BLOQUE II GEOMETRÍA

MADRID 2021

MODELO

1. (VECTORIAL, COMPLETO, SENCILLO) Se consideran los puntos A(3, 1, 2), B(0, 3, 4) y P(–1, 1, 0). Se pide:
   a. Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores AB y PQ son linealmente dependientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.
   b. Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta r que contiene a A y P, y de la recta s que contiene a B y al punto C(2, –1, –2).
   c. Calcular el coseno del ángulo formado por PA y PB

2. (DISTANCIA Y POSICIÓN RELATIVA FÁCIL Y PROBLEMA DE GEOMETRÍA DIFÍCIL DE VER) Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x+2z=1 \\ y+z=2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$
   a. Hallar la distancia del origen a la recta s
   b. Determinar la posición relativa de r y s.
   c. Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a ambas rectas.

ORDINARIA

3. (COMPLETO Y ASEQUIBLE) Sea el plano y la recta: $\pi \equiv 2x+y-z+3=0$ $\quad r \equiv \begin{cases} -x-y+z=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases}$
   a. Calcular el ángulo que forman r y π.
   b. Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano z y − = 0
   c. Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

4. SEAN LOS PLANOS. $\pi_1 \equiv x+y=1$ y $\pi_2 \equiv x+z=1$.
   a. Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.
   b. Halle la recta que pasa por el punto (0, 2, 0) y es perpendicular al plano π_2.
   c. Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes X e Y

EXTRAORDINARIA

5. (COMPLETO, SENCILLO Y CORTO) Dado el punto A(1,0,-1), la recta $r \equiv x-1=y+1=\frac{z-2}{2}$ y el plano: $\pi \equiv x+y-z=6$
   a. Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.
   b. Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.
   c. Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

6. Dadas las rectas: $r \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+4}{-3}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$
   a. Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.
   b. Calcule la distancia entre r y s.

$\boxed{1}$ a) $\left.\begin{array}{l} A(3,1,2) \\ B(0,3,4) \end{array}\right\}$ $\vec{AB} = B - A = (0,3,4) - (3,1,2) = (-3,2,2)$ (P.1)

$\left.\begin{array}{l} P(-1,1,0) \\ Q(x,y,z) \end{array}\right\}$ $\vec{PQ} = Q - P = (x,y,z) - (-1,1,0) = (x+1, y-1, z)$

para que tengan el mismo módulo, la misma dirección y sentido contrario : $(x+1, y-1, z) = (3,-2,-2)$

$\left.\begin{array}{l} x = 3-1 = 2 \\ y = -2+1 = -1 \\ z = -2 \end{array}\right\}$ $\boxed{Q(2,-1,-2)}$

b) r recta que pasa por A y P

pto $A(3,1,2)$, $\vec{d_r} = \vec{AP} = P - A = (-1,1,0) - (3,1,2) = (-4,0,-2)$

$r \equiv \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

s recta que pasa por $B(0,3,4)$ y $C(2,-1,-2) = Q$

$\vec{d_s} = \vec{BC} = C - B = (2,-1,-2) - (0,3,4) = (2,-4,-6)$

$S \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 3 - 4\lambda \\ z = 4 - 6\lambda \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$I = s \cap r \Rightarrow$ $\begin{array}{l} 3 - 4t = 2\lambda \\ 1 = 3 - 4\lambda \\ 2 - 2t = 4 - 6\lambda \end{array}$ $\Rightarrow 1 - 3 = -4\lambda \Rightarrow -2 = -4\lambda$ $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$

Veamos si se cumplen las 3 identidades : $2 - 2t = 4 - 6\frac{1}{2}$

$2 - 2t = 4 - 3 \Rightarrow -2t = 1 - 2 \Rightarrow -2t = -1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

¿ $3 - 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)$?

$3 - 2 = 1$ $\underline{\underline{\text{Sí}}}$

$\Rightarrow \exists\ I = s \cap r$ $\quad I = \left(2\frac{1}{2},\ 3 - 4\frac{1}{2},\ 4 - \frac{6}{2}\right) =$

$= \boxed{(1,1,1)}$

c) $\cos(\vec{PA}, \vec{PB})$ $\quad \vec{PA} \cdot \vec{PB} = |\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}| \cos\alpha$

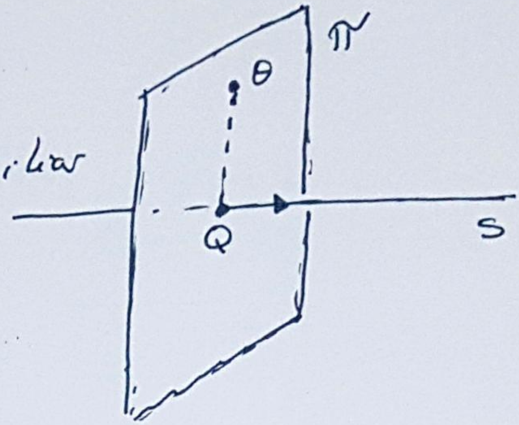
$\vec{PA}(+4,0,+2)$ $\quad \cos\alpha = \left|\dfrac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{|\vec{PA}|\,|\vec{PB}|}\right| = \left|\dfrac{+4 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 4}{\sqrt{16+4} \cdot \sqrt{1+4+16}}\right| =$

$\vec{PB} = (0,3,4) - (-1,1,0) = (1,2,4)$

$= \left|\dfrac{+4+8}{\sqrt{20}\sqrt{21}}\right| = \left|\dfrac{+12}{\sqrt{20}\sqrt{21}}\right|$

$\alpha = \arccos \frac{12}{\sqrt{\ }\ldots}$; $\ldots 51^{\circ}0'21\,\alpha''$ [illegible]

$\boxed{2}$ $r \equiv \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} \ldots \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$



a) $d(s, \theta)$

$\theta = (0,0,0)$

Construyo un plano auxiliar π t.q. $s \perp \pi$ basta tomar $\vec{d_s} = \vec{n_\pi}$ y contenga a $\theta \in \pi$

$\vec{d_s} = (2, -1, 1) = \vec{n_\pi}$

$\left.\begin{array}{l} \pi: 2x - y + z + D = 0 \\ \text{como } (0,0,0) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow 0 - 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$

$\pi \equiv 2x - y + z = 0$

Calculo $Q = s \cap \pi \Rightarrow 2(-3+2\lambda) - (2-\lambda) + (1+\lambda) = 0$

sust. en ec. plano los valores x, y, z de la ec. paramétrica de s

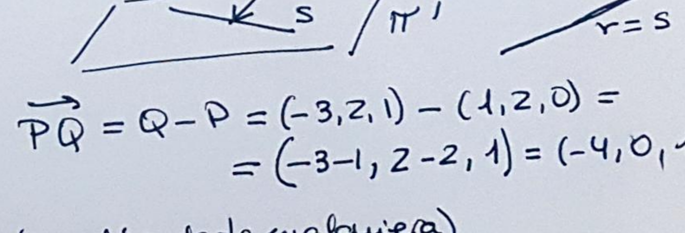
$-6 + 4\lambda - 2 + \lambda + 1 + \lambda = 0$; $6\lambda = 7 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{7}{6}}$ sustituyo en la ec. paramétrica de s $\Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2\left(\frac{7}{6}\right) = -3 + \frac{7}{3} = \frac{-9+7}{3} = -\frac{2}{3} \\ y = 2 - \lambda = 2 - \frac{7}{6} = \frac{12-7}{6} = \frac{5}{6} \\ z = 1 + \lambda = 1 + \frac{7}{6} = \frac{6+7}{6} = \frac{13}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{Q = \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{13}{6}\right)}$

$d(s, \theta) = d(\theta, Q) = |\vec{\theta Q}| = |Q - \theta| = \left|\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{13}{6}\right)\right| =$

$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{25}{36} + \frac{169}{36}} = \sqrt{\frac{210}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{210} \simeq \boxed{2'4152 \text{ u}}$

b) Posición relativa r y s



Calculo el vector $\vec{PQ}$ donde $P \in r$, $Q \in s$

$P(1,2,0)$, $Q(-3,2,1)$

$\vec{PQ} = Q - P = (-3,2,1) - (1,2,0) =$
$= (-3-1, 2-2, 1) = (-4, 0, 1)$

Lo saqué de la ec. de r dándole a z un valor, en este caso z=0 (por comodidad, podía darle cualquiera)

Calculo $\vec{d_r}$

$$r \equiv \begin{cases} x + 2z = 1 \rightarrow \vec{n}_{\pi_1}(1,0,2) \\ y + z = 2 \rightarrow \vec{n}_{\pi_2}(0,1,1) \end{cases} \quad \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(0-2) - \vec{j}(1-0) + \vec{k}(1) = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = \boxed{(-2,-1,1)}$$

$\underbrace{\text{Tenemos}}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d_r}(-2,-1,1) \\ \vec{d_s}(2,-1,1) \\ \vec{PQ}(-4,0,1) \end{array}\right\} \text{ construyo la matriz } \begin{pmatrix} \vec{d_r} \\ \vec{d_s} \\ \vec{PQ} \end{pmatrix} = A$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y estudio su rango}$$

$r(A) \geq 2$

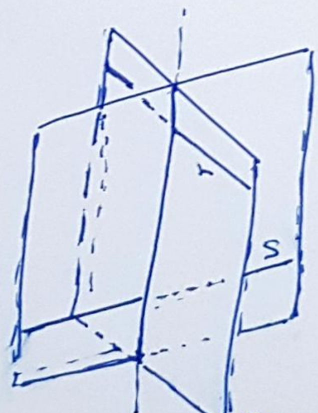
$$\det A = 2 + 0 + \cancel{4} - \cancel{4} - 0 + 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

los 3 vectores son l. indep $\Rightarrow$ las rectas se cruzan

c) busco una recta t que sea $\begin{array}{l} t \perp r \\ t \perp s \end{array}$ y además

$t \cap r \neq \phi$

$t \cap s \neq \phi$



Construyo 2 planos auxiliares

Π_r tq. $r \subset \Pi_r$; $P \in \Pi_r$ y los vectores directores de Π_r sean $\vec{d_r}$ y $\vec{d_t}$

2 vectores, 1 pto

Π_s tq $s \subset \Pi_s$, $Q \in \Pi_s$ vectores directores $\vec{d_s}$ y $\vec{d_t}$

2 vectores, 1 pto

$$\Rightarrow t \equiv \begin{cases} \Pi_r \\ \Pi_s \end{cases}$$

* Calculo $\vec{d_t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1+1) - \vec{j}(-2-2) + \vec{k}(2+2)$

$$= 4\vec{j} + 4\vec{k} = (0,4,4)$$

También me vale $(0,1,1)$ (por tomar un vector unitario)

Π_r $P(1,2,0)$

$\vec{d_r}(-2,-1,1)$

$\vec{d_t}(0,1,1)$

$$\Pi_r = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cancel{(x-1)(-1)-2z}$$

$\pi_r \begin{cases} P(1,2,0) \\ \vec{d_r}(-2,-1,1) \\ \vec{d_t}(0,1,1) \end{cases}$ $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)(-1-1) - (y-2)(-2) + z(-2) = 0$

$(x-1)(-2) + 2y - 4 - 2z = 0$

$-2x + 2 + 2y - 4 - 2z = 0$

$-2x + 2y - 2z = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -x + y - z = 1$

ó tambien

$\boxed{x - y + z - 1 = 0}$

$\pi_s \cdot \begin{cases} Q(-3,2,1) \\ \vec{d_s}(2,-1,1) \\ \vec{d_t}(0,1,1) \end{cases}$ $\begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$(x+3)(-1-1) - (y-2)(2-0) + (z-1)(2-0) = 0$

$(x+3)(-2) - 2(y-2) + 2(z-1) = 0$

$-2x - 6 - 2y + 4 + 2z - 2 = 0$

$-2x - 2y + 2z - 4 = 0$ ó también $\boxed{x + y - z + 2 = 0}$

$\Rightarrow$ la recta buscada es la intersección de los 2 planos

$$\boxed{t \equiv \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}}$$

$\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$

$\boxed{3}$ $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$

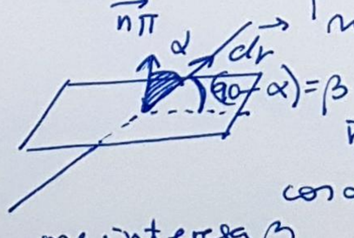
$\vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$

1º) posición relativa de r y π

$\vec{i}(1-3) - \vec{j}(1-2) + \vec{k}(-3+2) = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = \boxed{(-2,1,-1)}$

$\boxed{\vec{n_\pi}\ (2,1,-1)}$; $\vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{no pueden ser ni coincidentes} \\ \text{ni paralelos} \end{cases}$

$\Rightarrow r$ y π secantes



$\alpha + \beta = 90°$

$\vec{n_\pi} \cdot \vec{d_r} = |\vec{n_\pi}||\vec{d_r}|\cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{n_\pi} \cdot \vec{d_r}}{|\vec{n_\pi}|\,|\vec{d_r}|}$

me interesa β

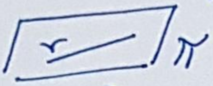
$\beta = 90 - \alpha$

como $\sin\beta = \cos\alpha \Rightarrow$

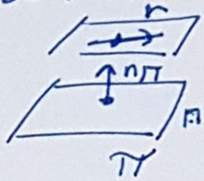
$\boxed{3}$ $r \equiv \begin{cases} -x-y+z=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases}$ $\qquad \pi \equiv (2x+y-z+3)=0$

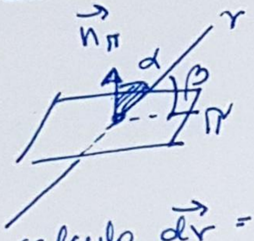
a) primero calculo la posición relativa de r y π

si $r \subset \pi$ $\Rightarrow \vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi} = 0$ $\Downarrow$ por ser $\perp$



si r es $\parallel$ a π $\Rightarrow \vec{d_r} \perp \vec{n_\pi}$ $\Rightarrow \vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi} = 0$





si r y π secantes $\Rightarrow \vec{n_\pi} \cdot \vec{d_r} \neq 0$

calculo $\vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{(-2,1,-1)}$

$\vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi} = (-2,1,-1)\cdot(2,1,-1) = -4+1+1 = -2 \neq 0 \Rightarrow$ son secantes

ángulo $(r, \pi) = \beta = 90° - \alpha$ siendo $\alpha = \text{arc}(\vec{n_\pi}, \vec{d_r})$

como $\cos\alpha = \text{sen}(90-\alpha) = \text{sen}\,\beta$

$$\Rightarrow \beta = \text{arc sen}\left|\frac{\vec{n_\pi}\cdot\vec{d_r}}{|\vec{n_\pi}|\cdot|\vec{d_r}|}\right| = \left|\frac{(2,1,-1)\cdot(-2,1,-1)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}\right| = \left|\frac{-4+1+1}{6}\right| =$$

$$= \left|\frac{-4+2}{6}\right| = \left|-\frac{2}{6}\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \beta = \text{arc sen}\left|-\frac{1}{3}\right| = \boxed{19°28'16.39''}$$

b) $P = r \cap \pi$ podría plantear un sistema $\begin{cases} -x-y+z=0 \\ 2x+3y-z=-1 \\ 2x+y-z=-3 \end{cases}$

ó también paso r a paramétrica

$\vec{d_r} = (-2, 1, -1)$

para un pto $A \in r \equiv \begin{cases} -x-y+z=0 \\ 2x+3y-z=-1 \end{cases}$

$x+2y=-1$

le doy a $y=0 \Rightarrow x=-1$

$z = x+y \Rightarrow z = -1+0 = -1$

$\boxed{(-1,0,-1) = A}$

$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1-2t \\ y = 0+t \\ z = -1-t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

lo sustituyo en π: $2x+y-z+3=0$

$2(-1-2t)+(t)-(-1-t)+3=0$

$-2-4t+t+1+t+3=0$

$-2t=-2$

$\boxed{t=+1}$

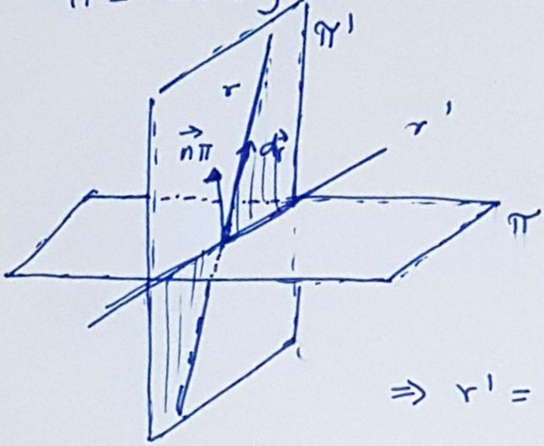
$P = \begin{cases} x = -1-2(+1) = -1-2 = -3 \\ y = +1 \\ z = -1-(+1) = -1-1 = -2 \end{cases}$

$\boxed{P(-3,1,-2)} = $ ~~...~~ $= r \cap \pi$

c) tenemos que calcular la "sombra" de r sobre π

$$r \equiv \begin{cases} \vec{dr}\,(-2,1,-1) \\ A(-1,0,-1) \in r \end{cases} \equiv \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases} \qquad \pi = (2x+y-z+3=0)$$

$\pi \equiv 2x+y-z+3=0$



Construyo un plano auxiliar π'

t.q. $r \subset \pi'$ (por tanto $A \in \pi'$, $\vec{dr}$ vect. director de π')

y $\pi' \perp \pi$ y por tanto $\vec{n}_\pi$ otro vector director de π'

$\vec{n}_\pi\,(2,1,-1)$

$\Rightarrow r' = \pi' \cap \pi$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff \underbrace{(x+1)(-1+1)}_{0} - y(2+2) + (z+1)(-2-2) = 0$$

$-4y-4(z+1)=0$; $-4y-4z-4=0$

$\iff \pi' : \boxed{y+z+1=0}$

$$\boxed{r' = \begin{cases} y+z+1=0 \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases}}$$ proyección ortogonal de r sobre π

$\boxed{4}$ a) π, π' t.q. $\pi \parallel \pi_1$ y $\pi' \parallel \pi_2$ y t.q.

$d(\pi, O) = d(\pi', O) = 2$

$\vec{n}_{\pi_1} = (1,1,0)$ por ser π, π paralelos a π_1 $\Rightarrow$

$\pi : x+y+D=0$

$\pi' = x+y+D'=0$

$$d(O,\pi) = \frac{|1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + D|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{2}}$$

$$d(O,\pi') = \frac{|1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + D'|}{\sqrt{2}} = \frac{|D'|}{\sqrt{2}}$$

además : $2 = d(O,\pi') = d(O,\pi)$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= \frac{|D|}{\sqrt{2}} \\ 2 &= \frac{|D'|}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

si $D>0 \Rightarrow D = 2\sqrt{2}$

si $D'<0 \Rightarrow D' = -2\sqrt{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\pi : x+y+2\sqrt{2} \\ &\pi' : x+y-2\sqrt{2} \end{aligned}}$$

b) recta que pasa por $(0,2,0)$ y es $\perp \pi_2$ (MUY FÁCIL)

$\pi_2: x+z=1 \Rightarrow \vec{n}_{\pi_2}=(1,0,1)$

s recta que $\left\{ \begin{array}{l} \text{pto } (0,2,0) \\ \vec{d} \ (1,0,1) \end{array} \right. \Rightarrow s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=2 \\ z=\lambda \end{array} \right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Si se prefiere: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$; $x=\dfrac{y-2}{0}=z$

—o—

c) distancia entre los ptos de intersección del plano $\pi_1: x+y=1$ y los ejes coordenados

Eje X $\left\{ \begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \end{array} \right.$

Eje Y $\left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \end{array} \right.$

Pto corte $\pi_1 \cap$ EjeX : $\left. \begin{array}{l} x+y=1 \\ y=0, z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x=1$

pto $\boxed{(1,0,0)}=A$

Pto corte $\pi_1 \cap$ EjeY : $\left. \begin{array}{l} x+y=1 \\ x=0, z=0 \end{array} \right\} \rightarrow y=1$

$\boxed{B(0,1,0)}$

$d_{AB}=|\vec{AB}|=|B-A|=|(0,1,0)-(1,0,0)|=|(-1,1,0)|=$

$=\sqrt{1+1}=\boxed{\sqrt{2}\ u}$ Fácil, y distinto ¡)

—o—

5 a) $A(1,0,-1)$; $r \equiv \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$; $\pi: x+y-z=6$

ángulo (π,π') donde π' es plano t.q. $\pi' \perp r$ y $A \in \pi'$

por $\pi' \perp r \Rightarrow \vec{n}_{\pi'}=\vec{d}_r(1,1,2) \Rightarrow \pi': x+y+2z+D=0$

por $A(1,0,-1) \in \pi' \Rightarrow 1+0+2(-1)+D=0 \Rightarrow 1-2+D=0$

$\Rightarrow D=1 \Rightarrow \boxed{\pi': x+y+2z+1=0}$

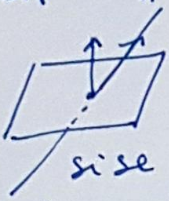
ángulo $(\pi,\pi')=$ ángulo $(\vec{n}_\pi,\vec{n}_{\pi'})=\arccos\left|\dfrac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'}}{|\vec{n}_\pi||\vec{n}_{\pi'}|}\right|$

$=\arccos\dfrac{|(1,1,-1)(1,1,2)|}{\sqrt{3}\sqrt{6}}=\arccos\dfrac{|1+1-2|}{\sqrt{18}}=\arccos 0=$

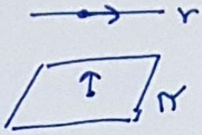
$=\boxed{90^\circ} \Rightarrow \pi \perp \pi'$

b) $d(r,\pi)=?$ primero tengo que estudiar la posición relativa de r y π

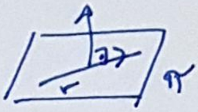
$\vec{d_r}\cdot\vec{n_\pi} = (1,1,2)(1,1,-1) = 1+1-2 = \boxed{0} \Rightarrow \vec{d_r} \perp \vec{n_\pi}$

① 

si se cortasen $\vec{d_r}\cdot\vec{n_\pi}\neq 0$ no puede ser $(d=0)$

② 

Si fuesen paralelos $\vec{d_r}\perp\vec{n_\pi}$ puede ser $(d\neq 0)$ $(r\cap\pi=\phi)$ ninguno

③ 

Si estuviese contenida también $\vec{d_r}\perp\vec{n_\pi}$ (todos los ptos de $r\in\pi$) $(d=0)$

me basta con ver si el pto $P_r \in \pi$?

busco un pto cualquiera de r, p. ejemplo $(1,-1,2)\in\pi$?

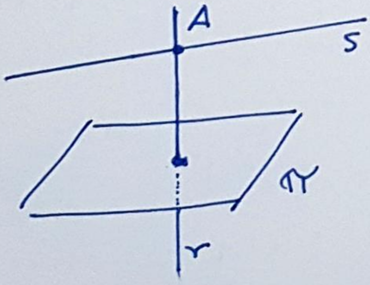
$1+(-1)-(2) = 1-1-2 = -2 \neq 6 \Rightarrow P \notin \pi \Rightarrow$ ②

Son paralelos $r \parallel \pi \Rightarrow d\neq 0$

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|1-1-2-6|}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{8\sqrt{3}}{3}}\ u.$$

c) Busco recta s t.q. $A(1,0,-1)\in s$ y $s\perp r$ y además $\vec{d_r}(1,1,2)$ y $s\cap\pi=\phi$ i.e. $s\parallel\pi$ (Recordar que por el aptdo a) de este ejercicio $r\perp\pi$ ya que $\alpha=90°$)



$$\left.\begin{array}{l}\vec{d_s}\perp\vec{d_r}\\ \vec{n_\pi}\perp\vec{d_s}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{d_s} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-1-2)-\vec{j}(-1-2)+\vec{k}(-1-1) =$$

$$= -3\vec{i}+3\vec{j} = \boxed{(-3,3,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{como } A(1,0,-1)\in s\\ \vec{d_s}(-3,3,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{s\equiv\begin{cases}x=1-3\lambda\\ y=3\lambda\\ z=-1\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

ó si se prefiere: $\boxed{\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{0}}$

$\boxed{6}$ a) primero estudio la posición relativa de r y s (p. 9)

$\boxed{\vec{d_r}\,(1,1,-3)}$

$\boxed{P_r\,(2,-1,-4)}$

$$s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\vec{i}+\vec{k} = \boxed{(-1,0,1)}$$

busco $P_s \in s$?

p. ejemplo le doy $z=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow -4+y=1$

$\Rightarrow y=5 \qquad \Rightarrow \boxed{P_s\,(2,5,0)}$

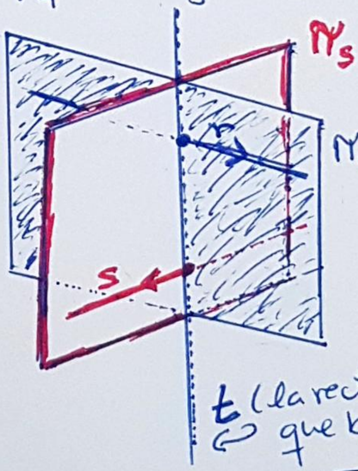
Calculo el vector de $\overrightarrow{P_rP_s} = (2,5,0)-(2,-1,-4) = \boxed{(0,6,4)}$

Construyo $B = \begin{pmatrix} \vec{d_r} \\ \vec{d_s} \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; det B = ~~0+12+1-12-1=0~~

det B = 18 − 6 + 4 = 16 ≠ 0 ⇒ son 3 vectores l. indep ⇒ SE CRUZAN

ojo! con lo siguiente, si no vemos este dibujo nos atascamos y no resolvemos, cuando dibujáis dos rectas que se cruzan todos pensáis en 2 planos paralelos pero así no se llega a ninguna parte si lo que quieren es una recta t que sea $\left.\begin{matrix} t \perp r \\ t \perp s \end{matrix}\right\}$ y además $t \cap r = \text{pto}$ $\quad t \cap s = \text{pto}$ (obviamente otro pto)

necesito que penséis, que imaginéis 2 planos PERPENDICULARES → Así



$\pi_r \perp \pi_s$

$r \subset \pi_r$ por tanto $P_r \in \pi_r$

$\left.\begin{matrix} \vec{d_r} \\ \vec{d_t} \end{matrix}\right\}$ 2 vectores directores de π_r

$\pi_s \perp \pi_r$ y $s \subset \pi_s$ por tanto $P_s \in \pi_s$

$\left.\begin{matrix} \vec{d_s} \\ \vec{d_t} \end{matrix}\right\}$ vectores directores de π_s

t (la recta que buscamos)

Entonces $\boxed{t = \pi_r \cap \pi_s}$

Antes, calculo $\vec{d_t}$ vector director de la recta t, puedo hacerlo p.q. $\left.\begin{matrix} t \perp r \\ t \perp s \end{matrix}\right.$ $\Rightarrow \vec{d_t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j}(1-3) + \vec{k} =$

$= \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} =$

$= \boxed{(1,2,1)}$

p.10

$$\pi_r : \begin{cases} P_r(2,-1,4) \\ \vec{d_r}(1,1,-3) \\ \vec{d_t}(1,2,1) \end{cases} \Rightarrow \pi_r \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi_r: 7x-4y+z=14$$

$$\boxed{\pi_r : 7x-4y+z-14=0}$$

$$\pi_s : \begin{cases} P_s(2,5,0) \\ \vec{d_s}(-1,0,1) \\ \vec{d_t}(1,2,1) \end{cases} \Rightarrow \text{ec. } \pi_s \text{ se obtiene } \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2x+2y-2z=6$$

$$-2x+2y-2z-6=0$$

$$\boxed{\pi_s : -x+y-z-3=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \begin{cases} 7x-4y+z-14=0 \\ -x+y-z-3=0 \end{cases}} \leftarrow \text{solución}$$

—o—