Depende del caso**

¡¡Truco!! La **TABLA** se emplea para $P(z \leq \text{número positivo})$ por lo que si cambiamos una cosa, ya sea el signo del número o el sentido de la inecuación, tendremos **1 − TABLA** y si cambiamos los dos, tendremos de nuevo **TABLA**.

Calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(z \geq 0{,}43)$; **b)** $P(z \leq 1{,}92)$; **c)** $P(z \leq -2{,}67)$

d) $P(z \geq -1{,}72)$; **e)** $P(z \leq -1{,}5)$; **f)** $P(z \geq 5{,}37)$

a) $P(z \geq 0{,}43) = 1 - P(z \leq 0{,}43) = 1 - 0{,}6664 = \mathbf{0{,}3336}$

b) $P(z \leq 1{,}92) = \mathbf{0{,}9726}$

c) $P(z \leq -2{,}67) = 1 - P(z \leq 2{,}67) = 1 - 0{,}9962 = \mathbf{0{,}0038}$

d) $P(z \geq -1{,}72) = P(z \leq 1{,}72) = \mathbf{0{,}9573}$

e) $P(z \leq -1{,}5) = 1 - P(z \leq 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = \mathbf{0{,}0668}$

f) $P(z \geq 5{,}37) = 1 - P(z \leq 5{,}37) = 1 - 1 = \mathbf{0}$

* Distribución normal al revés

En algunos ejercicios, podrían pedirnos calcular el valor de a a partir de la probabilidad, por lo que tendremos que retroceder sobre nuestros pasos hasta llegar al inicio de la cuestión.
De esta forma, podemos distinguir los siguientes casos:

Caso 1: Si $P(z \leq a) = p$, siendo $p \geq 0{,}5$

Buscamos p dentro de la tabla y obtenemos a. Por ejemplo, si $P(z \leq a) = 0{,}7019$:

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673

¡¡Recuerda!!
Si $P(z \leq \textbf{numero positivo}) \rightarrow$ TABLA

$P(z \leq a) = 0{,}7019 \rightarrow a = \mathbf{0,53}$

Calcula los siguientes valores de a:
a) $P(z \leq a) = \mathbf{0,8186}$; **b)** $P(z \leq a) = \mathbf{0,9744}$; **c)** $P(z \leq a) = \mathbf{0,9932}$

a) $P(z \leq a) = 0{,}8186 \rightarrow a = \mathbf{0,91}$

b) $P(z \leq a) = 0{,}9744 \rightarrow a = \mathbf{1,95}$

c) $P(z \leq a) = 0{,}9932 \rightarrow a = \mathbf{2,47}$

Caso 2: Si $P(z \leq a) = p$, siendo $p < 0{,}5$

Fíjate que $p < 0,5$ no está dentro de la tabla por lo que tendremos que buscar $1 - p$.
Esto significa que a es negativa. ¡¡Recuerda!! **Si $P(z \leq -a) \rightarrow 1$ −TABLA**

Calcula los siguientes valores de a:
a) $P(z \leq a) = \mathbf{0,1038}$; **b)** $P(z \leq a) = \mathbf{0,0043}$; **c)** $P(z \leq a) = \mathbf{0,0495}$

a) $P(z \leq a) = 0{,}1038 \rightarrow P(z \leq -a) = 1 - 0{,}1038 = 0{,}8962 \rightarrow a = \mathbf{-1,26}$

b) $P(z \leq a) = 0{,}0043 \rightarrow P(z \leq -a) = 1 - 0{,}0043 = 0{,}9957 \rightarrow a = \mathbf{-2,63}$

c) $P(z \leq a) = 0{,}0495 \rightarrow P(z \leq -a) = 1 - 0{,}0495 = 0{,}9505 \rightarrow a = \mathbf{-1,65}$

Caso 3: Si $P(z \geq \text{a}) = p$, siendo $p < 0{,}5$

Como $p < 0,5$ no está dentro de la tabla, tendremos que buscar $1 - p$.

En este caso, a será positiva. ¡¡Recuerda!! **Si $P(z \geq a) \to 1$ −TABLA**

Calcula los siguientes valores de a:

a) $P(z \geq a) = 0,1814$; b) $P(z \geq a) = 0,0022$; c) $P(z \geq a) = 0,0025$

a) $P(z \geq a) = 0{,}1814 \to P(z \geq a) = 1 - 0{,}1814 = 0{,}8186 \;\to\; a = 0,91$

b) $P(z \geq a) = 0{,}0022 \to P(z \geq a) = 1 - 0{,}0022 = 0{,}9978 \;\to\; a = 2,85$

c) $P(z \geq a) = 0{,}0025 \to P(z \geq a) = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975 \;\to\; a = 2,81$

Caso 4: Si $P(z \geq \text{a}) = p$, siendo $p \geq 0{,}5$

Buscamos p dentro de la tabla y obtenemos a.

En este caso, a será negativa. ¡¡Recuerda!! **Si** $P(z \geq -a) \to$ TABLA

Calcula los siguientes valores de a:

a) $P(z \geq a) = 0,8554$; b) $P(z \geq a) = 0,9726$; c) $P(z \geq a) = 0,9893$

a) $P(z \geq a) = 0{,}8554 \;\to\; P(z \geq -a) = 0{,}8554 \;\to\; a = -1,06$

b) $P(z \geq a) = 0{,}9726 \;\to\; P(z \geq -a) = 0{,}9726 \;\to\; a = -1,92$

c) $P(z \geq a) = 0{,}9893 \;\to\; P(z \geq -a) = 0{,}9893 \;\to\; a = -2,30$

2.2. Tipificación de variables

En la mayoría de problemas de distribución normal, la variable no seguirá una distribución normal estándar, es decir, no tendrá la forma $N(0,1)$. Por lo tanto será necesario **tipificar la variable**, es decir, transformar una distribución normal de media μ y desviación típica σ cualesquiera $N(\mu,\sigma)$ en una distribución normal $N(0,1)$, para así poder acudir a la tabla de distribución normal que hemos usado hasta ahora.

La tipificación de $N(\mu,\sigma)$ a $N(0,1)$, se realiza mediante el siguiente cambio de variable:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Siendo $\rightarrow$

x: La cuestión del problema
μ: La media
σ: La desviación típica
Recuerda que σ^2 es la varianza y que $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$

¡¡IMPORTANTE!! **Los valores de la media, la desviación típica y x** tienen que estar en las mismas unidades. Por ejemplo, si en el problema nos dan la media en metros y la desviación típica en centímetros, tendremos que convertirlas a las unidades en las que esté x.

En un ejercicio que no siga una distribución $N(0,1)$ es importante seguir el orden marcado:

1. **Tipificamos la variable (cambiamos de x a z)**
2. **Resolvemos utilizando la tabla de distribución normal** (como en los ejercicios ya vistos).

¡¡Vamos a practicar con unos cuantos ejemplos!!

Ejemplo 1. Sea x una variable aleatoria que sigue una distribución normal $N(50,10)$, calcula las siguientes probabilidades:
a) $P(x \le 70)$; b) $P(x \ge 80)$; c) $P(x \ge 40)$; d) $P(x < 45)$

Definimos la distribución normal $N(50,10) \rightarrow \begin{cases} \mu = 50 \\ \sigma = 10 \end{cases}$ y tipificamos $\rightarrow P\left(z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$a)\ P(x \le 70) \overset{①}{=} P\left(z \le \frac{70-50}{10}\right) = P(z \le 2) \overset{②}{=} \mathbf{0{,}9772}$$

$$b)\ P(x \ge 80) \overset{①}{=} P\left(z \ge \frac{80-50}{10}\right) = P(z \ge 3) = 1 - P(z \le 3) \overset{②}{=} 1 - 0{,}9987 = \mathbf{0{,}0013}$$

c) $\boldsymbol{P(x \geq 40)} \overset{1}{=} P\left(z \geq \dfrac{40-50}{10}\right) = P(z \geq -1) = P(z \leq 1) \overset{2}{=} \mathbf{0,8413}$

d) $\boldsymbol{P(x < 45)} \overset{1}{=} P\left(z \leq \dfrac{45-50}{10}\right) = P(z \leq -0{,}5) = 1 - P(z \leq 0{,}5) \overset{2}{=} 1 - 0{,}6915 = \mathbf{0,3085}$

> ¡¡Recuerda!! **La distribución normal no distingue entre $<$ y $\leq$**
> **Por lo tanto se resuelve de la misma forma:** $\boldsymbol{P(x < 45) = P(x \leq 45)}$

> **Ejemplo 2. Sea x una variable aleatoria que sigue una distribución normal $\boldsymbol{N(30,5)}$,** calcula las siguientes probabilidades:
>
> **a)** $\boldsymbol{P(25 \leq x \leq 35)}$; **b)** $\boldsymbol{P(20 \leq x \leq 32,5)}$; **c)** $\boldsymbol{P(30 \leq x \leq 35)}$

Definimos la distribución normal $N(30{,}5) \rightarrow \begin{cases} \mu = 30 \\ \sigma = 5 \end{cases}$ y tipificamos $\rightarrow P\left(z \leq \dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$a)$ $\boldsymbol{P(25 \leq x \leq 35)} \overset{1}{=} P\left(\dfrac{25-30}{5} \leq z \leq \dfrac{35-30}{5}\right) = P(-1 \leq z \leq 1) =$

$= P(z \leq 1) - P(z \leq -1) = P(z \leq 1) - [1 - P(z \leq 1)] \overset{2}{=} 0{,}8413 - (1 - 0{,}8413) = \mathbf{0,6826}$

$b)$ $\boldsymbol{P(20 \leq x \leq 32,5)} \overset{1}{=} P\left(\dfrac{20-30}{5} \leq z \leq \dfrac{32{,}5-30}{5}\right) = P(-2 \leq z \leq 0{,}5) =$

$= P(z \leq 0{,}5) - P(z \leq -2) = P(z \leq 0{,}5) - [1 - P(z \leq 2)] \overset{2}{=} 0{,}6915 - (1 - 0{,}9772) = \mathbf{0,6687}$

$c)$ $\boldsymbol{P(30 \leq x \leq 35)} \overset{1}{=} P\left(\dfrac{30-30}{5} \leq z \leq \dfrac{35-30}{5}\right) = P(0 \leq z \leq 1) =$

$= P(z \leq 1) - P(z \leq 0) \overset{2}{=} 0{,}8413 - 0{,}5000 = \mathbf{0,3413}$

Ejemplo 3. En un instituto la altura media es de 1,78 m con una desviación típica de 20 cm.
Si elegimos un alumno al azar calcula la probabilidad de que:

a) Mida más de 1,85 m.

b) Mida menos de 1,7 m.

c) Mida entre 1,75 m y 1,9 m.

¡¡Cuidado!! La desviación típica tenemos que convertirla a metros $\rightarrow \sigma = 0{,}20\ m$

Definimos la distribución normal $N(1{,}78,\ \ 0{,}20) \rightarrow \begin{cases} \mu = 1{,}78 \\ \sigma = 0{,}20 \end{cases}$ y tipificamos $\rightarrow P\left(z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$a)\ P(x > 1{,}85) \overset{1}{=} P\left(z \geq \frac{1{,}85 - 1{,}78}{0{,}20}\right) = P(z \geq 0{,}35) = 1 - P(z \leq 0{,}35) \overset{2}{=} 1 - 0{,}6368 = \mathbf{0{,}3632}$$

La probabilidad de que mida más de 1,85 m. es de 0,3632

$$b)\ P(x < 1{,}7) \overset{1}{=} P\left(z \leq \frac{1{,}7 - 1{,}78}{0{,}2}\right) = P(z \leq -0{,}4) = 1 - P(z \leq 0{,}4) \overset{2}{=} 1 - 0{,}6554 = \mathbf{0{,}3446}$$

La probabilidad de que mida menos de 1,7 m. es de 0,3446

$$c)\ P(1{,}75 \leq x \leq 1{,}9) \overset{1}{=} P\left(\frac{1{,}75 - 1{,}78}{0{,}2} \leq z \leq \frac{1{,}9 - 1{,}78}{0{,}2}\right) = P(-0{,}15 \leq z \leq 0{,}6) =$$

$$= P(z \leq 0{,}6) - P(z \leq -0{,}15) = P(z \leq 0{,}6) - [1 - P(z \leq 0{,}15)] \overset{2}{=}$$

$$= 0{,}7257 - (1 - 0{,}5596) = \mathbf{0{,}2853}$$

La probabilidad de que mida entre 1,75 m y 1,9 m es de 0,2853

Ejemplo 4. La edad de una población se ajusta a una normal de media 27 años y una desviación típica de 1,5 años. Si se toman aleatoriamente 300 personas, ¿Cuántas estarán comprendidas entre los 24 y los 30 años?

Definimos la distribución normal $N(27,\ \ 1{,}5) \rightarrow \begin{cases} \mu = 27 \\ \sigma = 1{,}5 \end{cases}$ y tipificamos $\rightarrow P\left(z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$P(24 \leq x \leq 30) \overset{1}{=} P\left(\frac{24 - 27}{1{,}5} \leq z \leq \frac{30 - 27}{1{,}5}\right) = P(-2 \leq z \leq 2) = P(z \leq 2) - P(z \leq -2) =$$

$$= P(z \leq 2) - [1 - P(z \leq 2)] \overset{2}{=} 0{,}9772 - (1 - 0{,}9772) = 0{,}9544$$

$$\mathbf{300 \cdot 0{,}9544 \simeq 286}$$

El número de personas comprendidas entre los 24 y los 30 años serán 286

2.3. Aproximación de distribución binomial a normal:

En muchas ocasiones, nos será bastante útil aproximar una **distribución binomial** $B(n,p)$ a **una distribución normal** $N(\mu,\sigma)$. Generalmente podremos normalizar si se cumple que:

$$n \cdot p > 5 \quad \text{y} \quad n \cdot q > 5$$

La aproximación la haremos de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} \mu = n \cdot p \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \end{array}\right\} \rightarrow B(n,p) \rightarrow N(\mu,\sigma) \rightarrow \boxed{N\left(n \cdot p,\ \sqrt{n \cdot p \cdot q}\right)}$$

> Aproxima cuando sea posible las siguientes distribuciones de binomiales a normales:
>
> **a)** $B(100,\ 0,30)$; **b)** $B(40,\ 0,9)$

a) $B(100,\ 0{,}30) \rightarrow \begin{cases} n = 100 \\ p = 0{,}3 \\ q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 \end{cases}$

- **<u>Decidimos si podemos normalizar:</u>**

$$\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 100 \cdot 0{,}3 = \mathbf{30} > 5 \\ n \cdot q = 100 \cdot 0{,}7 = \mathbf{70} > 5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Se cumplen los requisitos, podemos normalizar}$$

- **<u>Aproximamos la distribución binomial a normal:</u>**

$$\left.\begin{array}{l} \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}3 = \mathbf{30} \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \mathbf{4{,}58} \end{array}\right\} \rightarrow B(100,\ 0{,}3) \rightarrow \boxed{N(30,\ 4{,}58)}$$

b) $B(40,\ 0{,}9) \rightarrow \begin{cases} n = 40 \\ p = 0{,}9 \\ q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1 \end{cases}$

- **<u>Decidimos si podemos normalizar:</u>**

$$\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 40 \cdot 0{,}9 = \mathbf{36} > 5 \\ n \cdot q = 40 \cdot 0{,}1 = \mathbf{4} < 5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No se cumplen los requisitos, no podemos normalizar}$$

* Corrección de continuidad. Corrección de Yates

Cuando queramos resolver un problema en el que hemos aproximado a una distribución normal, antes de tipificar para resolver, deberemos realizar una corrección de continuidad. La necesidad de esta corrección se debe a que la distribución binomial es una distribución discreta y la normal es una distribución continua.

¡¡Nota!! Puesto que puede resultar tedioso, algunos profesores no la exigen y permiten resolver el problema sin aplicar dicha corrección.

Vamos a ver como se hace el ajuste distinguiendo los siguientes casos:

Caso 1: Si $P(y \leq \mathrm{k}) = P(x \leq k + 0{,}5)$

¡¡Truco!! Si tomamos como referencia el caso 1, cada vez que cambiemos algo al $\leq$ cambiará el signo del 0,5 a negativo, mientras que si se realizan dos cambios, se mantendrá positivo:

Caso 2: Si $P(y < \mathrm{k}) = P(x \leq k - 0{,}5)$ — Cambiamos $\leq$ por $< \rightarrow$ Un cambio $(-)$

Caso 3: Si $P(y \geq \mathrm{k}) = P(x \geq k - 0{,}5)$ — Cambiamos $\leq$ por $\geq \rightarrow$ Un cambio $(-)$

Caso 4: Si $P(y > \mathrm{k}) = P(x \geq k + 0{,}5)$ — Cambiamos $\leq$ por $> \rightarrow$ Dos cambio $(+)$

Caso 5: Si $P(y = \mathrm{k}) = P(k - 0{,}5 \leq x \leq k + 0{,}5)$

¡¡Vamos a practicar con un ejercicio!!

Realiza la corrección de Yates a las siguientes probabilidades:

a) $P(y < 7)$; **b)** $P(y \geq 15)$; **c)** $P(y \leq 25)$; **d)** $P(y > 32)$

e) $P(5 < y \leq 7)$; **f)** $P(4 < y < 8)$; **g)** $P(10 \leq y < 14)$; **h)** $P(18 \leq y \leq 25)$

a) $P(y < 7) = P(x \leq 7 - 0{,}5) = \boldsymbol{P(x \leq 6,5)}$

b) $P(y \geq 15) = P(x \geq 15 - 0{,}5) = \boldsymbol{P(x \geq 14,5)}$

c) $P(y \leq 25) = P(x \leq 25 + 0{,}5) = \boldsymbol{P(x \leq 25,5)}$

d) $P(y > 32) = P(x \geq 32 + 0{,}5) = \boldsymbol{P(x \geq 32,5)}$

e) $P(5 < y \leq 7) = P(y \leq 7) - P(y < 5) = P(x \leq 7 + 0{,}5) - P(x \leq 5 - 0{,}5) =$

$= \boldsymbol{P(x \leq 7{,}5) - P(x \leq 4{,}5)}$

f) $P(4 < y < 8) = P(y < 8) - P(y < 4) = P(x \leq 8 - 0{,}5) - P(x \leq 4 - 0{,}5) =$

$= \boldsymbol{P(x \leq 7{,}5) - P(x \leq 3{,}5)}$

g) $P(10 \leq y < 14) = P(y < 14) - P(y \leq 10) = P(x \leq 14 - 0{,}5) - P(x \leq 10 + 0{,}5) =$

$= \boldsymbol{P(x \leq 13{,}5) - P(x < 10{,}5)}$

h) $P(18 \leq y \leq 25) = P(y \leq 25) - P(y \leq 18) = P(x \leq 25 + 0{,}5) - P(x \leq 18 + 0{,}5) =$

$= \boldsymbol{P(x \leq 25{,}5) - P(x < 18{,}5)}$

*** En resumen... Vamos a recopilar los pasos a seguir para resolver un problema en el que hagamos una aproximación de distribución binomial a normal:**

Pasos a seguir para resolver los problemas de aproximación a normal	
1) Decidimos si podemos normalizar	$n \cdot p > 5$ y $n \cdot q > 5$
2) Aproximamos la distribución binomial a normal	$B(n,p) \rightarrow N\left(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}\right)$
3) Aplicamos la corrección de Yates atendiendo a los casos descritos anteriormente	
4) Tipificamos la variable	$z \leq \dfrac{x - \mu}{\sigma}$
5) Resolvemos utilizando la tabla de distribución normal	

Pero... ¿Cuándo es recomendable hacer la aproximación de binomial a normal?
La emplearemos en los problemas en lo que el uso de la fórmula de la distribución binomial es poco recomendable debido a que el ejercicio se haría interminable... ¡¡Veamos ejemplos!!

Ejemplo 1. El porcentaje de libros de matemáticas prestados en una biblioteca es del 10%. Si se han prestado 200 libros, calcula la probabilidad de que se hayan prestado más de 30 libros de matemáticas.

Puesto que se han prestado 200 libros en la biblioteca y nos preguntan por la probabilidad de que se hayan prestado más de 30, tendríamos que usar la fórmula para 31, 32,33, 34....200. ¡¡Podríamos quemar la calculadora!! Así que en este caso, recurriríamos a la aproximación:

$$B(200,\ 0{,}1) \rightarrow \begin{cases} n = 200 \\ p = 0{,}1 \\ q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9 \end{cases}$$

- 1) Decidimos si podemos normalizar:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{n \cdot p} = 200 \cdot 0{,}1 = 20 > 5 \\ \boldsymbol{n \cdot q} = 200 \cdot 0{,}9 = \mathbf{180} > 5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Se cumplen los requisitos, podemos normalizar}$$

- 2) Aproximamos la distribución binomial a normal:

$$\left.\begin{array}{l} \mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}1 = \mathbf{20} \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \mathbf{4{,}24} \end{array}\right\} \rightarrow B(200,\ 0{,}1) \rightarrow \quad N(\mathbf{20},\ \mathbf{4{,}24})$$

- 3) Aplicamos la corrección de Yates ; 4) Tipificamos y 5) Resolvemos:

$$P(y > 30) = P(x \geq 30 + 0{,}5) = \boldsymbol{P(x \geq 30{,}5)} =$$

$$= P\left(z \geq \frac{30{,}5 - 20}{4{,}24}\right) = \boldsymbol{P(z \geq 2{,}48)} = 1 - P(z \leq 2{,}48) = 1 - 0{,}9934 = \mathbf{0{,}0066}$$

La probabilidad de que se hayan prestado más de 30 libros de matemáticas es de 0,0066

Ejemplo 2. El porcentaje de vacas que enferman después de suministrarles una determinada vacuna es del 2%. Si en una granja se vacuna a 600 vacas, halla:

a) El número esperado de vacas vacunadas que enfermarán.

b) La probabilidad de que, como máximo, enfermen 20 vacas vacunadas.

$$B(600,\ 0{,}02) \rightarrow \begin{cases} n = 600 \\ p = 0{,}02 \\ q = 1 - 0{,}02 = 0{,}98 \end{cases}$$

- 1) <u>Decidimos si podemos normalizar:</u>

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{n \cdot p} &= 600 \cdot 0{,}02 = \mathbf{12} > \mathbf{5} \\ \boldsymbol{n \cdot q} &= 600 \cdot 0{,}98 = \mathbf{588} > \mathbf{5} \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{ Se cumplen los requisitos, podemos normalizar}$$

- 2) <u>Aproximamos la distribución binomial a normal:</u>

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= n \cdot p = 600 \cdot 0{,}02 = \mathbf{12} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{600 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98} = \mathbf{3{,}43} \end{aligned}\right\} \rightarrow B(600,\ 0{,}02) \rightarrow \ \boldsymbol{N(12,\ 3{,}43)}$$

a) Número esperado de vacas vacunadas que enfermarán:

Nos están pidiendo la media $\rightarrow\ \mu = 12$

b) Probabilidad de que, como máximo, enfermen 20 vacas vacunadas:

- 3) <u>Aplicamos la corrección de Yates</u> ; 4) <u>Tipificamos</u> y 5) <u>Resolvemos:</u>

$$P(y \leq 20) = P(x \leq 20 + 0{,}5) = \boldsymbol{P(x \leq 20{,}5)} =$$

$$= P\left(z \leq \frac{20{,}5 - 12}{3{,}43}\right) = \boldsymbol{P(z \leq 2{,}48) = 0{,}9934}$$

La probabilidad de que, como máximo, enfermen 20 vacas vacunadas es de 0,9934

“Remix” de ejercicios del tema:

Distribución normal

Evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad

1. La variable IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Sabiendo que un IMC superior a 35 significa ser obeso, encuentra la proporción de personas adultas obesas de ese país.

Definimos la distribución normal $N(26,6) \to \begin{cases} \mu = 26 \\ \sigma = 6 \end{cases}$ y tipificamos $\to P\left(z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$\boldsymbol{P(x > 35)} = P\left(z \geq \frac{35-26}{6}\right) = P(z \geq 1{,}5) = 1 - P(z \leq 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = \boldsymbol{0{,}0668}$$

La proporción de personas adultas obesas de ese país es del 6,68%

2. Las notas que se ha obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

a) ¿Cuántos opositores han superado el 5?

b) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula la nota de corte.

Definimos la distribución normal $N(4{,}05,\ \ 2{,}5) \to \begin{cases} \mu = 4{,}05 \\ \sigma = 2{,}5 \end{cases}$ y tipificamos $\to P\left(z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

a) Número de opositores que han superado el 5:

$$\boldsymbol{P(x > 5)} = P\left(z \geq \frac{5-4{,}05}{2{,}5}\right) = P(z \geq 0{,}38) = 1 - P(z \leq 0{,}38) = 1 - 0{,}6480 = \boldsymbol{0{,}352}$$

$\boldsymbol{0{,}352 \cdot 1000 = 352}$ **352 opositores han superado el 5**

b) ¡¡OJO!! Se trata de un problema de **tipificación al revés**

Como hay 330 plazas, se adjudicarán a las 330 mayores notas:

$$\boldsymbol{P(z \geq a)} = \frac{330}{1000} = 0{,}33 \to P(z \geq a) = 1 - 0{,}33 = 0{,}6700 \ \to \ \boldsymbol{a = 0{,}44}$$

Ahora calculamos $\boldsymbol{x}$ en la fórmula de la tipificación:

$$\boldsymbol{\frac{x-\mu}{\sigma} = 0{,}44} \ \to \ x = 0{,}44 \cdot \sigma + \mu = 0{,}44 \cdot 2{,}5 + 4{,}05 = \boldsymbol{5{,}15}$$

5,15 será la nota de corte

3. Se sabe que el 30% de todos los fallos en las tuberías de plantas químicas son ocasionados por errores del operador.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que de 20 fallos en una planta química, exactamente 5 se deban a errores del operador?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallos de 20 encontrados en una planta química, se deban a errores del operador?

$$B(20,\ 0{,}3) \rightarrow \begin{cases} n = 20 \\ p = 0{,}3 \\ q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 \end{cases}$$

a) ¡¡Fíjate!! Estamos ante un problema que se podría hacer a través de distribución binomial o aproximando a normal. **Como nos preguntan por exactamente 5 fallos del operador, su resolución será más sencilla a través de distribución binomial:**

$$\boldsymbol{P(x=5)} = \binom{20}{5} 0{,}3^5 (1-0{,}3)^{20-5} = \boxed{\mathbf{0,1788}}$$

b) ¡¡Fíjate!! Este apartado también se podría hacer a través de distribución binomial o aproximando a normal. Vamos resolverlo de las dos formas para practicar ambos métodos:

*** Método 1: Por distribución binomial:** $\boldsymbol{P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2)}$

$$\boldsymbol{P(x<2)} = \boxed{\boldsymbol{P(x=0) + P(x=1)}} = 0{,}0008 + 0{,}0068 = \mathbf{0,0076}$$

$$\boxed{\begin{cases} P(x=0) = \binom{20}{0} 0{,}3^0 (1-0{,}3)^{20-0} = 0{,}0008 \\ P(x=1) = \binom{20}{1} 0{,}3^1 (1-0{,}3)^{20-1} = 0{,}0068 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{P(x \geq 2) = 1 - P(x<2) = 1 - 0,0076} = \boxed{\mathbf{0,9924}}$$

*** Método 2: Por aproximación de binomial a normal:**

- 1) Decidimos si podemos normalizar:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{n \cdot p} = 20 \cdot 0{,}3 = \mathbf{6} > 5 \\ \boldsymbol{n \cdot q} = 20 \cdot 0{,}7 = \mathbf{14} > 5 \end{array}\right\} \rightarrow$$ **Se cumplen los requisitos, podemos normalizar**

- 2) Aproximamos la distribución binomial a normal:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\mu} = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}3 = \mathbf{6} \\ \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{20 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \mathbf{2,05} \end{array}\right\} \rightarrow B(20,\ 0{,}3) \rightarrow \quad \boldsymbol{N(6,\ 2,05)}$$

- 3) Aplicamos la corrección de Yates ; 4) Tipificamos y 5) Resolvemos:

$$P(y \geq 2) = P(x \geq 2 - 0{,}5) = \boldsymbol{P(x \geq 1,5)} =$$

$$= P\left(z \geq \frac{1{,}5 - 6}{2{,}05}\right) = \boldsymbol{P(z \geq -2,19)} = P(z \leq 2{,}19) = \boxed{\mathbf{0,9857}}$$

¡¡Nota!! La pequeña diferencia se debe a que esta segunda forma es una **aproximación**

3. Se sabe que el 30% de todos los fallos en las tuberías de plantas químicas son ocasionados por errores del operador.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que de 20 fallos en una planta química, exactamente 5 se deban a errores del operador?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallos de 20 encontrados en una planta química, se deban a errores del operador?

$$B(20,\ 0{,}3) \rightarrow \begin{cases} n = 20 \\ p = 0{,}3 \\ q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 \end{cases}$$

a) ¡¡Fíjate!! Estamos ante un problema que se podría hacer a través de distribución binomial o aproximando a normal. **Como nos preguntan por exactamente 5 fallos del operador, su resolución será más sencilla a través de <u>distribución binomial</u>:**

$$\boldsymbol{P(x=5)} = \binom{20}{5} 0{,}3^5 (1-0{,}3)^{20-5} = \boxed{\mathbf{0,1788}}$$

b) ¡¡Fíjate!! Este apartado también se podría hacer a través de distribución binomial o aproximando a normal. Vamos resolverlo de las dos formas para practicar ambos métodos:

*** Método 1: Por distribución binomial:** $\boldsymbol{P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2)}$

$$\boldsymbol{P(x<2)} = \boxed{\boldsymbol{P(x=0)+P(x=1)}} = 0{,}0008 + 0{,}0068 = \mathbf{0,0076}$$

$$\boxed{\begin{cases} P(x=0) = \binom{20}{0} 0{,}3^0 (1-0{,}3)^{20-0} = 0{,}0008 \\ \\ P(x=1) = \binom{20}{1} 0{,}3^1 (1-0{,}3)^{20-1} = 0{,}0068 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{P(x \geq 2) = 1 - P(x<2) = 1 - 0,0076} = \boxed{\mathbf{0,9924}}$$

*** Método 2: Por aproximación de binomial a normal:**

- 1) <u>Decidimos si podemos normalizar:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{n \cdot p} = 20 \cdot 0{,}3 = \mathbf{6} > \mathbf{5} \\ \boldsymbol{n \cdot q} = 20 \cdot 0{,}7 = \mathbf{14} > \mathbf{5} \end{array}\right\} \rightarrow \textbf{Se cumplen los requisitos, podemos normalizar}$$

- 2) <u>Aproximamos la distribución binomial a normal:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\mu} = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}3 = \mathbf{6} \\ \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{20 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \mathbf{2,05} \end{array}\right\} \rightarrow B(20,\ 0{,}3) \rightarrow \ \boldsymbol{N(6,\ 2,05)}$$

- 3) <u>Aplicamos la corrección de Yates</u> ; 4) <u>Tipificamos</u> y 5) <u>Resolvemos:</u>

$$P(y \geq 2) = P(x \geq 2 - 0{,}5) = \boldsymbol{P(x \geq 1,5)} =$$

$$= P\left(z \geq \frac{1{,}5-6}{2{,}05}\right) = \boldsymbol{P(z \geq -2,19)} = P(z \leq 2{,}19) = \boxed{\mathbf{0,9857}}$$

¡¡Nota!! La pequeña diferencia se debe a que esta segunda forma es una **<u>aproximación</u>**

4. En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75% de los productos fabricados es de tipo A y el 25% de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5% de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2,5% de las veces.

a) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿Cuántos de ellos se espera que sean defectuosos? b) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determina, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

a) Resolveremos este apartado con un diagrama de árbol, tal como vimos en probabilidad:

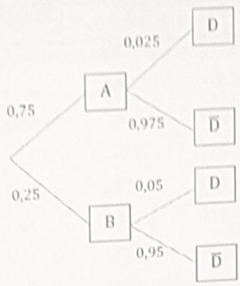
Definimos los sucesos

A: "Producto A"

B: "Producto B"

D: "Defectuoso"

$\overline{D}$: "No defectuoso"



$$P(D) = P(A) \cdot P\left(\frac{D}{A}\right) + P(B) \cdot P\left(\frac{D}{B}\right)$$

$$P(D) = 0{,}75 \cdot 0{,}025 + 0{,}25 \cdot 0{,}05$$

$$P(D) = \mathbf{0{,}03125}$$

Puesto que se han fabricado 5000 productos, el número de ellos defectuosos será:

$$P(D) = \mathbf{0{,}03125} \rightarrow 0{,}03125 \cdot 5000 = 156{,}25 \simeq \boxed{\text{156 Artículos}}$$

b) Probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas:

$$B(6000,\ 0{,}025) \rightarrow \begin{cases} n = 6000 \\ p = 0{,}025 \\ q = 1 - 0{,}025 = 0{,}975 \end{cases}$$

- 1) Decidimos si podemos normalizar:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{n \cdot p} = 6000 \cdot 0{,}025 = \mathbf{150} > \mathbf{5} \\ \boldsymbol{n \cdot q} = 6000 \cdot 0{,}975 = \mathbf{5850} > \mathbf{5} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Se cumplen los requisitos, podemos normalizar}$$

- 2) Aproximamos la distribución binomial a normal:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\mu} = n \cdot p = 6000 \cdot 0{,}025 = \mathbf{150} \\ \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{6000 \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}975} = \mathbf{12{,}09} \end{array}\right\} \rightarrow B(6000,\ 0{,}025) \rightarrow \boldsymbol{N(150,\ \ 12{,}09)}$$

- 3) Aplicamos la corrección de Yates ; 4) Tipificamos y 5) Resolvemos

$$\boldsymbol{P(y > 160)} = P(x \geq 160 + 0{,}5) = \boldsymbol{P(x \geq 160{,}5)} =$$

$$= P\left(z \geq \frac{160{,}5 - 150}{12{,}09}\right) = \boldsymbol{P(z \geq 0{,}86)} = 1 - P(z \leq 0{,}86) = 1 - 0{,}8051 = \mathbf{0{,}1949}$$

La probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas es de 0,1949

Anexo: Tabla de distribución normal

Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad 2019

1. En una clase hay 12 chicas y 8 chicos. 8 de las 12 chicas y 6 de los 8 chicos utilizan Facebook. Se escoge un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) Sea chica y utilice Facebook.

b) Sea chico, sabiendo que utiliza Facebook.

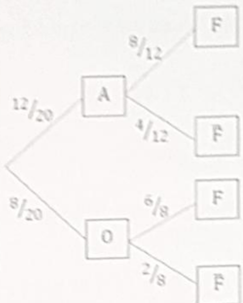
<u>Definimos los sucesos</u>

A: "Ser chica"

O: "Ser chico"

F: "Usa Facebook"

$\bar{F}$: "No usa Facebook"



$$a)\ P(A \cap F) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{12} = \frac{2}{5} = \boxed{0,4}$$

b) Puesto que nos piden calcular $P\left(O/_F\right)$, aplicaremos el <u>teorema de Bayes</u>:

$$P\left(\frac{O}{F}\right) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{8}{20} \cdot \frac{6}{8}}{\frac{12}{20} \cdot \frac{8}{12} + \frac{8}{20} \cdot \frac{6}{8}} = \frac{0,3}{0,7} = \boxed{0,43}$$

2. Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.
Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media $5,6$ y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8,2$ es $0,67$, calcule σ.

Definimos la distribución normal $N(5,6,\ \sigma) \rightarrow \begin{cases} \mu = 5,6 \\ \sigma = ? \end{cases}$ y tipificamos $\rightarrow P\left(z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$P(x \leq 8,2) = P\left(z \leq \frac{8,2-5,6}{\sigma}\right) = P\left(z \leq \frac{2,6}{\sigma}\right) = 0,67$$

Buscamos $0,6700$ dentro de la tabla de distribución normal y en los márgenes obtendremos $0,44$. Por lo tanto:

$$\frac{2,6}{\sigma} = 0,44 \ \rightarrow \ \sigma = \frac{2,6}{0,44} \ \rightarrow \ \boxed{\sigma = 5,91}$$

3. La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

$$a)\ \left.\begin{matrix} \boldsymbol{n=10} \\ \boldsymbol{p=0,1} \end{matrix}\right\} \rightarrow \boldsymbol{B(10,\ 0,1)} \qquad q = 1-p \rightarrow \boldsymbol{q=0,9}\ \text{(probabilidad de fracaso)}$$

Probabilidad de que al menos 2 de ellos sigan vivos dentro de 5 años ($k \geq 2$):

$$\boldsymbol{P(x \geq 2) = 1 - P(x<2) = 1 - [P(x=0) + P(x=1)]}$$

$$\begin{cases} P(x=0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot (1-0{,}1)^{10-0} = 0{,}3487 \\ P(x=1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot (1-0{,}1)^{10-1} = 0{,}3874 \end{cases}$$

Luego $\boldsymbol{P(x \geq 2)} = 1 - [P(x=0) + P(x=1)] = 1 - (0{,}3487 + 0{,}3874) = \boxed{\boldsymbol{0,2639}}$

$$b)\ \left.\begin{matrix} \boldsymbol{n=200} \\ \boldsymbol{p=0,1} \end{matrix}\right\} \rightarrow \boldsymbol{B(200,\ 0,1)} \qquad q = 1-p \rightarrow \boldsymbol{q=0,9}\ \text{(probabilidad de fracaso)}$$

Probabilidad de que al menos 10 de ellos sigan vivos dentro de 5 años ($k \geq 10$):

- 1) ¡¡Fíjate!! **<u>Podemos normalizar puesto que:</u>**

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{n \cdot p} = 200 \cdot 0{,}1 = \boldsymbol{20 > 5} \\ \boldsymbol{n \cdot q} = 200 \cdot 0{,}9 = \boldsymbol{180 > 5} \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Se cumplen los requisitos, podemos normalizar}$$

- 2) <u>Aproximamos la distribución binomial a normal:</u>

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{\mu} = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}1 = \boldsymbol{20} \\ \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \boldsymbol{4,24} \end{matrix}\right\} \rightarrow B(200,\ 0{,}1) \rightarrow \boldsymbol{N(20,\ 4,24)}$$

- 3) <u>Aplicamos la corrección de Yates</u> ; 4) <u>Tipificamos</u> y 5) <u>Resolvemos:</u>

$$P(y \geq 10) = P(x \geq 10 - 0{,}5) = \boldsymbol{P(x \geq 9,5)} =$$

$$= P\left(z \geq \frac{9{,}5-20}{4{,}24}\right) = \boldsymbol{P(z \geq -2,48)} = P(z \leq 2{,}48) = \boxed{\boldsymbol{0,9934}}$$

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad 2020

1. Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,25$; $P(A \cap B) = 0,125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

b) ¿Son A y B independientes?

c) Calcular la probabilidad $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ (donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).

d) Calcular $P(\overline{B}|A)$.

a) Estudiamos si los sucesos C y $A \cup B$ son compatibles:

$$\begin{cases} P(C \cap A) = 0 \\ P(C \cap B) = 0 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{P(C \cap (A \cup B)) = 0}$$

Si C es incompatible con A y con B, entonces C es incompatible con $A \cup B$.

b) Estudiamos si los sucesos A y B son independientes:

¿ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$?

$0,125 = 0,5 \cdot 0,25$

$\boldsymbol{0,125 = 0,125}$

Son sucesos independientes ya que $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

c) Cálculo de la probabilidad $P(\overline{A} \cap \overline{B})$:

$$\boldsymbol{P(\overline{A} \cap \overline{B})} = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,625 = \boldsymbol{0,375}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,25 - 0,125 = 0,625$$

d) Cálculo de $P(\overline{B}|A)$:

$$\boldsymbol{P\left(\frac{\overline{B}}{A}\right)} = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,375}{0,5} = \boldsymbol{0,75}$$

$$P(\overline{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) = 0,5 - 125 = 0,375$$

2. La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0,6; 0,3 y 0,1 respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es 0,25 para los barcos de bajo tonelaje; 0,4 para los de tonelaje medio y 0,6 para los de tonelaje alto.

a) Si llega un barco al puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento.

b) Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio.

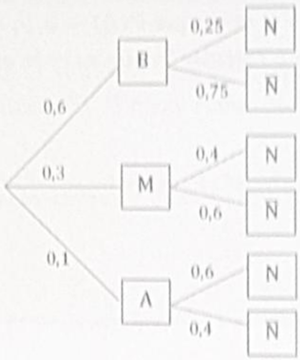
<u>Definimos los sucesos</u>

B: "Tonelaje bajo"

M: "Tonelaje medio"

A: "Tonelaje alto"

N: "Necesita mantenimiento"



a) Probabilidad de que, si llega un barco al puerto, necesite mantenimiento:

$$\boldsymbol{P(N)} = P(B) \cdot P\left(\frac{N}{B}\right) + P(M) \cdot P\left(\frac{N}{M}\right) + P(A) \cdot P\left(\frac{N}{A}\right)$$

$$\mathbf{P(N)} = 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 = \mathbf{0{,}33}$$

b) Probabilidad de que, si un barco ha necesitado mantenimiento, sea de tonelaje medio:

Aplicamos el <u>teorema de Bayes</u>:

$$\boldsymbol{P\left(\frac{M}{N}\right)} = \frac{P(M \cap N)}{P(N)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}4}{0{,}33} = 0{,}36$$

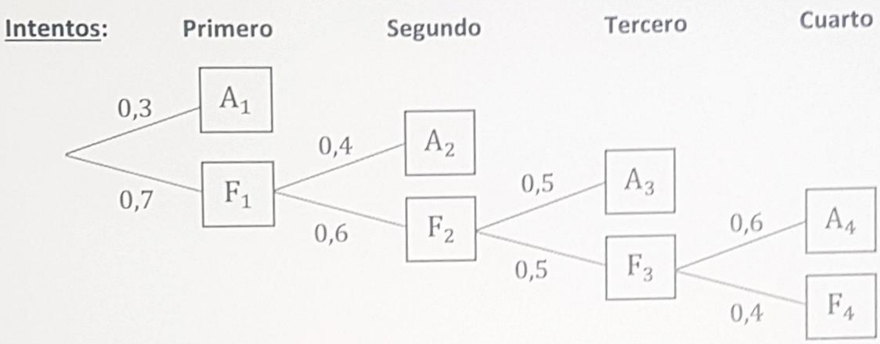
3. Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%.
En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Una vez que acierte ya termina el juego:



a) Probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo:

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

$\boldsymbol{P} = 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = \mathbf{0{,}79}$

b) Probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo:

$\boldsymbol{P(fallar\ todo)} = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = \mathbf{0{,}084}$

c) Probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo:

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{n = 10} \\ \boldsymbol{p = 0{,}85} \end{matrix}\right\} \rightarrow \boldsymbol{B(10,\ 0{,}85)}$$

$$p(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\boldsymbol{p(x = 6)} = \binom{10}{6} 0{,}85^6 \cdot 0{,}15^4 = \mathbf{0{,}0401}$$