# TEMA 7

# ESPACIO MÉTRICO

## ¿Qué vamos a estudiar en este tema?

### 1. Ángulos en el espacio

- 1.1. Ángulo entre dos rectas
- 1.2. Ángulo entre dos planos
- 1.3. Ángulo entre una recta y un plano

### 2. Distancias en el espacio

- 2.1. Distancia con respecto a punto
- 2.2. Distancia entre dos planos
- 2.3. Distancia entre una recta y un plano
- 2.4. Distancia entre dos rectas

### 3. Simetría y ortogonalidad en el espacio

- 3.1. Punto simétrico de un punto respecto a otro punto
- 3.2. Punto simétrico de un punto respecto a un plano
- 3.3. Punto simétrico de un punto respecto a una recta

### 4. Problemas con planos auxiliares

- 4.1. Recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan
- 4.2. Recta que pasa por un punto y corta a dos rectas
- 4.3. Recta que pasa por un punto, corta a otra recta y es paralela a un plano

### 5. Problemas con punto genérico

# 1. Ángulos en el espacio

Vamos a aprender a calcular los **ángulos entre:**

**1.1. Dos rectas → Usaremos sus vectores directores**

**1.2. Dos planos → Usaremos sus vectores normales**

**1.3. Una recta y un plano → Usaremos el vector director de la recta y el normal del plano**

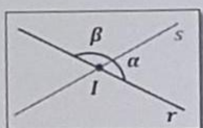
Para ello nos ayudaremos de la fórmula del ángulo entre dos vectores. ¡¡Recuerda!!

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \rightarrow \alpha = arco\ cos\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

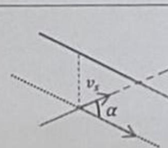
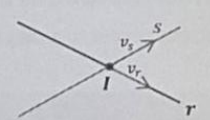
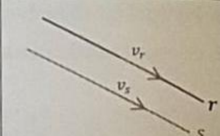
**Fíjate que ahora el producto escalar va en valor absoluto, ahora explicaremos el porqué**

## 1.1. Ángulo entre una recta $r$ y una recta $s$ (Usaremos sus vectores directores)

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s|}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{v}_s|} \rightarrow \alpha = arco\ cos\frac{|\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s|}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{v}_s|}$$




**Al cortarse dos rectas se forman dos ángulos $\alpha$ y $\beta$.**
**Uno de ellos siempre es menor de 90°**(salvo que $r \perp s$).
Al poner el producto escalar en valor absoluto, calculamos el ángulo $\alpha$, ángulo del primer cuadrante. ($0° \leq \alpha \leq 90°$)

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha = arco\ cos\frac{\lvert\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s\rvert}{\lvert\vec{v}_r\rvert\cdot\lvert\vec{v}_s\rvert}$ | $\alpha = arco\ cos\frac{\lvert\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s\rvert}{\lvert\vec{v}_r\rvert\cdot\lvert\vec{v}_s\rvert}$ | $\alpha = 0°$ |
|  |  |  |
| **Las rectas se cruzan** | **Las rectas son secantes (se cortan en un punto)** | **Las rectas son paralelas** |



Calcula el ángulo que forman la recta $r$ y $s$:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2 \\ z = 1+t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x-y-3=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

**Para calcular el ángulo entre dos rectas, usaremos sus vectores directores ($\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$):**

Como de la recta $s$ solo necesitamos su vector director, en vez de pasarla a forma paramétrica, **podemos calcular <u>directamente</u> $\vec{v}_s$ a traves del producto vectorial:**

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-\vec{i}+\vec{k}+0)-(0+0+\vec{j}) = -\vec{i}-\vec{j}+\vec{k} = (-1,-1,\ 1)$$
$$\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}$$

Por lo tanto:

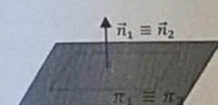
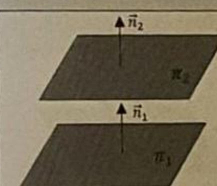
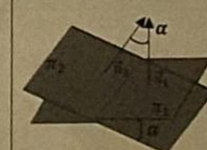
$$\vec{v}_r = (-1,\ 0,\ 1) \rightarrow |\vec{v}_r| = \sqrt{(-1)^2+(0)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\vec{v}_s = (-1,-1,\ 1) \rightarrow |\vec{v}_s| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{3}$$
$$\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s = (-1,\ 0,\ 1)\cdot(-1,-1,\ 1) = 1+0+1 = 2$$

$$\alpha = arco\ cos\frac{|\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s|}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{v}_s|} = arco\ cos\left(\frac{|2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\right) = arco\ cos\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \rightarrow \boxed{\alpha \simeq 35,26°}$$

## 1.2. Ángulo entre un plano $\pi_1$ y un plano $\pi_2$ (Usaremos sus vectores normales):

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} \rightarrow \alpha = arco\ cos\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$

Al poner el producto escalar en valor absoluto, calculamos el ángulo $\alpha$, ángulo del primer cuadrante. ($0° \leq \alpha \leq 90°$)

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha = 0$ | $\alpha = 0$ | $\alpha = arco\ cos\frac{\lvert\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\cdot\lvert\vec{n}_2\rvert}$ |
| **Los planos son coincidentes** | **Los planos son paralelos** | **Los planos son secantes** |
|  |  |  |

Calcula el ángulo que forman los planos $\pi_1$ y $\pi_2$:

$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y - z + 3 = 0$

**Para calcular el ángulo entre dos planos, usaremos sus vectores normales ($\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$):**

Por lo tanto:

$$\vec{n}_1 = (2,-3,\ 1) \to |\vec{n}_1| = \sqrt{(2)^2 + (-3\,)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{n}_2 = (1,\ 1,-1) \to |\vec{n}_2| = \sqrt{(1)^2 + (1\,)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2,-3\,,\ 1)\cdot(1,\ 1\,,-1) = 2 - 3 - 1 = -2$$

$$\alpha = arco\ cos\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\,|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = arco\ cos\left(\frac{|-2|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{3}}\right) = arco\ cos\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \to \boxed{\alpha \simeq 72{,}02^\circ}$$

**1.3. Ángulo entre una recta $r$ y un plano $\pi$**

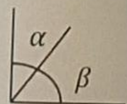
**(Usaremos el vector director de la recta y el normal del plano)**

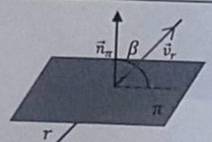
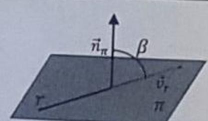
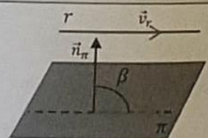
$$sen\ \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi\,|}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{n}_\pi|} \to \alpha = arco\ sen\frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi\,|}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{n}_\pi|}$$

Al poner el producto escalar en valor absoluto, calculamos el ángulo $\alpha$, ángulo del primer cuadrante. $(0^\circ \le \alpha \le 90^\circ)$

Recordatorio de trigonometría

Los ángulos <u>complementarios</u> son aquellos ángulos que suman $90^\circ \to \alpha + \beta = 90^\circ$
Recuerda también que: $\cos\alpha = sen\ \beta$




| $\alpha = arco\ sen\frac{\lvert\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi\rvert}{\lvert\vec{v}_r\rvert\cdot\lvert\vec{n}_\pi\rvert}$ | $\alpha = 0 \to \beta = 90^\circ$ | $\alpha = 0 \to \beta = 90^\circ$ |
|---|---|---|
| **La recta y el plano son secantes** | **La recta está contenida en el plano** | **La recta es paralela al plano** |
|  |  |  |



Calcula el ángulo que forman la recta $r$ y el plano $\pi$:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi \equiv x - y + 3z - 4 = 0$$

**Para calcular el ángulo entre una recta y un plano, usaremos el vector director de la recta ($\vec{v}_r$) y el vector normal del plano ($\vec{n}_\pi$):**

Por lo tanto:

$$\vec{v}_r = (0,-1\,,\ 1) \to |\vec{v}_r| = \sqrt{(0)^2 + (-1\,)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{n}_\pi(1,-1,\ 3) \to |\vec{n}_\pi| = \sqrt{(1)^2 + (-1\,)^2 + (3)^2} = \sqrt{11}$$

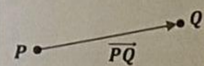
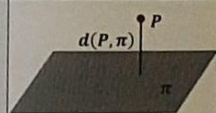
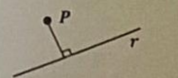
$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (0,-1\,,\ 1)\cdot(1,-1\,,\ 3) = 0 + 1 + 3 = 4$$

$$\alpha = arco\ sen\frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi\,|}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{n}_\pi|} = arco\ sen\left(\frac{|4|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}}\right) = arco\ sen\left(\frac{4}{\sqrt{22}}\right) \to \boxed{\alpha \simeq 58{,}52^\circ}$$

## 2. Distancias en el espacio

**Vamos a aprender a calcular la distancia entre <u>puntos</u>, <u>rectas</u> y <u>planos</u> en todas sus variantes:**

**2.1. Distancia con respecto a punto $P$**

| | | |
|---|---|---|
| **Distancia entre un punto $P$ y un punto $Q$** (Ejercicio 1) |  | $d(P,Q) = \lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$ |
| **Distancia entre un punto $P$ y un plano $\pi$** (Ejercicio 2) |  | $d(P,\pi) = \frac{\lvert A\cdot P_x + B\cdot P_y + C\cdot P_z + D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ |
| **Distancia entre un punto $P$ y una recta $r$** (Ejercicio 3) |  | $d(P,r) = \frac{\lvert\vec{v}_r \times \overrightarrow{PQ_r}\rvert}{\lvert\vec{v}_r\rvert}$ |

**1.** Calcula la distancia entre los puntos $A\,(1,\ 0,-2)$ y $B(-1,\ 4,-3)$

**Para calcular la distancia entre dos puntos, primero calculamos su vector asociado y después hallamos su módulo que ya sabemos que corresponderá a la distancia entre los puntos:**

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 4,-3) - (1,\ 0,-2) = (-2,\ 4,-1)$

$\boxed{d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|} = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{21}\ u}$

¡¡Recuerda!! La distancia es una medida de longitud.

**2.** Calcula la distancia entre el punto $P\,(1,-2,\ 0)$ y el plano $\pi\!: x + 3y - 4z - 1 = 0$

**Podemos aplicar la fórmula directamente:**

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|A\cdot P_x + B\cdot P_y + C\cdot P_z + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} = \frac{|1\cdot(1) + 3\cdot(-2) - 4\cdot(0) - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-4)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{26}} = \frac{6}{\sqrt{26}}\,u$$

**Podemos racionalizar para simplificarlo** $\Rightarrow$ $d(P,\pi) = \frac{6}{\sqrt{26}} = \frac{6\cdot\sqrt{26}}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}} = \frac{6\sqrt{26}}{26} = \frac{3\sqrt{26}}{13}\,u$

**3.** Calcula la distancia entre el punto $P\,(1,\ 0,-2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

**Con el punto $P\,(1,\ 0,-2)$ y el punto de la recta $Q_r(1,\ 2,\ 1)$ , construimos el vector $\overrightarrow{PQ}_r$.**

$\overrightarrow{PQ}_r = (1,\ 2,\ 1) - (1,\ 0,-2) = (0,\ 2,\ 3)$ ; $\vec{v}_r = (0,\ 1,\ 1)$

$$\vec{v}_r \times \overrightarrow{PQ}_r = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (3\vec{\imath} + 0 + 0) - (0 + 2\vec{\imath} + 0) = \vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = (1,\ 0,\ 0)$$

$$\begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

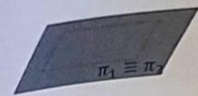
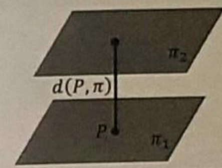
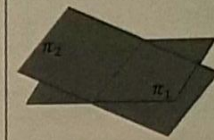
$|\vec{v}_r \times \overrightarrow{PQ}_r| = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (0)^2} = \sqrt{1} = 1$

$|\vec{v}_r| = \sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

**Aplicando la fórmula:** $\boxed{d(P,r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{PQ}_r|}{|\vec{v}_r|}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u.$

## 2.2. Distancia entre dos planos $\pi_1$ y $\pi_2$

**Primero tendremos que estudiar su posición relativa, ya que si los dos planos son coincidentes o secantes, su distancia será cero.**

| Si los planos son coincidentes | Si los planos son paralelos | Si los planos son secantes |
|---|---|---|
|   |   |   |
| $d(\pi_1,\pi_2) = 0$ | $d(\pi_1,\pi_2) = d(P_{\pi_1},\pi_2)$ **Cogemos un punto de uno de los planos y calculamos la distancia de ese punto al otro plano (Ejercicio 4)** | $d(\pi_1,\pi_2) = 0$ |

**4.** Calcula la distancia entre los planos:

$\pi_1\!: x - 2y + 3z - 3 = 0$ y $\pi_2\!: x - 2y + 3z + 4 = 0$

**Primero estudiamos la posición relativa entre los planos:**

$\begin{cases} \pi_1\!: x - 2y + 3z - 3 = 0 \\ \pi_2\!: x - 2y + 3z + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} = \frac{3}{3} \neq \frac{-3}{4} \rightarrow$ **Los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ son paralelos ($\pi_1 \parallel \pi_2$)**

**Sabiendo que los planos son paralelos, cogemos un punto del plano $\pi_1$ asignando valores a dos de las variables de su ecuación y despejando la tercera. Por ejemplo: $x = 0$ e $y = 0$:**

$(0) - 2\cdot(0) + 3z - 3 = 0 \rightarrow 3z = 3 \rightarrow z = 1\,;\ \ P_{\pi_1}(0,\ 0,\ 1)$

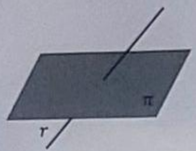
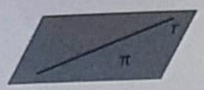
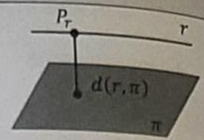
**Calculamos la distancia entre el punto del plano $P_{\pi_1}$ y el plano $\pi_2$:**

$$\boxed{d(\pi_1,\pi_2) = d(P_{\pi_1},\pi_2) = \frac{|A\cdot P_x + B\cdot P_y + C\cdot P_z + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

$$d(P_{\pi_1},\pi_2) = \frac{|(0) - 2\cdot(0) + 3(1) + 4|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7\cdot\sqrt{14}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}\ u.$$

## 2.3. Distancia entre una recta $r$ y un plano $\pi$

Primero tendremos que estudiar su posición relativa, ya que si la recta está contenida o es secante al plano, su distancia será cero.

| Si la recta y el plano son secantes | Si la recta está contenida en el plano | Si la recta es paralela al plano |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $d(r,\pi) = 0$ | $d(r,\pi) = 0$ | $d(r,\pi) = d(P_r\,,\pi)$ <br> Cogemos un punto de la recta y calculamos la distancia de ese punto al plano (Ejercicio 5) |

**5.** Calcula la distancia entre la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 1 + t \end{cases}$ y el plano $\pi: x + y + z + 1 = 0$

**Primero estudiamos la posición relativa calculando el producto escalar entre $\vec{v}_r$ y $\vec{n}_\pi$ :**

| | |
|---|---|
| $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,\ 2,\ 1) \\ \vec{v}_r(-1,\ 0,\ 1) \end{cases}$ | $\pi \equiv x + y + z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi(1,\ 1,\ 1)$ |

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-1,\ 0,\ 1) \cdot (1,\ 1,\ 1) = -1 + 0 + 1 = 0$ $\boxed{\vec{v}_r \text{ sí es perpendicular a } \vec{n}_\pi}$

**Ahora comprobaremos si $P_r$ está contenido en el plano para determinar la posición relativa:**

$$\begin{cases} \pi \equiv x + y + z + 1 = 0 \\ P_r(1,\ 2,\ 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) + (2) + (1) + 1 = 0 \\ \boxed{5 \neq 0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} P_r \text{ no está contenida en } \pi \\ \text{La recta es paralela al plano} \end{array}}$$

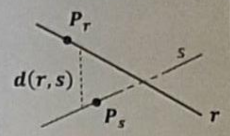
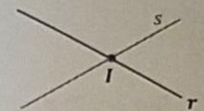
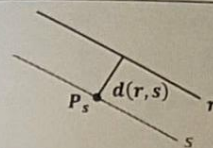
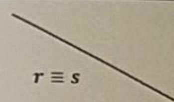
$$\boxed{d(r,\pi) = d(P_r\,,\pi) = \frac{|A \cdot P_x + B \cdot P_y + C \cdot P_z + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

$$d(P_r\,,\pi) = \frac{|(1) + (2) + (1) + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\ u.$$



## 2.4. Distancia entre una recta $r$ y una recta $s$

Primero tendremos que estudiar su posición relativa, ya que si la rectas son coincidentes o secantes, su distancia será cero.

| | | |
|---|---|---|
| Las rectas se cruzan |  | $d(r,s) = \frac{\lvert[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}]\rvert}{\lvert\vec{v}_r \times \vec{v}_s\rvert}$ <br> $d(r,s)$ es el módulo del producto mixto definido por los vectores directores de las rectas y un vector formado por un punto de cada recta, dividido por el modulo del producto vectorial de los vectores directores de las rectas <br> (Ejercicio 6) |
| Las rectas son secantes |  | $d(r,s) = 0$ |
| Las rectas son paralelas |  | $d(r,s) = d(P_s, r)$ <br> Cogemos un punto de una recta y calculamos la distancia de ese punto a la otra recta (Ejercicio 7) |
| Las rectas son coincidentes |  | $d(r,s) = 0$ |

**6.** Calcula la distancia entre la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

**Primero estudiamos la posición relativa entre las dos rectas:**

| | |
|---|---|
| $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,\ 0,\ 0) \\ \vec{v}_r(-1,\ 0,\ 1) \end{cases}$ | $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s(1,\ 0,\ 1) \\ \vec{v}_s(1,\ 2,\ 0) \end{cases}$ |
| $\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (1,\ 0,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = (0,\ 0,\ 1)$ | |

- Formamos las matrices $A$ y $A^*$ con los vectores anteriores:

$$A=\begin{pmatrix}\vec{v}_r\\ \vec{v}_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}\qquad A^*=\begin{pmatrix}\vec{v}_r\\ \vec{v}_s\\ \overrightarrow{P_rP_s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

- Calculamos el rango de las matrices para determinar la posición relativa entre las rectas:

$$|A^*|=\begin{vmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(-2+0+0)-(0-0+0)=-2$$
$$\begin{matrix}-1&0&1\\1&2&0\end{matrix}$$

| Como la matriz $A^*$ tiene el determinante $3x3\neq 0$, el $rg(A^*)=3$ |
|---|
| Las rectas se cruzan |

Aplicamos la fórmula

$$d(r,s)=\frac{|[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{P_rP_s}]|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}$$

$[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{P_rP_s}]=|A^*|=-2$ INTERESANTE

$$\vec{v}_r\times\vec{v}_S=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\-1&0&1\\1&2&0\end{vmatrix}=(0-2\vec{k}+\vec{\jmath})-(0+2\vec{\imath}+0)=-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k}=(-2,\ 1,-2)$$
$$\begin{matrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\-1&0&1\end{matrix}$$

$$|\vec{v}_r\times\vec{v}_S|=\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$$

$$d(r,s)=\frac{|[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{P_rP_s}]|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}=\frac{|-2|}{3}=\frac{2}{3}\ u.$$

**7.** Calcula la distancia entre la recta $r\equiv\begin{cases}x=1-t\\y=2\\z=1+t\end{cases}$ y la recta $s\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\y=4\\z=2-\lambda\end{cases}$

**Primero estudiamos la posición relativa entre las dos rectas:**

| | |
|---|---|
| $r\equiv\begin{cases}x=1-t\\y=2\\z=1+t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_r(1,\ 2,\ 1)\\\vec{v}_r(-1,\ 0,\ 1)\end{cases}$ | $s\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\y=4\\z=2-\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_s(1,\ 4,\ 2)\\\vec{v}_s(1,\ 0,-1)\end{cases}$ |
| $\overrightarrow{P_rP_s}=P_s-P_r=(1,\ 4,\ 2)-(1,\ 2,\ 1)=(0,\ 2,\ 1)$ | |



- Formamos las matrices $A$ y $A^*$ con los vectores anteriores:

$$A=\begin{pmatrix}\vec{v}_r\\ \vec{v}_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\qquad A^*=\begin{pmatrix}\vec{v}_r\\ \vec{v}_s\\ \overrightarrow{P_rP_s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&-1\\0&2&1\end{pmatrix}$$

- Calculamos el rango de las matrices para determinar la posición relativa entre las rectas:

$$|A^*|=\begin{vmatrix}-1&0&1\\1&0&-1\\0&2&1\end{vmatrix}=(0+2+0)-(0+2+0)=0$$
$$\begin{matrix}-1&0&1\\1&0&-1\end{matrix}$$

| Como la matriz $A^*$ tiene el determinante $3x3=0$, el $rg(A^*)$ <u>no</u> puede ser 3 |
|---|

Por lo tanto, ahora buscamos un determinante 2x2 que sea distinto de cero:

$$A^*=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&\boxed{\begin{matrix}0&-1\\2&1\end{matrix}}\\0&&\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}0&-1\\2&1\end{vmatrix}=0+2=2$$

| Como la matriz $A^*$ tiene un determinante $2x2\neq 0$, el $rg(A^*)=2$ |
|---|

Estudiamos el rango de $A$:

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

| Como la matriz A tiene dos filas proporcionales, $rg(A)=1$ |
|---|

| $Rg\ (A)=1\neq Rg(A^*)=2$ | Las rectas son paralelas |
|---|---|

$$d(r,s)=d(P_s,r)=\frac{|\vec{v}_r\times\overrightarrow{P_rP_s}|}{|\vec{v}_r|}$$

$$\vec{v}_r\times\overrightarrow{P_rP_s}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\-1&0&1\\0&2&1\end{vmatrix}=(0-2\vec{k}+0)-(0+2\vec{\imath}-\vec{\jmath})=-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k}=(-2,\ 1,-2)$$
$$\begin{matrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\-1&0&1\end{matrix}$$

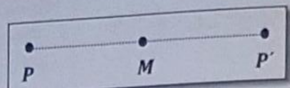
$$|\vec{v}_r\times\overrightarrow{P_rP_s}|=\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3\quad;\quad|\vec{v}_r|=\sqrt{(-1)^2+(0)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$$

$$d(r,s)=d(P_s,r)=\frac{|\vec{v}_r\times\overrightarrow{P_rP_s}|}{|\vec{v}_r|}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}u.$$

## 3. Simetría y ortogonalidad en el espacio

En este apartado vamos a hacer un estudio de la simetría y proyección ortogonal entre <u>puntos</u>, <u>rectas</u> y <u>planos</u> en todas sus variantes. ¡¡Son ejercicios muy típicos de Selectividad!!

### 3.1. Punto simétrico de un punto $P$ respecto a otro punto $M$




Si $P'$ es el simétrico de $P$ respecto $M$, entonces $M$ es el punto medio del segmento formado por $P$ y $P'$. Por lo tanto podemos aplicar la fórmula:

$$M = \frac{P + P'}{2} \rightarrow 2M = P + P' \rightarrow \boxed{P' = 2M - P}$$

Calcula el punto simétrico de $P(1,\ 2, -3)$ respecto a $M\ (1,\ 2, -1)$

$$P' = 2M - P = 2 \cdot (1,\ 2, -1) - (1,\ 2, -3) = (2,\ 4, -2) - (1,\ 2, -3) = (1,\ 2,\ 1)$$

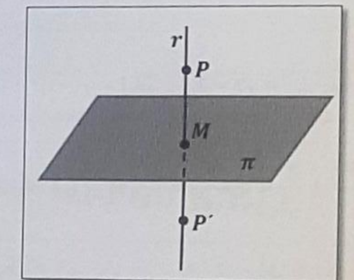
### 3.2. Punto simétrico de un punto $P$ respecto a un plano $\pi$

Para calcular el punto simétrico a otro respecto a un plano seguiremos los siguientes pasos:

**Paso 1. Calculamos la recta $r$ perpendicular al plano $\pi$ y que pase por $P$.**

**Paso 2. Calculamos el punto de corte $M$ entre la recta $r$ y el plano $\pi$.**
**<u>¡¡INTERESANTE!!</u> El punto $M$ es la proyección ortogonal del punto $P$ sobre el plano.**

**Paso 3. Al ser $M$ el punto medio del segmento formado por $P$ y $P'$, entonces podemos aplicar la fórmula de punto simétrico respecto a otro. $P' = 2M - P$**






**Dado el punto $P(3,\ 2,\ 1)$ al plano $\pi: 2x - y + 2z + 3 = 0$**
a) Calcula la proyección ortogonal de $P$ sobre $\pi$.
b) Calcula el punto simétrico de $P$ respecto al plano $\pi$.

CLÁSICO

**Paso 1. Calculamos la recta $r$ perpendicular al plano $\pi$ y que pase por $P$.**
**Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de la recta coincidirá con el vector normal del plano: $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi$**

$$r \begin{cases} P(3,\ 2,\ 1) \\ \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (2, -1,\ 2) \end{cases} \Rightarrow \quad r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

**Paso 2. Calculamos el <u>punto de corte</u> a través de un <u>punto genérico</u> $M(x,\ y,\ z)$ de la recta:**

$$M(x,\ y,\ z) \rightarrow \boxed{M(3 + 2t,\ 2 - t,\ 1 + 2t)}$$

**Sustituimos dicho punto en el <u>plano</u> para calcular el parámetro y obtener $M$:**

$$2 \cdot (3 + 2t) - (2 - t) + 2 \cdot (1 + 2t) + 3 = 0 \rightarrow \quad 6 + 4t - 2 + t + 2 + 4t + 3 = 0;$$

$$9t + 9 = 0 \rightarrow t = -9/9 \rightarrow \quad t = -1 \quad \boxed{M(1,\ 3, -1)}$$

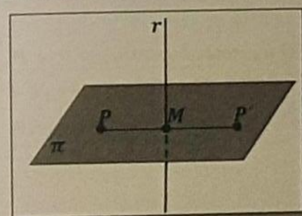
**El punto $M$ es la proyección ortogonal del punto $P$ sobre el plano $\pi$**

**Paso 3. Al ser $M$ el punto medio del segmento formado por $P$ y $P'$, entonces podemos aplicar la fórmula de punto simétrico respecto a otro.**

$$P' = 2M - P = 2 \cdot (1,\ 3, -1) - (3,\ 2,\ 1) = (2,\ 6, -2) - (3,\ 2,\ 1) = (-1,\ 4, -3)$$

### 3.3. Punto simétrico de un punto $P$ respecto a una recta $r$

Para calcular el punto simétrico a otro respecto a una recta seguiremos los siguientes pasos:




**¡¡Fíjate!! Sólo varía el paso 1 con respecto al "punto simétrico de otro respecto a un plano".**

**Paso 1. Calculamos el plano $\pi$ perpendicular a la recta $r$ y que pase por $P$.**

**Paso 2. Calculamos el punto de corte $M$ entre la recta $r$ y el plano $\pi$.**

**¡¡INTERESANTE!! El punto $M$ es la proyección ortogonal del punto $P$ sobre la recta**

**Paso 3. Al ser $M$ el punto medio del segmento formado por $P$ y $P'$, entonces podemos aplicar la fórmula de punto simétrico respecto a otro.** $P' = 2M - P$

CLÁSICO

**Dado el punto $P\,(1,\ 0,\ 5)$ y la recta** $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$

a) Calcular la proyección ortogonal de $P$ sobre $r$.

b) Calcular el punto simétrico de $P$ respecto a la recta $r$.

**Paso 1. Calculamos el plano $\pi$ perpendicular a la recta $r$ y que pase por $P$.**

Como el plano es perpendicular a la recta, **el vector normal del plano coincidirá con el vector director de la recta:** $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r$

$$\pi \begin{cases} \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (0, -2,\ 1) \\ P\,(1,\ 0,\ 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 0x - 2y + 1z + D = 0 \\ 0 \cdot (1) - 2 \cdot (0) + 1 \cdot (5) + D = 0 \ \rightarrow\ 5 + D = 0 \ \rightarrow\ D = -5 \end{array}$$

$$\boxed{\pi \equiv -2y + z - 5 = 0}$$

**Paso 2.** Calculamos el **punto de corte** a través de un **punto genérico** $M(x,\ y,\ z)$ de la recta:

$$M(x,\ y,\ z) \rightarrow \boxed{M(1, -2t,\ t)}$$

**Sustituimos dicho punto en el plano para calcular el parámetro y obtener $M$:**

$$-2 \cdot (-2t) + (t) - 5 = 0 \ \rightarrow\ 5t - 5 = 0 \ \rightarrow\ t = 1$$

$$\boxed{M(1, -2,\ 1)}$$

**El punto $M$ es la proyección ortogonal del punto $P$ sobre la recta $r$**

**Paso 3. Al ser $M$ el punto medio del segmento formado por $P$ y $P'$, entonces podemos aplicar la fórmula de punto simétrico respecto a otro.**

$$P' = 2M - P = 2 \cdot (1, -2,\ 1) - (1,\ 0,\ 5) = (2, -4,\ 2) - (1,\ 0,\ 5) = (1, -4, -3)$$

## 4. Problemas con planos auxiliares

Hay ejercicios clásicos de Selectividad en los que nos será muy útil acudir a planos auxiliares para su resolución. Es decir, tendremos que crear planos que al cortarse den lugar a la recta que estamos buscando. Vamos a reflejar los **casos más frecuentes**:

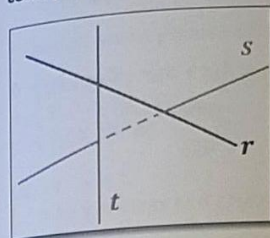
**4.1. Recta $t$ perpendicular común a dos rectas, $r$ y $s$, que se cruzan (Ejercicio 1)**

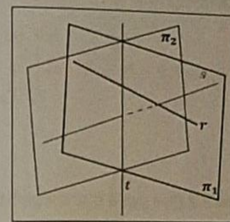
**4.2. Recta $t$ que pasa por un punto $P$ y corta a dos rectas, $r$ y $s$ (Ejercicio 2)**

**4.3. Recta $s$ que pasa por un punto $P$, corta a la recta $r$ y es paralela al plano $\pi$ (Ejercicio 3)**

### 4.1. Ecuación de la recta $t$ perpendicular común a dos rectas, $r$ y $s$, que se cruzan

**Pretendemos buscar dos planos $\pi_1$ y $\pi_2$ que al cortarse formen la recta $t$ (la cual es perpendicular a $r$ y $s$ al mismo tiempo). Si lo conseguimos, las ecuaciones de los planos se corresponderán con la ecuación implícita de la recta $t$ buscada.**




$$\boxed{t \equiv \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}}$$

• **Construimos los planos auxiliares $\pi_1$ y $\pi_2$** a partir de los vectores directores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ , un punto de cada recta, y el **vector perpendicular a $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ obtenido a través del producto vectorial que será el vector director de la recta solución $t$ ($\vec{v}_t$) y, por lo tanto, el otro vector director de ambos planos auxiliares:**

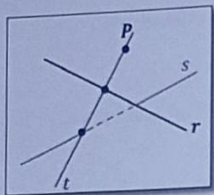
$$\pi_1 \begin{cases} P_r \\ \vec{v}_r \\ \vec{v}_t \end{cases} \rightarrow \pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\ ;\quad \pi_2 \begin{cases} P_s \\ \vec{v}_s \\ \vec{v}_t \end{cases} \rightarrow \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

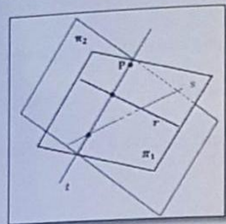
$$\boxed{t \equiv \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases} \rightarrow\ t \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$$

¡¡Interesante!! Este tipo de ejercicio se puede hacer también a través de puntos genéricos de las rectas pero por planos auxiliares lo hemos considerado más sencillo.

### 4.2. Ecuación de la recta $t$ que pasa por un punto $P$ y corta a dos rectas, $r$ y $s$

**Pretendemos buscar dos planos $\pi_1$ y $\pi_2$ que al cortarse, formen la recta $t$ (la cual pasa por $P$ y corta a $r$ y $s$). Si lo conseguimos, las ecuaciones de los planos se corresponderán con la ecuación implícita de la recta $t$ buscada.**



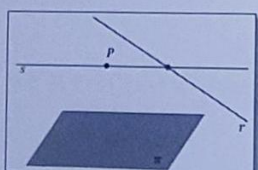

$$t \equiv \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$$

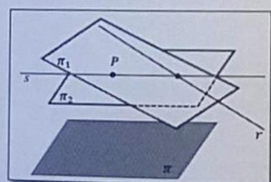
*** Construimos los planos auxiliares $\pi_1$ y $\pi_2$** . Un plano lo haremos a partir del punto $P$ por donde pasa la recta $t$, el vector director de la recta $r$, y el vector formado $\overrightarrow{PP_r}$.
El otro plano, a partir del punto $P$, el vector director de la recta $s$, y el vector formado $\overrightarrow{PP_s}$:

$$\pi_1 \begin{cases} P \\ \vec{v}_r \\ \overrightarrow{PP}_r \end{cases} \rightarrow \pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\ ;\ \pi_2 \begin{cases} P \\ \vec{v}_s \\ \overrightarrow{PP}_s \end{cases} \rightarrow \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

### 4.3. Ecuación de la recta $s$ que pasa por un punto $P$, corta a la recta $r$ y es paralela al plano $\pi$

**Pretendemos buscar dos planos $\pi_1$ y $\pi_2$ que al cortarse, formen la recta $s$ (la cual pasa por $P$, corta a $r$ y es paralela a $\pi$). Si lo conseguimos, las ecuaciones de los planos se corresponderán con la ecuación implícita de la recta $s$ buscada:**




$$s \equiv \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$$

*** Construimos los planos auxiliares $\pi_1$ y $\pi_2$** . Un plano lo construiremos a partir del punto $P$ por donde pasa la recta $s$, el vector director de la recta $r$, y el vector formado $\overrightarrow{PP_r}$.
El otro plano lo construiremos a partir del punto $P$ y el vector normal del plano.

$$\pi_1 \begin{cases} P \\ \vec{v}_r \\ \overrightarrow{PP}_r \end{cases} \rightarrow \pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\ ; \qquad \pi_2 \begin{cases} P \\ \vec{n} \end{cases} \rightarrow \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



**1. Calcula la ecuación de la recta perpendicular a las rectas $r$ y $s$ que se cruzan:**

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

CLÁSICO

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, -1,\ 0) \\ \vec{v}_r(-1,\ 0,\ 1) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s(2,\ 2,\ 2) \\ \vec{v}_s(1,\ 0,\ 2) \end{cases}$$

**- Calculamos el vector perpendicular a $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ a través del producto vectorial que será el vector director de la recta solución $t$ ($\vec{v}_t$)** y además un vector director de los planos auxiliares:

$$\vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (0 + 0 + \vec{j}) - (0 + 0 - 2\vec{j}) = 0\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k} = (0,\ 3,\ 0)$$

$$\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

*** Construimos los planos auxiliares $\pi_1$ y $\pi_2$:**

$$\pi_1 \begin{cases} P_r(1, -1,\ 0) \\ \vec{v}_r(-1,\ 0,\ 1) \\ \vec{v}_t(0,\ 3,\ 0) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = [0 - 3z + 0] - [0 + 3(x-1) + 0] = \mathbf{-3x - 3z + 3 = 0}$$

$$\begin{matrix} x-1 & y+1 & z-0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$\boxed{\pi_1 \equiv -3x - 3z + 3 = 0\text{, simplificando, } \pi_1 \equiv -x - z + 1 = 0}$

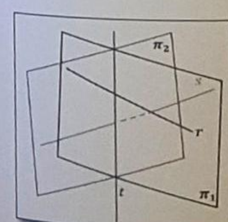
$$\pi_2 \begin{cases} P_s(2,\ 2,\ 2) \\ \vec{v}_s(1,\ 0,\ 2) \\ \vec{v}_t(0,\ 3,\ 0) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = [0 + 3(z-2) + 0] - [0 + 6(x-2) + 0] = \mathbf{-6x + 3z + 6 = 0}$$

$$\begin{matrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}$$

$\boxed{\pi_2 \equiv -6x + 3z + 6 = 0\text{, simplificando, } \pi_2 \equiv -2x + z + 2 = 0}$

**Los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ se cortan formando la recta $t$ (recta solución del ejercicio):**




$$t \equiv \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases} \rightarrow \boxed{t \equiv \begin{cases} -x - z + 1 = 0 \\ -2x + z + 2 = 0 \end{cases}}$$

**2. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\,(1,\ 0,\ 0)$ y corta a las rectas:**

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,\ 1,\ 1) \\ \vec{v}_r(1, -1,\ 0) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s(1,\ 2,\ 0) \\ \vec{v}_s(1,\ 0, -2) \end{cases}$$

* **Construimos los planos auxiliares $\pi_1$ y $\pi_2$:**

¡¡OJO!! Cuidado con las coordenadas del punto y del vector

$$\pi_1 \begin{cases} P\,(1,\ 0,\ 0) \\ \vec{v}_r(1, -1,\ 0) \\ \overrightarrow{PP}_r = P_r - P = (0,\ 1,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 1,\ 1) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [-(x-1) + z + 0] - [z + 0 + y] = -x - y + 1 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} x-1 & y-0 & z-0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$\boxed{\pi_1 \equiv -x - y + 1 = 0\text{, cambiando signos, } \pi_1 \equiv x + y - 1 = 0}$

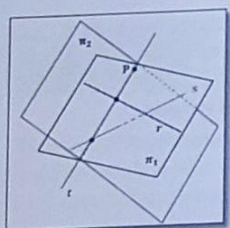
$$\pi_2 \begin{cases} P\,(1,\ 0,\ 0) \\ \vec{v}_s(1,\ 0, -2) \\ \overrightarrow{PP}_s = P_s - P = (1,\ 2,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = (0,\ 2,\ 0) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 2z + 0) - [0 - 4(x-1) + 0] = 4x + 2z - 4 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} x-1 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}$$

$\boxed{\pi_2 \equiv 4x + 2z - 4 = 0\text{, simplificando, } \pi_2 \equiv 2x + z - 2 = 0}$

**Los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ se cortan formando la recta $t$ (recta solución del ejercicio):**




$$t \equiv \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases} \rightarrow \boxed{t \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \end{cases}}$$

**3. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\,(-2,\ 1,\ 0)$, corta a las recta $r$,**

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases} \quad \text{y es paralela al plano } \pi\colon 2x - y + 3z - 2 = 0$$

* **Construimos los planos auxiliares $\pi_1$ y $\pi_2$:**

$$\pi_1 \begin{cases} P\,(-2,\ 1,\ 0) \\ \vec{v}_r\,(1,\ 0, -1) \\ \overrightarrow{PP}_r = (1,\ 2,\ 0) - (-2,\ 1,\ 0) = (3,\ 1,\ 0) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [0 + z - 3(y-1)] - [0 - (x+2) + 0] = x - 3y + z + 5 = 0$$

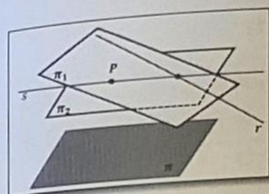
$$\begin{array}{ccc} x+2 & y-1 & z-0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$$

$\boxed{\pi_1 \equiv x - 3y + z + 5 = 0}$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} \vec{n}\ (2, -1,\ 3) \\ P\,(-2,\ 1,\ 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x - 1y + 3z + D = 0 \\ 2\cdot(-2) - 1\cdot(1) + 3\cdot(0) + D = 0 \rightarrow -5 + D = 0 \rightarrow D = 5 \end{array}$$

$\boxed{\pi_2 \equiv 2x - y + 3z + 5 = 0}$

**Los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ se cortan formando la recta $s$ (recta solución del ejercicio):**



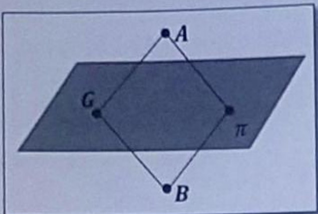

$$s \equiv \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases} \rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x - 3y + z + 5 = 0 \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}}$$

# 5. Problemas con punto genérico

Otra herramienta importante para la resolución de ejercicios es el uso del <u>**punto genérico**</u> $(G)$. **Se trata de aquel punto que estoy buscando al cual le impongo una <u>condición</u> con el objetivo de poder resolver el ejercicio.** Veamos unos cuantos ejemplos típicos:

**1.** Calcula el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos $A$ y $B$:

$A\,(1,\ 3,\ 0)$ y $B\,(0,\ 2,-1)$




**Para averiguar dicho lugar geométrico,** vamos a recurrir **a un punto genérico $G$,** al cual le imponemos la <u>**condición**</u> de que siempre esté a la misma distancia de $A$ y $B$.

$$G\,(x,\ y\,,\ z) \rightarrow\ d(A,G) = d(B,G)$$

Aplicamos distancia entre dos puntos, que ya sabemos que es el módulo del vector que forma:

$$\overrightarrow{AG} = G - A = (x,\ y\,,\ z) - (1,\ 3,\ 0) = (x-1,\ y-3,\ z-0)$$

$$d(A,G) = \left|\overrightarrow{AG}\right| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2}$$

$$\overrightarrow{BG} = G - B = (x,\ y\,,\ z) - (0,\ 2,-1) = (x-0,\ y-2,\ z+1)$$

$$d(B,G) = \left|\overrightarrow{BG}\right| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}$$

$$\boxed{d(A,G) = d(B,G) \rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}}$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2$$

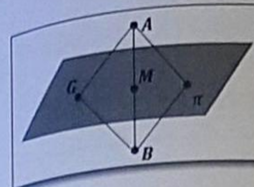
$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 6y + 9 + \cancel{z^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + 4 + \cancel{z^2} + 2z + 1$$

$$-2x - 2y - 2z + 5 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv -2x - 2y - 2z + 5 = 0}$$

¡¡Interesante!! Este ejercicio también podríamos haberlo resuelto acudiendo al <u>**plano mediador**</u>. ¡¡Vamos a definirlo y resolverlo de esta forma también!!






<u>**Plano mediador**</u>

Plano perpendicular al segmento formado por dos puntos y que lo corta en su punto medio.

**Es el lugar geométrico que equidista de dos puntos.**

Para resolver el ejercicio anterior mediante el plano mediador, nos hace falta un punto del plano (usaremos el punto medio $M$) y su vector normal (usaremos el vector formado $\overrightarrow{AB}$):

- Calculamos el punto medio $M$ del segmento formado por $A$ y $B$

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,\ 3,\ 0) + (0,\ 2,-1)}{2} = \frac{(1,\ 5,-1)}{2} = \left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{-1}{2}\right)$$

- Calculamos el vector normal del plano, que será el vector formado $\overrightarrow{AB}$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 2,-1) - (1,\ 3,\ 0) = (-1,-1,-1)$$

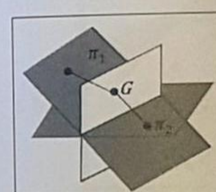
$$\pi \begin{cases} \vec{n}\ (-1,-1,-1) \\ M\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{-1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -1x - 1y - 1z + D = 0 \\ -1\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - 1\cdot\left(\frac{5}{2}\right) - 1\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) + D = 0 \rightarrow -\frac{5}{2} + D = 0 \rightarrow D = \frac{5}{2} \end{array}$$

$$\boxed{\pi \equiv -1x - 1y - 1z + {}^{5}\!/_{2} = 0} \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} \boxed{\pi \equiv -2x - 2y - 2z + 5 = 0}$$

**2.** Calcula el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos $\pi_1$ y $\pi_2$:

$\pi_1 \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv 6x + 2y - 3z - 5 = 0$

**El lugar geométrico que equidista de dos planos se conoce como <u>Plano Bisector</u>** (el plano que divide en dos ángulos iguales a otros dos planos).




**Para averiguar dicho lugar geométrico,** vamos a recurrir **a un punto genérico $G$,** al cual le imponemos la <u>**condición**</u> de que siempre esté a la misma distancia de $\pi_1$ y $\pi_2$

$$G\,(x,\ y\,,\ z) \rightarrow\ d(G,\pi_1) = d(G,\pi_2)$$

Aplicamos distancia entre punto y plano:

$$d(P,\pi) = \frac{|A\cdot P_x + B\cdot P_y + C\cdot P_z + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d(G,\pi_1)=\frac{|2x-y+2z+3|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2}}=\frac{|2x-y+2z+3|}{\sqrt{9}}=\frac{|2x-y+2z+3|}{3}$$

$$d(G,\pi_2)=\frac{|6x+2y-3z-5|}{\sqrt{(6)^2+(2)^2+(-3)^2}}=\frac{|6x+2y-3z-5|}{\sqrt{49}}=\frac{|6x+2y-3z-5|}{7}$$

$$\boxed{d(G,\pi_1)=d(G,\pi_2)\rightarrow\frac{|2x-y+2z+3|}{3}=\frac{|6x+2y-3z-5|}{7}}$$

¡¡Recuerda!! Las ecuaciones con valor absoluto tienen dos soluciones; una de ellas con las dos ecuaciones tal y como están con su signo (positiva) y la otra cambiando una de las ecuaciones de signo (negativa). **Por lo tanto, tendremos dos planos bisectores ($\alpha_1$ y $\alpha_2$):**

$$\frac{|2x-y+2z+3|}{3}=\frac{|6x+2y-3z-5|}{7}\begin{cases}a)\ \dfrac{2x-y+2z+3}{3}=\dfrac{6x+2y-3z-5}{7}\\[2ex] b)\ \dfrac{2x-y+2z+3}{3}=-\dfrac{6x+2y-3z-5}{7}\end{cases}$$

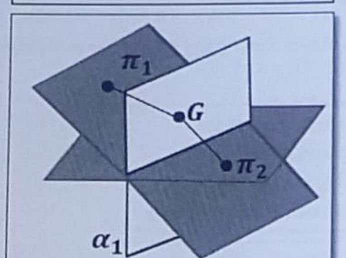
$a)\ \dfrac{2x-y+2z+3}{3}=\dfrac{6x+2y-3z-5}{7}\rightarrow 7(2x-y+2z+3)=3(6x+2y-3z-5)$

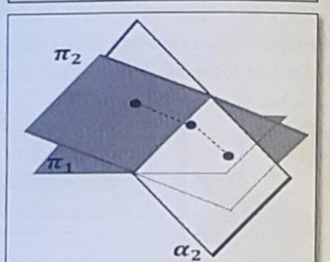
$14x-7y+14z+21=18x+6y-9z-15\ \rightarrow\ \mathbf{-4x-13y+23z+36=0}$

$b)\ \dfrac{2x-y+2z+3}{3}=-\dfrac{6x+2y-3z-5}{7}\rightarrow 7(2x-y+2z+3)=-3(6x+2y-3z-5)$

$14x-7y+14z+21=-18x-6y+9z+15\ \rightarrow\ \mathbf{32x-y+5z+6=0}$

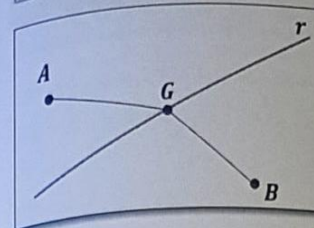
$$\boxed{\alpha_1\equiv -4x-13y+23z+36=0}\qquad\boxed{\alpha_2\equiv 32x-y+5z+6=0}$$






**3.** Halla un punto de la recta $r\equiv\begin{cases}x=-1+2t\\ y=-7+3t\\ z=t\end{cases}$ que equidiste de los puntos: $A\,(0,\ 1,\ 1)$ y $B\,(1,\ 2,\ 1)$




**Para averiguar dicho punto, recurrimos a un punto genérico *G* de la recta**, imponiendo la **condición** de que siempre esté a la misma distancia de *A* y *B*

$G\,(x,\ y,\ z)\rightarrow\ G\,(-1+2t,-7+3t,\ t)$*

$d(A,G)=d(B,G)$

* ¡¡Fíjate!! **Al tener la recta en forma paramétrica, el punto genérico va a depender de *t***

Aplicamos distancia entre dos puntos, que ya sabemos que es el módulo del vector que forma:

$\overrightarrow{AG}=G-A=(-1+2t,-7+3t,\ t)-(0,\ 1,\ 1)=(2t-1,\ 3t-8,\ t-1)$

$d(A,G)=|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{(2t-1)^2+(3t-8)^2+(t-1)^2}$

$\overrightarrow{BG}=G-B=(-1+2t,-7+3t,\ t)-(1,\ 2,\ 1)=(2t-2,\ 3t-9,\ t-1)$

$d(B,G)=|\overrightarrow{BG}|=\sqrt{(2t-2)^2+(3t-9)^2+(t-1)^2}$

$$\boxed{\begin{gathered}d(A,G)=d(B,G)\\ \sqrt{(2t-1)^2+(3t-8)^2+(t-1)^2}=\sqrt{(2t-2)^2+(3t-9)^2+(t-1)^2}\end{gathered}}$$

$$(2t-1)^2+(3t-8)^2+\cancel{(t-1)^2}=(2t-2)^2+(3t-9)^2+\cancel{(t-1)^2}$$

$$\cancel{4t^2}-4t+1+\cancel{9t^2}-48t+64=\cancel{4t^2}-8t+4+\cancel{9t^2}-54t+81$$

$$-52t+65=-62t+85\ \rightarrow\ 10t=20\ \rightarrow\ t=2$$

$G\,(x,\ y,\ z)\rightarrow\ G\,(-1+2t,-7+3t,\ t)\ \rightarrow G\,[-1+2(2),-7+3(2),\ (2)]$

$$\boxed{G=(3,-1,\ 2)}$$

# "Remix" de ejercicios del bloque de Geometría:

## Evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad

**1. Considera el punto $P(1,-1,\ 0)$ y la recta $r$ dada por** $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por $P$ y contiene a $r$.

b) Halla las coordenadas del punto simétrico de $P$ respecto de $r$.

**a) Caso II. Conocemos un punto del plano $P$ y dos vectores directores $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{PP_r}$:**

$$\pi\begin{cases} P(1,-1,\ 0) \\ \vec{v}_r(3,\ 0,\ 1) \\ \overrightarrow{PP_r} = P_r - P = (1,-2,\ 0)-(1,-1,\ 0) = (0,-1,\ 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-1 & y+1 & z-0 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix} =$$

$$= [0-3z+0]-[0-1\cdot(x-1)+0] = x-3z-1 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv x-3z-1=0}$$

**b) Calculamos el punto simétrico de $P(1,-1,\ 0)$ respecto a $r$ en los siguientes <u>pasos</u>:**

**Paso 1. Calculamos el plano $\pi$ perpendicular a $r$ que pasa por $P$:**

$$\pi\begin{cases} \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (3,\ 0,\ 1) \\ P(1,-1,\ 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3x+0y+1z+D=0 \\ 3\cdot(1)+0\cdot(-1)+1\cdot(0)+D=0 \to D=-3 \end{matrix}$$

$$\boxed{\pi = 3x+z-3=0}$$

**Paso 2. Calculamos el punto de corte a través de un <u>punto genérico</u> $M$ de la recta:**

$$M(x,\ y,\ z) \to \boxed{M(1+3t\ ,-2,\ t)}$$

**Sustituimos dicho punto en el <u>plano</u> para calcular el parámetro y obtener el punto $M$:**

$$3\cdot(1+3t)+(t)-3=0 \to 3+9t+t-3=0 \to 10\,t=0 \to t=0$$

$$\boxed{M = (1\,,-2,\ 0\ )}$$

**Paso 3. Calculamos el punto simétrico de $P$ mediante la fórmula:**

$$P' = 2M-P = 2\cdot(1\,,-2,\ 0\ )-(1,-1,\ 0) = (2\,,-4,\ 0\ )-(1,-1,\ 0) = \boxed{(1\,,-3,\ 0\ )}$$



**2. Dados los puntos $A(1,\ 2,\ 0)$, $B(-1,\ 1,\ 1)$, $C(0,\ 0,\ 1)$, $D(4,\ 1,\ 3)$. Determina:**

a) Si los cuatro puntos son coplanarios.

b) La recta $r$ que pasa por $D$ y es perpendicular al plano $\pi$ que contiene los puntos $A, B, C$.

c) El punto de corte de la recta $r$ con el plano $\pi$.

**a) Cuatro puntos son coplanarios si el producto mixto es cero: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$**

$$\overrightarrow{AB} = B-A = (-1,\ 1,\ 1)-(1,\ 2,\ 0) = (-2,-1,\ 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C-A = (0,\ 0,\ 1)-(1,\ 2,\ 0) = (-1,-2,\ 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = D-A = (4,\ 1,\ 3)-(1,\ 2,\ 0) = (3,-1,\ 3)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{matrix} = (12+1-3)-(-6+2+3) = 11 \neq 0$$

**Los cuatro puntos NO son coplanarios**

**b) - Calculamos el plano $\pi$ que contiene los puntos $A, B, C$.**

**<u>Caso II</u>. Conocemos un punto del plano $A$ y dos vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:**

$$\pi\begin{cases} A(1,\ 2,\ 0) \\ \overrightarrow{AB}(-2,-1,\ 1) \\ \overrightarrow{AC}(-1,-2,\ 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ -2 & -1 & 1 \end{matrix} =$$

$$= [-(x-1)+4z-(y-2)]-[z-2\cdot(x-1)-2\cdot(y-2)] =$$

$$= [-x+1+4z-y+2]-[z-2x+2-2y+4] = x+y+3z-3=0$$

$$\boxed{\pi \equiv x+y+3z-3=0}$$

**- Calculamos la recta $r$ sabiendo que pasa por $D$ y es perpendicular al plano $\pi$ (por lo que el vector director de la recta es el mismo que el vector normal del plano):**

$$r\begin{cases} D(4,\ 1,\ 3) \\ \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (1,\ 1,\ 3) \end{cases} \qquad \boxed{r \equiv \begin{cases} x = 4+t \\ y = 1+t \\ z = 3+3t \end{cases}}$$

**c) Calculamos el <u>punto de corte</u> a través de un <u>punto genérico</u> $I(x,\ y,\ z)$ de la recta:**

$$I(x,\ y,\ z) \to \boxed{I(4+t,\ 1+t,\ 3+3t)}$$

**Sustituimos dicho punto en el <u>plano</u> para calcular el parámetro y obtener el punto de corte $I$:**

$$(4+t)+(1+t)+3\cdot(3+3t)-3=0 \to 5+2t+9+9t-3=0 \to t = {}^{-11}/_{11} = -1$$

$$\boxed{I(3,\ 0,\ 0)}$$

**3. Sea el punto $P(1,\ 1,\ 1)$, la recta $r: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+y+z=1$**

Obtén, razonádamente, las ecuaciones de:

a) El plano que contiene al punto $P$ y a la recta $r$.

b) La recta $s$ que pasa por el punto $P$ y es perpendicular al plano $\pi$, la distancia del punto $P$ al plano $\pi$ y el punto de intersección de la recta $s$ con el plano $\pi$.

c) El plano $\sigma$ que contiene a la recta $r$ y es perpendicular al plano $\pi$.

**a) <u>Caso II</u>. Conocemos un punto del plano $P$ y dos vectores directores $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{PP_r}$:**

**Primero pasamos la ecuación de la recta $r$ a <u>paramétrica</u> para poder obtener $\vec{v}_r$ y $P_r$**

Para ello resolvemos el Sistema Compatible Indeterminado mediante Gauss:

$$\begin{cases} x+y-z+1=0 \ (E_1) \\ x+2y-z-1=0 \ (E_2) \end{cases} \Rightarrow E_2' = E_2 - E_1 \Rightarrow \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$$

Definimos $\boxed{z=t}$ y despejamos el resto de incógnitas de abajo a arriba:

$$\begin{cases} x+y-z+1=0 \ \rightarrow \ x+2-t+1=0 \ \rightarrow \ \boxed{x=-3+t} \\ y-2=0 \ \rightarrow \ \boxed{y=2} \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x=-3+t \\ y=2 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-3,\ 2,\ 0) \\ \vec{v}_r(1,\ 0,\ 1) \end{cases}$$

$$\pi' \begin{cases} P(1,\ 1,\ 1) \\ \vec{v}_r(1,\ 0,\ 1) \\ \overrightarrow{PP_r} = P_r - P = (-3,\ 2,\ 0)-(1,\ 1,\ 1) = (-4,\ 1,-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= [0+1\cdot(z-1)-4\cdot(y-1)]-[0+1\cdot(x-1)-1\cdot(y-1)] =$$

$$= [0+z-1-4y+4]-[0+x-1-y+1] = -x-3y+z+3=0$$

$$\boxed{\pi' \equiv -x-3y+z+3=0}$$

**b) - Recta $s$ que pasa por el punto $P$ y es perpendicular al plano $\pi$:**

$$s \begin{cases} P(1,\ 1,\ 1) \\ \vec{v}_s = \vec{n}_\pi = (1,\ 1,\ 1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}}$$

¡¡Truco!! Recuerda no poner el mismo parámetro a 2 rectas diferentes. Vamos a llamarla, por ejemplo, $\lambda$



**- Distancia del punto $P$ al plano $\pi$:**

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|A\cdot P_x + B\cdot P_y + C\cdot P_z + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

¡¡OJO!!

Racionalizamos

$$d(P,\pi) = \frac{|1\cdot(1)+1\cdot(1)+1\cdot(1)-1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\ u}$$

**- Calculamos el punto de Intersección a través de un <u>punto genérico</u> $I$ de la recta $s$:**

$$I(x,\ y,\ z) \rightarrow \boxed{I(1+\lambda,\ 1+\lambda,\ 1+\lambda)}$$

**Sustituimos dicho punto en el <u>plano</u> para calcular el parámetro y obtener el punto $I$:**

$$(1+\lambda)+(1+\lambda)+(1+\lambda)-1=0 \quad \rightarrow \quad 3\lambda+2=0 \quad \rightarrow \quad \lambda = {}^{-2}/_{3}$$

$$I \begin{cases} x = 1+\lambda = 1+\left(\frac{-2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) \\ y = 1+\lambda = 1+\left(\frac{-2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) \\ z = 1+\lambda = 1+\left(\frac{-2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) \end{cases} \qquad \boxed{I = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)}$$

**c) Plano $\sigma$ que contiene a la recta $r$ y es perpendicular al plano $\pi$:**

**<u>Caso II</u>: Conocemos un punto del plano $P_r$ y dos vectores directores $\vec{v}_r$ y $\vec{n}_\pi$:**

$$\sigma \begin{cases} P_r(-3,\ 2,\ 0) \\ \vec{v}_r(1,\ 0,\ 1) \\ \vec{n}_\pi(1,\ 1,\ 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} x+3 & y-2 & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= [0+z+1\cdot(y-2)]-[0+1\cdot(x+3)+1\cdot(y-2)] =$$

$$= [z+y-2]-[x+3+y-2] = -x+z-3=0$$

$$\boxed{\sigma \equiv -x+z-3=0}$$

**4. Sea $T$ un tetraedro de vértices:**

$O=(0,\ 0,\ 0)$, $A=(1,\ 1,\ 1)$, $B=(3,\ 0,\ 0)$ y $C=(0,\ 3,\ 0)$.

Obtén, razonádamente:

a) La ecuación del plano $\pi$ que contiene a los puntos $A$, $B$ y $C$, y la ecuación de la recta $h_o$ perpendicular a $\pi$ que pasa por $O$.

b) El punto de intersección de la altura $h_o$ y el plano $\pi$.

c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos $A$, $B$ y $C$.

**a) - Ecuación del plano $\pi$ que contiene a los puntos $A$, $B$ y $C$:**

**Caso II: Conocemos un punto del plano $A$ y dos vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:**

$$\pi\begin{cases} A(1,\ 1,\ 1) \\ \overrightarrow{AB}=B-A=(3,\ 0,\ 0)-(1,\ 1,\ 1)=(2,-1,-1) \\ \overrightarrow{AC}=C-A=(0,\ 3,\ 0)-(1,\ 1,\ 1)=(-1,\ 2,-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$$=[1\cdot(x-1)+4\cdot(z-1)+1\cdot(y-1)]-[1\cdot(z-1)-2\cdot(x-1)-2\cdot(y-1)]=$$

$$=[x-1+4z-4+y-1]-[z-1-2x+2-2y+2]=3x+3y+3z-9=0$$

$$\boxed{\pi\equiv 3x+3y+3z-9=0} \qquad \boxed{\pi\equiv x+y+z-3=0}$$

Simplificamos

**-Ecuación de la recta $h_o$ perpendicular a $\pi$ que pasa por $O$:**

$$h_o\begin{cases} O=(0,\ 0,\ 0) \\ \vec{v}_{h_o}=\vec{n}_\pi=(1,\ 1,\ 1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{h_o\equiv\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}}$$

**b) Calculamos el punto de Intersección a través de un punto genérico $I$ de la recta:**

$$I(x,\ y,\ z)\rightarrow \boxed{I(t,\ t,\ t)}$$

**Sustituimos dicho punto en el plano para calcular el parámetro y obtener el punto $I$:**

$$(t)+(t)+(t)-3=0 \quad\rightarrow\quad 3t-3=0 \quad\rightarrow\quad t=\frac{3}{3}=1$$

$$\boxed{I=(1,\ 1,\ 1)}$$



**c) - Área de la cara cuyos vértices son los puntos $A$, $B$ y $C$:**

$$\text{Área del triángulo}=\boxed{\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}}$$

$$\overrightarrow{AB}(2,-1,-1) \qquad \overrightarrow{AC}(-1,\ 2,-1)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=(\vec{\imath}+4\vec{k}+\vec{\jmath})-(\vec{k}-2\vec{\imath}-2\vec{\jmath})=3\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+3\vec{k}=(3,\ 3,\ 3)$$
$$\begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(3)^2+(3)^2+(3)^2}=\sqrt{27}$$

$$\text{Área del triángulo}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}=\frac{\sqrt{27}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\simeq 2,6\ u^2$$

**- Volumen del tetraedro $T$:**

$$\text{Volumen del tetraedro}=\boxed{{}^1/_6\cdot|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AO}]|}$$

$$\overrightarrow{AB}(2,-1,-1) \qquad \overrightarrow{AC}(-1,\ 2,-1) \qquad \overrightarrow{AO}=O-A=(0,\ 0,\ 0)-(1,\ 1,\ 1)=(-1,-1,-1)$$

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AO}]=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(-4-1-1)-(2+2-1)=-9$$
$$\begin{matrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{matrix}$$

$$\text{Volumen del tetraedro}={}^1/_6\cdot|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AO}]|={}^1/_6\cdot|-9|={}^9/_6=\boxed{{}^3/_2\,u^3}$$

**5. Dados los puntos $P(1,-2,\ 1)$, $Q(-4,\ 0,\ 1)$, $R(-3,\ 1,\ 2)$ , $S(0,-3,\ 0)$**

a) Halla la ecuación del plano que contiene a $P$, $Q$ y $R$.

b) Estudia la posición relativa de la recta $r$, que pasa por los puntos $P$ y $Q$, y la recta $s$, que pasa por $R$ y $S$.

c) Halla el área del triángulo formado por los puntos $P$, $Q$ y $R$.

**a) Ecuación del plano que contiene a $P$, $Q$ y $R$:**

**a) Ecuación del plano que contiene a $P$, $Q$ y $R$ y dos vectores directores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$:**

**<u>Caso I</u>: Conocemos un punto del plano $P$ y dos vectores directores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$:**

$$\pi\begin{cases} P(1,-2,\ 1) \\ \overrightarrow{PQ} = Q - P = (-4,\ 0,\ 1) - (1,-2,\ 1) = (-5,\ 2,\ 0) \\ \overrightarrow{PR} = R - P = (-3,\ 1,\ 2) - (1,-2,\ 1) = (-4,\ 3,\ 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \end{matrix}$$

$$= [2\cdot(x-1) - 15\cdot(z-1) + 0] - [-8\cdot(z-1) + 0 - 5\cdot(y+2)] =$$

$$= [2x - 2 - 15z + 15] - [-8z + 8 - 5y - 10] = \mathbf{2x + 5y - 7z + 15 = 0}$$

$$\boxed{\pi \equiv 2x + 5y - 7z + 15 = 0}$$

**b) Posición relativa de la recta $r$, que pasa por $P$ y $Q$, y la recta $s$, que pasa por $R$ y $S$.**

$$r\begin{cases} P_r = P = (1,-2,\ 1) \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (-5,\ 2,\ 0) \end{cases}$$

$$s\begin{cases} P_s = R = (-3,\ 1,\ 2) \\ \vec{v}_s = \overrightarrow{RS} = S - R = (0,-3,\ 0) - (-3,\ 1,\ 2) = (3,-4,-2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (-3,\ 1,\ 2) - (1,-2,\ 1) = (-4,\ 3,\ 1)$$

**- Formamos las matrices $A$ y $A^*$ con los vectores anteriores y calculamos sus rangos para determinar la posición relativa entre las rectas:**

$$A^* = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (20 + 0 + 16) - (0 + 30 + 6) = 0$$
$$\begin{matrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{matrix}$$

**Como la matriz $A^*$ tiene el determinante $3x3 = 0$, el $rg(A^*)$ <u>no</u> puede ser 3**



**Por lo tanto, ahora buscamos un determinante 2x2 que sea distinto de cero:**

$$A^* = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 20 - 6 = \mathbf{14 \neq 0}$$

**Como la matriz $A^*$ tiene un determinante $2x2 \neq 0$, el $rg(A^*) = 2$**

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 20 - 6 = \mathbf{14 \neq 0}$$

**Como la matriz $A$ tiene un determinante $2x2 \neq 0$, el $rg(A) = 2$**

| $rg(A^*) = 2 = rg(A)$ | **LAS RECTAS SE CORTAN** |
|---|---|

**c) Área del triángulo formado por los puntos $P$, $Q$ y $R$:**

**Área del triángulo** $= \boxed{\dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2}}$

$$\overrightarrow{PQ}(-5,\ 2,\ 0) \qquad \overrightarrow{PR}(-4,\ 3,\ 1)$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (2\vec{i} - 15\vec{k} + 0) - (-8\vec{k} + 0 - 5\vec{j}) = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k} = (2,\ 5,-7)$$
$$\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 2 & 0 \end{matrix}$$

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{(2)^2 + (5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{78}$$

**Área del triángulo** $= \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \dfrac{\sqrt{78}}{2} \simeq \boxed{4,42\ u^2}$

**6. a) Determina la distancia entre las rectas:**

$$r_1 \equiv x = y = z \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$$

**b) Obtén el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2-y = z-1$ con el plano perpendicular a $s$, que pasa por el origen.**

**a) ¡¡Recuerda!! Para calcular la distancia entre dos rectas primero siempre debemos estudiar su posición relativa:**

**- Primero pasamos la ecuación de la recta $r_2$ a paramétrica para poder obtener $\vec{v}_{r_2}$ y $P_{r_2}$**

Puesto que en la segunda ecuación falta $y$, podemos definir $\boxed{z=t}$ y despejar:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \rightarrow \ -1+t+y-1=0 \rightarrow \ \rightarrow \boxed{y=2-t} \\ x-t+1=0 \rightarrow \boxed{x=-1+t} \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x=-1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{r_2}(-1,\ 2,\ 0) \\ \vec{v}_{r_2}(1,-1,\ 1) \end{cases}$$

$$r_1 \equiv x=y=z \Rightarrow \begin{cases} P_{r_1}(0,\ 0,\ 0) \\ \vec{v}_{r_1}(1,\ 1,\ 1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = P_{r_2} - P_{r_1} = (-1,\ 2,\ 0) - (0,\ 0,\ 0) = (-1,\ 2,\ 0)$$

**- Formamos las matrices $A$ y $A^*$ con los vectores anteriores y calculamos sus rangos para determinar la posición relativa entre las rectas:**

$$A^* = \begin{pmatrix} \vec{v}_{r_1} \\ \vec{v}_{r_2} \\ \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \vec{v}_{r_1} \\ \vec{v}_{r_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0+2-1)-(1+2+0) = -2 \neq 0$$
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}$$

| |
|---|
| Como la matriz $A^*$ tiene el determinante $3x3 \neq 0$, el $rg(A^*) = 3$ |
| LAS RECTAS SE CRUZAN |



**Ya podemos calcular la distancia entre $r_1$ y $r_2$ sabiendo que se cruzan. Usaremos la fórmula:**

$$d(r_1, r_2) = \frac{\left|\left[\vec{v}_{r_1}, \vec{v}_{r_2}, \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}\right]\right|}{|\vec{v}_{r_1} \times \vec{v}_{r_2}|}$$

**Fíjate que $\left[\vec{v}_{r_1}, \vec{v}_{r_2}, \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}\right] = |A^*| = -2$**

$$\vec{v}_{r_1} \times \vec{v}_{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\vec{\imath} - \vec{k} + \vec{\jmath}) - (\vec{k} - \vec{\imath} + \vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} - 2\vec{k} = (2,\ 0,-2)$$
$$\begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$|\vec{v}_{r_1} \times \vec{v}_{r_2}| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{\left|\left[\vec{v}_{r_1}, \vec{v}_{r_2}, \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}\right]\right|}{|\vec{v}_{r_1} \times \vec{v}_{r_2}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2\sqrt{8}}{8} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq \boxed{0{,}7\ u}$$

**b) - Calculamos el plano $\pi$ perpendicular a $s$ que pasa por el origen $P(0,\ 0,\ 0)$:**

$$s \equiv x = \boxed{2-y} = z-1$$

¡¡Cuidado!! $y$ es negativa por lo que tenemos que multiplicar arriba y abajo por $-1$

$$\boxed{2-y} = \frac{-1\cdot(2-y)}{-1} = \boxed{\frac{y-2}{-1}}$$

$$s \equiv x = \frac{y-2}{-1} = z-1 \Rightarrow \begin{cases} P_s(0,\ 2,\ 1) \\ \vec{v}_s(1,-1,\ 1) \end{cases}$$

$$\pi \begin{cases} \vec{n}_\pi = \vec{v}_s = (1,-1,\ 1) \\ P(0,\ 0,\ 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 1x - 1y + 1z + D = 0 \\ 1\cdot(0) - 1\cdot(0) + 1\cdot(0) + D = 0 \rightarrow D = 0 \end{matrix}$$

$$\boxed{\pi \equiv x - y + z = 0}$$

**- Calculamos el punto de corte a través de un punto genérico $I$ de la recta $s$:**

$$s\begin{cases} P_s(0,\ 2,\ 1) \\ \vec{v}_s(1,-1,\ 1) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow I(x,\ y,\ z) \rightarrow \ I(t,\ 2-t,\ 1+t)$$

**Sustituimos dicho punto en el plano para calcular el parámetro y obtener el punto $I$:**

$$(t) - (2-t) + (1+t) = 0 \quad \rightarrow \quad 3t - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad t = {}^{1}\!/_{3}$$

$$I\begin{cases} x = t = {}^{1}\!/_{3} \\ y = 2 - t = 2 - {}^{1}\!/_{3} = {}^{5}\!/_{3} \\ z = 1 + t = 1 + {}^{1}\!/_{3} = {}^{4}\!/_{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{I = \left(\frac{1}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{3}\right)}$$

**7. Considera las rectas dadas por:**

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

a) Demuestra que las rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.

b) Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas $r$ y $s$ , calcula su área.

**a) Las rectas serán coplanarias siempre y cuando no se crucen. Vamos a estudiar su posición:**

**- Primero pasamos la ecuación de la recta $s$ a paramétrica para poder obtener $\vec{v}_s$ y $P_s$**

Podemos definir $\boxed{y = t}$ y obtener el valor de la $x$:

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \;\rightarrow\; x + 2t = -1 \;\rightarrow\; \boxed{x = -1 - 2t} \\ \boxed{z = -1} \end{cases} \Rightarrow \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,\ 1,\ 1) \\ \vec{v}_r(2, -1,\ 0) \end{cases}$ | $s \equiv \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s(-1,\ 0, -1) \\ \vec{v}_s(-2,\ 1,\ 0) \end{cases}$ |
| $\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (-1,\ 0, -1) - (1,\ 1,\ 1) = (-2, -1, -2)$ | |

**- Formamos las matrices $A$ y $A^*$ con los vectores anteriores y calculamos sus rangos para determinar la posición relativa entre las rectas:**

$$A^* = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-4 + 0 + 0) - (0 + 0 - 4) = 0$$
$$\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

**Como la matriz $A^*$ tiene el determinante $3x3 = 0$, el $rg(A^*)$ no puede ser 3**

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & \boxed{1 \quad 0} \\ -2 & \boxed{-1 \quad -2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2 \neq 0$$

**Como la matriz $A^*$ tiene un determinante $2x2 \neq 0$, el $rg(A^*) = 2$**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Puesto que las filas son proporcionales, podemos concluir que $rg(A) = 1$**

| $Rg\ (A) = 1 \neq Rg(A^*) = 2$ | **RECTAS PARALELAS → SON COPLANARIAS** |
|---|---|

¡¡Interesante!! Podríamos haber concluido directamente que son rectas coplanarias (es decir, no se cruzan) si nos hubiéramos dado cuenta de que $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ **son proporcionales** (ya que en esta situación podrían ser paralelas o coincidentes pero nunca se cruzarán).



**Ecuación del plano que las contiene:**

Caso I. Conocemos un punto del plano $P_r$ y un vector director $\vec{v}_r$ sin embargo no podemos usar $\vec{v}_s$ **como el otro vector director porque son paralelos. Cogemos, por tanto:** $\overrightarrow{P_rP_s}$

$$\pi \begin{cases} P_r(1,\ 1,\ 1) \\ \vec{v}_r(2, -1,\ 0) \\ \overrightarrow{P_rP_s}(-2, -1, -2) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{matrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix}$$

$$= [2 \cdot (x-1) - 2 \cdot (z-1) + 0] - [2 \cdot (z-1) + 0 - 4 \cdot (y-1)] =$$

$$= [2x - 2 - 2z + 2] - [2z - 2 - 4y + 4] = \mathbf{2x + 4y - 4z - 2 = 0}$$

$$\boxed{\pi \equiv 2x + 4y - 4z - 2 = 0} \qquad \boxed{\pi \equiv x + 2y - 2z - 1 = 0}$$

Simplificamos

b) Como las rectas son paralelas → **Área $= d^2$** (siendo $d$ la distancia entre dos rectas paralelas)

$$\boxed{d(r,s) = d(P_s, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{P_rP_s}|}{|\vec{v}_r|}}$$

$$\vec{v}_r \times \overrightarrow{P_rP_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (2\vec{i} - 2\vec{k} + 0) - (2\vec{k} + 0 - 4\vec{j}) = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k} = (2,\ 4, -4)$$
$$\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix}$$

$$|\vec{v}_r \times \overrightarrow{P_rP_s}| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6\ ; \quad |\vec{v}_r| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{5}$$

$$d(r,s) = d(P_s, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{P_rP_s}|}{|\vec{v}_r|} = \frac{6}{\sqrt{5}} u$$

$$\boxed{\text{Área} = d^2 = \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{36}{5}\ u^2}$$

**8.** En $\mathbb{R}^3$ se consideran las rectas de ecuaciones:

$$r:\begin{cases} 3x+2y=0 \\ x-2z=-8 \end{cases} \quad y \quad s: \frac{x+1}{-2}=\frac{y-3}{a}=\frac{z-1}{-1}$$

a) Halla el valor de $a$ para que $r$ y $s$ sean paralelas.

b) Para el valor de $a$ obtenido en el apartado a), calcula la distancia entre las rectas $r$ y $s$.

**a) Vamos a estudiar la posición relativa de las rectas en función del parámetro $a$:**

**- Primero pasamos la ecuación de la recta $r$ a <u>paramétrica</u> para poder obtener $\vec{v}_r$ y $P_r$**

Puesto que en la segunda ecuación falta $y$, podemos definir $\boxed{z=t}$ y despejar:

$$\begin{cases} 3x+2y=0 \rightarrow 3\cdot(-8+2t)+2y=0 \rightarrow -24+6t+2y=0 \rightarrow \boxed{y=\dfrac{24-6t}{2}=12-3t} \\ x-2z=-8 \rightarrow x-2t=-8 \rightarrow \boxed{x=-8+2t} \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| $r\equiv\begin{cases} x=-8+2t \\ y=12-3t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-8,\ 12,\ 0) \\ \vec{v}_r(2,-3,\ 1) \end{cases}$ | $s\begin{cases} P_s(-1,\ 3,\ 1) \\ \vec{v}_s(-2,\ a,-1) \end{cases}$ |
| $\overrightarrow{P_rP_s}=P_s-P_r=(-1,\ 3,\ 1)-(-8,\ 12,\ 0)\ =(7,-9,\ 1)$ | |

**- Formamos las matrices $A$ y $A^*$ con los vectores anteriores y calculamos sus rangos para determinar la posición relativa entre las rectas:**

$$A^*=\begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & a & -1 \\ 7 & -9 & 1 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & a & -1 \end{pmatrix}$$

**Calculamos los valores de $a$ para los cuales $|A^*|=0$:**

$$|A^*|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & a & -1 \\ 7 & -9 & 1 \end{vmatrix}=(2a+18+21)-(7a+18+6)=\mathbf{-5a+15=0}\rightarrow \mathbf{a=3}$$

$$\begin{matrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & a & -1 \end{matrix}$$

| Si $\mathbf{a\neq 3}\rightarrow\ |A^*|\neq 0\ \rightarrow$ Determinante $3x3\neq 0\rightarrow\ \boldsymbol{rg(A^*)=3}$ |
|---|
| LA RECTAS SE CRUZAN |



Si $a=3\rightarrow\ |A^*|=0$ El rango de la matriz $A^*$ no podrá ser 3. Por lo tanto, sustituimos $a=3$ en la matriz buscando un determinante 2x2 que sea distinto de cero:

$$|A^*|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 7 & -9 & 1 \end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

**Como la matriz $A^*$ tiene un determinante $2x2\neq 0$, el $rg(A^*)=2$**

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

**Puesto que las filas son proporcionales, podemos concluir que $rg(A)=1$**

| Si $a=3\rightarrow \boldsymbol{Rg\ (A)=1\neq Rg(A^*)=2}$ | **LAS RECTAS SON PARALELAS** |
|---|---|

**b)** Recordamos que para $\mathbf{a=3}$ las rectas son **<u>paralelas</u>**. Para calcular la distancia entre rectas paralelas, cogemos un punto de una recta y calculamos la distancia de ese punto a la otra recta

Interesante: Fíjate que este apartado podríamos realizarlo de dos formas: $d(P_s,r)$ ó $d(P_r,s)$. Vamos a elegir la primera forma porque así no entra en juego $\vec{v}_s$ y en el caso de tener mal el apartado anterior, no influiría en este otro (A esto lo vamos a llamar... "Truco del perro viejo").

$$\boxed{d(r,s)=d(P_s,r)=\frac{|\vec{v}_r\times\overrightarrow{P_rP_s}|}{|\vec{v}_r|}}$$

$$\vec{v}_r\times\overrightarrow{P_rP_s}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 7 & -9 & 1 \end{vmatrix}=(-3\vec{\imath}-18\vec{k}+7\vec{\jmath})-(-21\vec{k}-9\vec{\imath}+2\vec{\jmath})=6\vec{\imath}+5\vec{\jmath}+3\vec{k}=(6,5,3)$$

$$\begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \end{matrix}$$

$$|\vec{v}_r\times\overrightarrow{P_rP_s}|=\sqrt{(6)^2+(5)^2+(3)^2}=\sqrt{70}\,;\quad |\vec{v}_r|=\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(1)^2}=\sqrt{14}$$

$$d(r,s)=d(P_s,r)=\frac{|\vec{v}_r\times\overrightarrow{P_rP_s}|}{|\vec{v}_r|}=\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{14}}=\sqrt{5}\simeq 2,24\,u$$

**9. Considerando los puntos $A(0,\ 5,\ 3), B(0,\ 6,\ 4), C(2,\ 4,\ 2), D(2,\ 3,\ 1)$**

**a) Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo.**

**b) Calcula el área de dicho paralelogramo.**

**c) Determina el lugar geométrico de los puntos $P$ cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio del paralelogramo.**

**a) - Cuatro puntos son coplanarios si el producto mixto es cero: $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = 0$**

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 6,\ 4) - (0,\ 5,\ 3) = (0,\ 1,\ 1)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,\ 4,\ 2) - (0,\ 5,\ 3) = (2,-1,-1)$$
$$\overrightarrow{AD} = D - A = (2,\ 3,\ 1) - (0,\ 5,\ 3) = (2,-2,-2)$$

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = \begin{array}{|ccc|} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{array} = (0-4-2)-(-2+0-4) = \mathbf{0}$$
$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}$$

**Los cuatro puntos son coplanarios**

**- Para que el polígono $ABCD$ sea un paralelogramo se tiene que cumplir:**

$$\boxed{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (2,-2,-2) \\ \overrightarrow{BC} = C - B = (2,\ 4,\ 2) - (0,\ 6,\ 4) = (2,-2,-2) \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0,\ 1,\ 1) \\ \overrightarrow{DC} = C - D = (2,\ 4,\ 2) - (2,\ 3,\ 1) = (0,\ 1,\ 1) \end{cases} \checkmark$$

**Puesto que se cumplen las igualdades, $ABCD$ es un paralelogramo**

**b) Área del paralelogramo:**

$$\boxed{\text{Área del paralelogramo} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{array}{|ccc|} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{array} = (-\vec{i}+0+2\vec{j}) - (2\vec{k}-\vec{i}+0) = 0\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k} = (0,\ 2,-2)$$
$$\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(0)^2+(2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$\text{Área del paralelogramo} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{8} = 2\cdot\sqrt{2} \simeq \boxed{2,83\ u^2}$$



**c) El lugar geométrico de los puntos $P$ cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio del paralelogramo, <u>es una recta que pasa por $M$ y es perpendicular al plano $ABCD$.</u>**

$$M = \frac{A+C}{2} = \frac{(0,\ 5,\ 3)+(2,\ 4,\ 2)}{2} = \frac{(2,\ 9,\ 5)}{2} = \left(1,\ \frac{9}{2},\ \frac{5}{2}\right)$$

**- Calculamos el plano definido por los puntos $A$, $B$ y $C$:**

**<u>Caso II</u>: Conocemos un punto del plano $A$ y dos vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:**

$$\pi \begin{cases} A(0,\ 5,\ 3) \\ \overrightarrow{AB}(0,\ 1,\ 1) \\ \overrightarrow{AC}(2,-1,-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{|ccc|} x-0 & y-5 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{array} =$$
$$\begin{array}{ccc} x-0 & y-5 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$= [-x+0+2\cdot(y-5)] - [2\cdot(z-3)-x+0] =$$
$$= [-x+2y-10] - [2z-6-x] = 2y-2z-4 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv 2y-2z-4 = 0} \qquad \boxed{\pi \equiv y-z-2 = 0}$$

Simplificamos

**- Calculamos la ecuación de la recta que pasa por $M$ y es perpendicular al plano $\pi$:**

$$r \begin{cases} P_r = M = \left(1,\ {}^9/_2,\ {}^5/_2\right) \\ \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (0,\ 1,-1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = {}^9/_2 + t \\ z = {}^5/_2 - t \end{cases}$$

**10. Dados el plano $\pi \equiv 2x - y = 2$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$**

**a) Estudia la posición relativa de $r$ y $\pi$**

**b) Determina el plano que contiene a $r$ y es perpendicular a $\pi$**

**c) Determina la recta que pasa por $A(-2,\ 1,\ 0)$, corta a $r$ y es paralela a $\pi$**

**a) - Pasamos la ecuación de la recta $r$ a <u>paramétrica</u> para poder obtener $\vec{v}_r$ y $P_r$**

Podemos definir $\boxed{z = t}$ y despejar la $y$:

$$\begin{cases} \boxed{x = 1} \\ y - 2z = 2 \rightarrow \quad y - 2t = 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{y = 2 + 2t} \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,\ 2,\ 0) \\ \vec{v}_r(0,\ 2,\ 1) \end{cases}$$

- Estudiamos la posición relativa entre $r$ y $\pi$:

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (0,\ 2,\ 1) \cdot (2, -1,\ 0) = 0 - 2 + 0 = -2 \neq 0$ $\boxed{\text{La recta y el plano son secantes}}$

b) Caso II: Conocemos un punto del plano y dos vectores directores ($\vec{v}_1 = \vec{v}_r$ y $\vec{v}_2 = \vec{n}_\pi$)

$$\alpha \begin{cases} P_r(1,\ 2,\ 0) \\ \vec{v}_1(0,\ 2,\ 1) \\ \vec{v}_2(2, -1,\ 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$= [0 + 0 + 2 \cdot (y-2)] - [4z - (x-1) + 0] =$$
$$= [0 + 0 + 2 \cdot (y-2)] - [4z - (x-1) + 0] = x + 2y - 4z - 5 = 0$$
$$= 2y - 4 - 4z + x - 1 = x + 2y - 4z - 5 = 0$$

$$\boxed{\alpha \equiv x + 2y - 4z - 5 = 0}$$

c) Paso 1. Calculamos $\pi_1$ que es paralelo a $\pi$ y pasa por $A$:

$$\pi_1 \begin{cases} \vec{n}_{\pi_1} = \vec{n}_\pi = (2, -1,\ 0) \\ A(-2,\ 1,\ 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x - 1y + 0z + D = 0 \\ 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (1) + 0 \cdot (0) + D = 0 \to D = 5 \end{matrix}$$

$$\boxed{\pi_1 = 2x - y + 5 = 0}$$

Paso 2. Calculamos el punto de corte a través de un punto genérico $I(x,\ y,\ z)$ de la recta $r$:

$$I(x,\ y,\ z) \to \boxed{I(1,\ 2 + 2t,\ t)}$$

Sustituimos dicho punto en el plano para calcular el parámetro y obtener el punto de corte $I$:

$$\pi_1 = 2x - y + 5 = 0$$

$$2 \cdot (1) - (2 + 2t) + 5 = 0 \to 2 - 2 - 2t + 5 = 0 \to t = {}^5/_2$$

$$\boxed{I = (1,\ 7,\ {}^5/_2)}$$

Paso 3. La recta solución pasa por $A(-2,\ 1,\ 0)$ y por $I(1,\ 7,\ {}^5/_2)$ por lo tanto:

$$\vec{v}_s = \overrightarrow{AI} = I - A = (1,\ 7,\ {}^5/_2) - (-2,\ 1,\ 0) = (3,\ 6,\ {}^5/_2)$$

$$S \begin{cases} A_s(-2,\ 1,\ 0) \\ \vec{v}_s(3,\ 6,\ {}^5/_2) \end{cases} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 + 6t \\ z = {}^5/_2 t \end{cases}}$$



**11. Sea el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z - 5 = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$**

**Calcula los puntos de $r$ que distan 6 unidades del plano $\pi$.**

Pasamos la recta a forma paramétrica:

$$r \equiv \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(7, -6, -3) \\ \vec{v}_r(2, -1,\ 2) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -6 - t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

**Para averiguar dicho punto, recurrimos a un punto genérico $G$ de la recta, imponiendo la condición de que siempre diste 6 unidades del plano:**

$$G(x,\ y,\ z) \to G(7 + 2t,\ -6 - t,\ -3 + 2t)$$

$$\boxed{d(G, \pi) = 6}$$

$$d(G, \pi) = \frac{|A \cdot G_x + B \cdot G_y + C \cdot G_z + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|2 \cdot (7 + 2t) - 1 \cdot (-6 - t) + 2 \cdot (-3 + 2t) - 5|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} = \frac{|14 + 4t + 6 + t - 6 + 4t - 5|}{\sqrt{9}} =$$

$$= \frac{|9t + 9|}{3} \quad \textit{Puesto que } d(G, \pi) = 6 \to \frac{|9t + 9|}{3} = 6 \to |9t + 9| = 18$$

¡¡Recuerda!! Las ecuaciones con valor absoluto se resuelven igualando al positivo y negativo:

$$|9t + 9| = 18 \begin{cases} 9t + 9 = 18 \to t = \frac{9}{9} = 1 \\ 9t + 9 = -18 \to t = \frac{-27}{9} = -3 \end{cases}$$

$$\text{Si } t = 1 \to G_1 \begin{cases} x = 7 + 2t = 7 + 2 \cdot (1) = 9 \\ y = -6 - t = -6 - (1) = -7 \\ z = -3 + 2t = -3 + 2 \cdot (1) = -1 \end{cases} \quad \boxed{G_1(9, -7, -1)}$$

$$\text{Si } t = -3 \to G_2 \begin{cases} x = 7 + 2t = 7 + 2 \cdot (-3) = 1 \\ y = -6 - t = -6 - (-3) = -3 \\ z = -3 + 2t = -3 + 2 \cdot (-3) = -9 \end{cases} \quad \boxed{G_2(1, -3, -9)}$$

**12.** Calcula los puntos de la recta $r$ que equidistan de los planos $\pi_1$ y $\pi_2$:

$$r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2} \quad ; \quad \pi_1 \equiv x+y+z+3=0 \quad ; \quad \pi_2 \equiv x+y-z-3=0$$

Pasamos la recta a forma <u>paramétrica</u>:

$$r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,-1,\ 0) \\ \vec{v}_r(2,\ 1,\ 2) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=2t \end{cases}$$

**Para averiguar dicho punto,** recurrimos a un punto genérico $G$ de la <u>recta</u>, imponiendo la <u>condición</u> de que siempre esté a la misma distancia de $\pi_1$ y $\pi_2$:

$$G(x,\ y,\ z) \to G(1+2t,\ -1+t,\ 2t\ )$$

$$\boxed{d(G,\pi_1)=d(G,\pi_2)}$$

$$d(G,\pi_1)=\frac{|A\cdot G_x+B\cdot G_y+C\cdot G_z+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot(1+2t)+1\cdot(-1+t)+1\cdot(2t)+3|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}}=$$

$$=\frac{|5t+3|}{\sqrt{3}}$$

$$d(G,\pi_2)=\frac{|A\cdot G_x+B\cdot G_y+C\cdot G_z+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot(1+2t)+1\cdot(-1+t)-1\cdot(2t)-3|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{|t-3|}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{d(G,\pi_1)=d(G,\pi_2)}$$

$$\frac{|5t+3|}{\cancel{\sqrt{3}}}=\frac{|t-3|}{\cancel{\sqrt{3}}} \to |5t+3|=|t-3|$$

¡¡Recuerda!! Las ecuaciones con valor absoluto se resuelven igualando al <u>positivo</u> y <u>negativo</u>:

$$|5t+3|=|t-3| \begin{cases} 5t+3=t-3 \to t=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2} \\ 5t+3=-t+3 \to 6t=0 \to t=0 \end{cases}$$

$$\text{Si } t=\left(-3/_2\right) \to G_1 \begin{cases} x=1+2t=1+2\cdot\left(-3/_2\right)=-2 \\ y=-1+t=-1+\left(-3/_2\right)=-5/_2 \\ z=2t=2\cdot\left(-3/_2\right)=-3 \end{cases} \qquad \boxed{G_1\left(-2,\ -5/_2,\ -3\right)}$$

$$\text{Si } t=0 \to G_2 \begin{cases} x=1+2t=1+2\cdot(0)=1 \\ y=-1+t=-1+0=-1 \\ z=2t=2\cdot(0)=0 \end{cases} \qquad \boxed{G_2(1,-1,\ 0)}$$





# Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad 2018

**1. Tres números $x$, $y$, $z$ cumplen lo siguiente:**

- **El primero de ellos, $x$, es la suma de los otros dos.**
- **El segundo, $y$, es la mitad del primero más el triple del tercero.**

a) Demostrar que hay infinitos números que cumplen estas condiciones, encontrando una expresión general de la solución.

b) Encontrar tres números concretos que cumplan estas condiciones.

- **El primero de ellos, $x$, es la suma de los otros dos:**

$$x=y+z \to x-y-z=0$$

- **El segundo, $y$, es la mitad del primero más el triple del tercero.**

$$y=\frac{x}{2}+3z \to 2y=x+6z \to -x+2y-6z=0$$

$$\begin{cases} x \quad -y \quad -z=0 \quad (E_1) \\ -x \quad +2y \quad -6z=0 \quad (E_2) \end{cases} \Rightarrow E_2'=E_2+E_1 \quad \begin{cases} x \quad -y \quad -z=0 \\ 0 \quad +y \quad -7z=0 \end{cases}$$

**a) Al haber más incógnitas que ecuaciones útiles, el sistema será compatible indeterminado y sus soluciones dependerán de parámetros (hay infinitas soluciones):**

Afirmando que $\boxed{z=\lambda}$, resolvemos el sistema de ecuaciones de abajo a arriba:

$$\begin{cases} x \quad -y \quad -z=0 \to x-(7\lambda)-\lambda=0 \to \boxed{x=8\lambda} \\ y \quad -7z=0 \to y-7\lambda=0 \to \boxed{y=7\lambda} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Soluciones} \begin{cases} x=8\lambda \\ y=7\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

**b) Hay infinitas soluciones que podemos conseguir dando diferentes valores a $\lambda$. Por ejemplo, para $\lambda=1$ las variables toman los siguientes valores:**

$$\boxed{\text{Soluciones} \begin{cases} x=8\lambda=8\cdot(1)=8 \\ y=7\lambda=7\cdot(1)=7 \\ z=\lambda=(1)=1 \end{cases}}$$

**2. Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:**

* **Utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros.**
* **Se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas.**
* **Tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.**

a) ¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

a)

**1. Definimos las incógnitas:**

$x =$ Moneda de 0,5 euros

$y =$ Moneda de 1 euro

$z =$ Moneda de 2 euros

**2. Planteamos las ecuaciones:**

$0,5\,x + y + 2z = 34,50$

$x + y + z = 30$

$y = x + z$

**3. Ordenamos las ecuaciones.** Podemos multiplicar $E_1$ por 10 y cambiar el orden:

$$\begin{cases} 0{,}5x + y + 2z = 34{,}50 \\ x + y + z = 30 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 30 \\ -x + y - z = 0 \\ 5x + 10y + 20z = 345 \end{cases}$$

**4. Resolvemos el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} x + y + z = 30 & (E_1) \\ -x + y - z = 0 & (E_2) \\ 5x + 10y + 20z = 345 & (E_3) \end{cases} \quad E_2' = E_2 + E_1 \quad \begin{cases} x + y + z = 30 \\ 0 + 2y \quad 0 = 30 \\ 5x + 10y + 20z = 345 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 30 & (E_1) \\ 2y = 30 & (E_2') \\ 5x + 10y + 20z = 345 & (E_3) \end{cases} \quad E_3' = E_3 - 5E_1 \quad \begin{cases} x + y + z = 30 \\ 2y = 30 \\ 0 + 5y + 15z = 195 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 30 & 3) \\ 2y = 30 & 2) \\ 5y + 15z = 195 & 1) \end{cases}$$

2) $2y = 30 \rightarrow \boxed{y = 15}$

3) $5y + 15z = 195 \rightarrow 5(15) + 15z = 195 \rightarrow 15z = 195 - 75 \rightarrow \boxed{z = \frac{120}{15} = 8}$

1) $x + y + z = 30 \rightarrow x = 30 - (15) - (8) \rightarrow \boxed{x = 7}$

Solución: 7 monedas de 0,5 euros, 15 monedas de 1 euro y 8 monedas de 2 euros



**b) Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros:**

**2. Planteamos las ecuaciones con el nuevo dato:**

$0,5\,x + y + 2z = 35$

$x + y + z = 30$

$y = x + z$

**3. Ordenamos las ecuaciones.** Podemos multiplicar $E_1$ por 10 y cambiar el orden:

$$\begin{cases} 0{,}5x + y + 2z = 35 \\ x + y + z = 30 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 30 \\ -x + y - z = 0 \\ 5x + 10y + 20z = 350 \end{cases}$$

**4. Resolvemos el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} x + y + z = 30 & (E_1) \\ -x + y - z = 0 & (E_2) \\ 5x + 10y + 20z = 350 & (E_3) \end{cases} \quad E_2' = E_2 + E_1 \quad \begin{cases} x + y + z = 30 \\ 0 + 2y \quad 0 = 30 \\ 5x + 10y + 20z = 350 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 30 & (E_1) \\ 2y = 30 & (E_2') \\ 5x + 10y + 20z = 350 & (E_3) \end{cases} \quad E_3' = E_3 - 5E_1 \quad \begin{cases} x + y + z = 30 \\ 2y = 30 \\ 0 + 5y + 15z = 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 30 & 3) \\ 2y = 30 & 2) \\ 5y + 15z = 200 & 1) \end{cases}$$

2) $2y = 30 \rightarrow \boxed{y = 15}$

3) $5y + 15z = 200 \rightarrow 5(15) + 15z = 200 \rightarrow 15z = 200 - 75 \rightarrow \boxed{z = \frac{125}{15} = \frac{25}{3}}$

1) $x + y + z = 30 \rightarrow x = 30 - (15) - \left(\frac{25}{3}\right) \rightarrow \boxed{x = \frac{20}{3}}$

Solución: No se podría realizar el pago con las condiciones anteriores ya que no podemos fraccionar las monedas

**3. Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Obtener los valores del parámetro $m$ para los que la matriz $A$ admite inversa.

b) Para $m = 0$, calcular $A \cdot B$ y $A^{-1} \cdot B$.

c) Calcular $B \cdot B^t$ y $B^t \cdot B$, donde $B^t$ denota la matriz traspuesta de $B$.

**a) La matriz $A$ admite inversa si su determinante es distinto de cero:**

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - 4m - 4 \rightarrow \boxed{-m^2 - 4m - 4 = 0} \rightarrow \boxed{m = -2}$$

| | | |
|---|---|---|
| Si $m \neq -2$ | $\lvert A\rvert \neq 0$ | $A$ tiene inversa |
| Si $m = -2$ | $\lvert A\rvert = 0$ | $A$ no tiene inversa |

**b) Para $m = 0$, calculamos $A \cdot B$ y $A^{-1} \cdot B$:**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

**Para calcular $A^{-1} \cdot B$, debemos calcular primero $A^{-1}$:**

$$a)\ |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{Como } |A| \neq 0 \rightarrow \underline{\text{Existe}} \text{ inversa}$$

$adj\ (A)$:

| | | |
|---|---|---|
| $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$ | $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$ | $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$ |
| $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$ | $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ | $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ |
| $A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8$ | $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$ | $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ |

$$adj\ (A) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow [adj\ (A)]^t = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [adj\ (A)]^t = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

**c) Calculamos $B \cdot B^t$ y $B^t \cdot B$, donde $B^t$ denota la matriz traspuesta de $B$:**

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (-2\ \ 0\ \ 0) = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$B^t \cdot B = (-2\ \ 0\ \ 0) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{(4)}$$

**4. Calcula el rango de la siguiente matriz según los valores de $a$:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix}$$

**¡¡Fíjate!! Puesto que $C_1$ y $C_4$ son proporcionales, podemos eliminar $C_4$ y estudiar el rango de la matriz $A$ a través del determinante de orden tres asociado a ella:**

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & a & 4 \\ -1 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2 - (-4a + 12) \rightarrow \boxed{a^2 + 4a - 12 = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -6 \end{cases}$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq -6 \rightarrow \quad |A_1| \neq 0 \quad \rightarrow \quad Rg\ A = 3$

Si $a = 2$ o $a = -6 \rightarrow \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad Rg\ A = 2$

| | | |
|---|---|---|
| **Soluciones** | Si $a \neq 2$ , $a \neq -6$ | $rg(A) = 3$ |
| | Si $a = 2$ | $rg(A) = 2$ |
| | Si $a = -6$ | $rg(A) = 2$ |

**5. Sea $A$ una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde $I$ es la matriz identidad. Calcular razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) Los valores de $a$ y $b$ para los cuales $A^{-1} = aA + bI$

b) Los valores de $\alpha$ y $\beta$ para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$

c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que $B$ es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2

**a) Calculamos los valores de $a$ y $b$ para los cuales $A^{-1} = aA + bI$**

**- Multiplicamos por $A$ en ambos lados de la expresión:**

$$A^{-1}A = (aA + bI)A \;\rightarrow\; I = aAA + bIA \;\rightarrow\; I = aA^2 + bA$$

**- Sabiendo que $I = aA^2 + bA$, sustituimos en la expresión inicial y resolvemos:**

$$A^2 + 2A = 3I \;\rightarrow\; A^2 + 2A = 3(aA^2 + bA) \rightarrow\; A^2 + 2A = 3aA^2 + 3bA$$

$$\begin{cases} A^2 = 3aA^2 \rightarrow a = 1/3 \\ 2A = 3bA \rightarrow b = 2/3 \end{cases}$$

**b) Calculamos los valores de $\alpha$ y $\beta$ para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$**

**- Sabiendo que $A^2 + 2A = 3I$, despejamos:**

$$A^2 + 2A = 3I \;\rightarrow A^2 = 3I - 2A$$

**- Sustituimos en la expresión del apartado, sabiendo que $A^4 = A^2 \cdot A^2 = \alpha A + \beta I$:**

$$A^2 \cdot A^2 = \alpha A + \beta I \;\rightarrow\; (3I - 2A)\cdot(3I - 2A) = \alpha A + \beta I\ ;$$

$$9I^2 - 6IA - 6AI + 4A^2 = \alpha A + \beta I \;\rightarrow\; 9I - 12A + 4A^2 = \alpha A + \beta I\ ;$$

$$9I - 12A + 4(3I - 2A) = \alpha A + \beta I \;\rightarrow\; 9I - 12A + 12I - 8A = \alpha A + \beta I\ ;$$

$$-20A + 21I = \alpha A + \beta I \begin{cases} -20A = \alpha A \;\rightarrow\; \alpha = -20 \\ 21I = \beta I \;\rightarrow\; \beta = 21 \end{cases}$$

**c) Calculamos el determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que $B$ es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2:**

$$|2B^{-1}| = 2^3|B^{-1}| = 2^3\frac{1}{|B|} = \frac{8}{2} = 4$$

$|kA| = k^n|A|$ $\quad$ $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ $\quad$ Propiedades empleadas siendo $n$ la dimensión



**6. Discute el siguiente sistema y resuélvelo siempre que sea posible:**

$$\begin{cases} x & -y & & = & m \\ x & & +m^2z & = & 2m+1 \\ x & -y & +(m^2-m)z & = & 2m \end{cases}$$

**- Expresamos el sistema como <u>matriz ampliada</u> ($A^*$):**

$$A^* = \left(\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m^2 \\ 1 & -1 & m^2-m \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} \vdots & m \\ \vdots & 2m+1 \\ \vdots & 2m \end{matrix} \end{matrix}\right)$$

**- <u>Discutimos</u> el sistema por el método de teorema de Rouché Frobenius,** para lo cual debemos calcular el rango de las matrices $A$ y $A^*$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m^2 \\ 1 & -1 & m^2-m \end{vmatrix} = [0 + 0 - m^2] - [0 - m^2 - (m^2 - m)] =$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m^2 \end{matrix} \qquad = (-m^2) - (-2m^2 + m) = m^2 - m$$

**Calculamos los valores de $m$ para los cuales $|A| = 0$:**

$$|A| = m^2 - m = 0 \;\rightarrow\; m\cdot(m-1) = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Una vez calculados los valores de $m$, siempre empezamos estudiando los distintos:

| |
|---|
| Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ → $\lvert A\rvert \neq 0$ → Determinante $3x3 \neq 0$ → $rg(A) = 3$ |
| Como $rg\ (A)$ vale tres, sabemos que el $rg\ (A^*)$ podría ser tres o cuatro pero, como la matriz $A^*$ no tiene determinante $4x4$, obligatoriamente $rg\ (A^*) = 3$ |

**Si $m = 0 \rightarrow |A| = 0$ → El rango de la matriz $A$ no podrá ser 3. Por lo tanto, sustituimos $m = 0$ en la matriz buscando un determinante 2x2 que sea distinto de cero:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

**Como la matriz A tiene un determinante $2x2 \neq 0$, el $rg(A) = 2$**

Como $rg\ (A)$ vale dos, sabemos que el $rg\ (A^*)$ podría ser dos o tres. Ahora buscamos un determinante que <u>incluya</u> este determinante 2x2 distinto de cero y el término independiente:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix}1 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & -1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}}\end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} = (0+0-1)-(0-1+0) = \mathbf{0}$$

**$rg\ (A^*)$ no puede ser tres, por lo tanto: $rg\ (A^*) = 2$**

**Si $m = 1 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ El rango de la matriz $A$ no podrá ser 3. Por lo tanto, sustituimos $m = 1$ en la matriz buscando un determinante 2x2 que sea distinto de cero:**

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\ \mathbf{1}\end{matrix}\\ \begin{matrix}1 & -1\end{matrix} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1\\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{1}$$

**Como la matriz A tiene un determinante $2x2 \neq 0$, el $rg(A) = 2$**

Como $rg\ (A)$ vale dos, sabemos que el $rg\ (A^*)$ podría ser dos o tres. Ahora buscamos un determinante que <u>incluya</u> este determinante 2x2 distinto de cero y el término independiente:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix}1 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & -1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{3}\\ \mathbf{2}\end{matrix}}\end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 3 \end{matrix} = (0-1-3)-(0-3-2) = \mathbf{1}$$

**Como la matriz $A^*$ tiene un determinante $3x3 \neq 0$, el $rg(A^*) = 3$**

| Discusión | $rg\ (A)$ | $rg\ (A^*)$ | Incógnitas | |
|---|---|---|---|---|
| $m \neq 0\ ;\ m \neq 1$ | 3 | 3 | 3 | Sistema compatible determinado |
| $m = 0$ | 2 | 2 | 3 | Sistema compatible indeterminado |
| $m = 1$ | 2 | 3 | 3 | Sistema incompatible |

**¡¡Interesante!! Como el enunciado nos pide que resolvamos cuando sea posible, tendremos que resolverlo para $m = 0$ ya que tenemos un sistema compatible indeterminado pero también para $m \neq 0$ y $m \neq 1$ ya que en este caso es compatible determinado. ¿Cómo lo hacemos? Pues arrastrando las $m$ y utilizando Cramer. ¡¡Vamos a ellos!!**



**- Resolvemos el sistema para $m \neq 0$ y $m \neq 1$ mediante Cramer:**

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\begin{matrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & m^2\\ 1 & -1 & m^2-m\end{matrix}}_{\boxed{A}} & \begin{matrix}m\\ 2m+1\\ 2m\end{matrix}\end{array}\right)$$

**Sabemos que $|A| = m^2 - m$**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}m\\ 2m+1\\ 2m\end{matrix}} & \begin{matrix}-1\\ 0\\ -1\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ m^2\\ m^2-m\end{matrix} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-2m^3) - [-m^3 - (2m+1)\cdot(m^2-m)]}{m^2-m} =$$

$$= \frac{-2m^3 + m^3 + 2m^3 - 2m^2 + m^2 - m}{m^2 - m} = \frac{m^3 - m^2 - m}{m^2 - m} = \frac{\cancel{m}\cdot(m^2 - m - 1)}{\cancel{m}\cdot(m-1)} = \frac{\mathbf{m^2 - m - 1}}{\mathbf{m - 1}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix}1\\ 1\\ 1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}m\\ 2m+1\\ 2m\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\ m^2\\ m^2-m\end{matrix} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{[(2m+1)(m^2-m) + m^3] - [2m^3 + m(m^2-m)]}{m^2 - m} =$$

$$= \frac{2m^3 - 2m^2 + m^2 - m + m^3 - 2m^3 - m^3 + m^2}{m^2 - m} = \frac{-\cancel{m}}{\cancel{m}\cdot(m-1)} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{m - 1}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix}1 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & -1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}m\\ 2m+1\\ 2m\end{matrix}} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-m-2m-1) - (-2m-1-2m)}{m^2 - m} =$$

$$= \frac{-m - 2m - 1 + 2m + 1 + 2m}{m^2 - m} = \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}\cdot(m-1)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m - 1}}$$

**d) Resolvemos el sistema para $m = 0$**

Al ser un **sistema compatible indeterminado** lo resolveremos mediantes Gauss **pero vamos a utilizar sólo las dos ecuaciones que contengan el determinante 2x2 diferente a cero.**

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}\\ \begin{matrix}1 & -1\end{matrix} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \rightarrow (\mathbf{1}) - y = 0 \rightarrow \boxed{\mathbf{y = 1}}\\ x = 1 \rightarrow \boxed{\mathbf{x = 1}} \end{cases}$$

¡¡Ojo!! Como la variable $z$ no aparece, es el parámetro $z = \lambda$

**Soluciones del sistema para $m = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1\\ y = 1\\ z = \lambda \end{cases}$**

**7. Dado el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} x \quad +my \quad = 1 \\ -2x \quad -(m+1)y \quad +z = -1 \\ x \quad +(2m-1)y \quad +(m+2)z = 2+2m \end{cases}$$

**Se pide:**

a) Discutir el sistema en función del parámetro $m$.

b) Resolver el sistema en el caso $m = 0$.

**- Expresamos el sistema como matriz ampliada $(A^*)$:**

$$A^* = \left( \underbrace{\begin{matrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & (2m-1) & (m+2) \end{matrix}}_{\boxed{A}} \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ (2+2m) \end{matrix} \right. \right)$$

**- Discutimos el sistema por el método de teorema de Rouché Frobenius,** para lo cual debemos calcular el rango de las matrices $A$ y $A^*$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & (2m-1) & (m+2) \end{vmatrix} = \boxed{\begin{aligned} &[-(m+1)\cdot(m+2)+m] - [(2m-1) - 2m\cdot(m+2)] = \\ &= -m^2 - 2m - m - 2 + m - 2m + 1 + 2m^2 + 4m = \\ &= m^2 - 1 \end{aligned}}$$

$$\begin{matrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \end{matrix}$$

**Calculamos los valores de $m$ para los cuales $|A| = 0$:**

$$|A| = m^2 - 1 = 0 \ \rightarrow \ m = \sqrt{1} \begin{cases} m = -1 \\ m = +1 \end{cases}$$

Una vez calculados los valores de $m$, siempre empezamos estudiando los distintos:

| |
|---|
| Si $m \neq -1$ y $m \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Determinante $3x3 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 3$ |
| Como $rg$ $(A)$ vale tres, sabemos que el $rg$ $(A^*)$ podría ser tres o cuatro **pero**, como la matriz $A^*$ no tiene determinante $4x4$, obligatoriamente $rg$ $(A^*) = 3$ |

**Si $m = -1 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ El rango de la matriz $A$ no podrá ser 3. Por lo tanto, sustituimos $m = -1$ en la matriz buscando un determinante 2x2 que sea distinto de cero:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

**Como la matriz A tiene un determinante $2x2 \neq 0$, el $rg(A) = 2$**



**Como $rg$ $(A)$ vale dos, sabemos que el $rg$ $(A^*)$ podría ser dos o tres.** Ahora buscamos un determinante que **incluya** este determinante 2x2 distinto de cero y el término independiente:

$$A^* = \left( \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right. \right) \longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (-3+1+0) = 2$$

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

**Como la matriz $A^*$ tiene un determinante $3x3 \neq 0$, el $rg(A^*) = 3$**

**Si $m = 1 \rightarrow$ $|A| = 0 \rightarrow$ El rango de la matriz $A$ no podrá ser 3. Por lo tanto, sustituimos $m = 1$ en la matriz buscando un determinante 2x2 que sea distinto de cero:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

**Como la matriz A tiene un determinante $2x2 \neq 0$, el $rg(A) = 2$**

**Como $rg$ $(A)$ vale dos, sabemos que el $rg$ $(A^*)$ podría ser dos o tres.** Ahora buscamos un determinante que **incluya** este determinante 2x2 distinto de cero y el término independiente:

$$A^* = \left( \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{matrix} \right. \right) \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (4-6+0) - (1-3+0) = 0$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{matrix}$$

**$rg$ $(A^*)$ no puede ser tres, por lo tanto: $rg$ $(A^*) = 2$**

| Discusión | $rg$ $(A)$ | $rg$ $(A^*)$ | Incógnitas | |
|---|---|---|---|---|
| $m \neq -1$ ; $m \neq 1$ | 3 | 3 | 3 | Sistema compatible determinado |
| $m = -1$ | 2 | 3 | 3 | Sistema incompatible |
| $m = 1$ | 2 | 2 | 3 | Sistema compatible indeterminado |

- **Resolvemos el sistema para $m = 0$ (sistema compatible determinado) mediante Cramer:**

$$A^{*} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boxed{A}}\left|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}\right)$$

Sabemos que $|A| = m^2 - 1$

Para $m = 0 \rightarrow |A| = (0)^2 - 1 = -1$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-2+0+0)-(0-1+0)}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-2+0+1)-(0+2-4)}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-2+2+0)-(-1+1+0)}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

**Soluciones del sistema para $m = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$**



**8. Determinar la recta $s$ que es simétrica de $r \equiv x + 2 = y = z - 2$, respecto del plano $\pi \equiv x - z + 2 = 0$**

$$r \equiv x + 2 = y = z - 2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r(1,\ 1,\ 1) \\ P_r(-2,\ 0,\ 2) \end{cases}$$

$$\pi \equiv x - z + 2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi(1,\ 0, -1)$$

**- Estudiamos la posición relativa entre la recta $r$ y el plano $\pi$:**

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1,\ 1,\ 1) \cdot (1,\ 0, -1) = 0$ $\quad$ **$\vec{v}_r$ sí es perpendicular a $\vec{n}_\pi$**

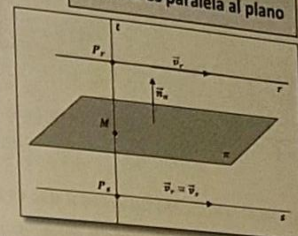
**Ahora comprobaremos si $P_r$ está contenido en el plano para determinar la posición relativa:**

$$\begin{matrix} \pi \equiv x - z + 2 = 0 \\ P_r(-2,\ 0,\ 2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (-2) - (2) + 2 = 0 \\ \boxed{-2 \neq 0} \end{cases} \rightarrow$$

**$P_r$ no está contenido en $\pi$**

**La recta es paralela al plano**

**Puesto que la recta $r$ es paralela al plano $\pi$, podemos calcular $P_s$ que es el punto simétrico de $P_r$ respecto al plano y como la recta solución $s$ es paralela a $r$ sabremos que tendrá el mismo vector director que ella.**




**Paso 1. Calculamos la recta $t$ perpendicular al plano $\pi$ y que pasa por $P_r$:**

Como la recta es perpendicular al plano, **el vector director de la recta coincidirá con el vector normal del plano: $\vec{v}_t = \vec{n}_\pi$**

$$t \begin{cases} P_r(-2,\ 0,\ 2) \\ \vec{v}_t = \vec{n}_\pi = (1,\ 0, -1) \end{cases} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

**Paso 2.** Calculamos el <u>punto de corte</u> a través de un <u>punto genérico</u> $M(x,\ y,\ z)$ **de la recta:**

$$M(x,\ y,\ z) \rightarrow \boxed{M(-2+\lambda\ ,0\ ,\ 2-\lambda\ )}$$

**Sustituimos dicho punto en el <u>plano</u> para calcular el parámetro y obtener $M$:**

$$(-2+\lambda) - (2-\lambda) + 2 = 0 \ \rightarrow\ -2 + 2\lambda = 0 \ \rightarrow\ \lambda = 1 \rightarrow \boxed{M(-1,\ 0,\ 1)}$$

**Al ser $M$ el punto medio del segmento formado por $P_r$ y $P_s$, entonces podemos aplicar la fórmula de punto simétrico respecto a otro.**

$$P_s = 2M - P_r = 2(-1,\ 0,\ 1) - (-2,\ 0,\ 2) = (0,\ 0,\ 0)$$

**La recta solución será:** $s \begin{cases} \vec{v}_s = \vec{v}_r = (1,\ 1,\ 1) \\ P_s(0\ ,\ 0\ ,\ 0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}}$

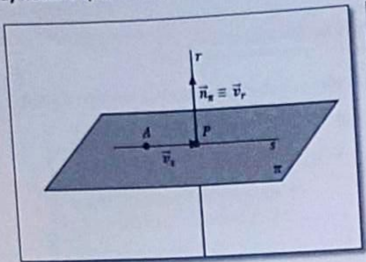
**9. Dado el punto $A(5,7,3)$ y la recta $r$: $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$, se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) La recta $s$ que corta a la recta $r$, pasa por el punto $A$, y es perpendicular a la recta $r$.

b) La distancia del punto $A$ a la recta $r$.

c) La distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano $\pi$ que pasa por $(3,-1,0)$ y es perpendicular a $r$.

**a) Recta $s$ que corta a la recta $r$, pasa por el punto $A$, y es perpendicular a la recta $r$:**




**1. Calculamos la ecuación del plano $\pi$ que es perpendicular a $r$ y pasa por $A$.**

**2. Calculamos el punto $P$ que es el punto de corte entre $r$ y $\pi$.**

**3. Calculamos el vector $\overrightarrow{AP}$ que será el vector director de la recta $s$ perpendicular a $r$ y que pasa por $A$.**

$$r \equiv \frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3-t \\ y=-1+3t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r(-1,\ 3,\ 2) \\ P_r(3,-1,\ 0) \end{cases}$$

**1. Calculamos la ecuación del plano $\pi$ que es perpendicular a $r$ y pasa por $A$:**

Como el plano es perpendicular a la recta, el vector normal del plano coincidirá con el vector director de la recta: $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r$

$$\pi \begin{cases} \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-1,\ 3,\ 2) \\ A(5,\ 7,\ 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -x+3y+2z+D=0 \\ -1\cdot(5)+3\cdot(7)+2\cdot(3)+D=0 \rightarrow D=-22 \end{array}$$

$$\boxed{\pi \equiv -x+3y+2z-22=0}$$

**2.** Calculamos el <u>punto de corte</u> a través de un <u>punto genérico</u> $P(x,\ y,\ z)$ de la recta:

$$P(x,\ y,\ z) \rightarrow \boxed{P(3-t\ ,-1+3t\ ,\ 2t)}$$

**Sustituimos dicho punto en el <u>plano</u> para calcular el parámetro y obtener $P$:**

$$-(3-t)+3(-1+3t)+2(2t)-22=0 \rightarrow -28+14t=0 \rightarrow t=2 \rightarrow \boxed{P(1,\ 5,\ 4)}$$

**3. El vector $\overrightarrow{AP}$ será el vector director de la recta $s$ perpendicular a $r$ y que pasa por $A$:**

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (1,\ 5,\ 4)-(5,\ 7,\ 3) = (-4,-2,\ 1)$$

**La recta solución será:** $s \begin{cases} \vec{v}_s = \overrightarrow{AP} = (-4,-2,\ 1) \\ A(5,\ 7,\ 3) \end{cases} \Rightarrow \boxed{s \equiv \frac{x-5}{-4}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z-3}{1}}$



**b) La distancia del punto $A$ a la recta $r$ podemos calcularla por la fórmula de distancia pero si observamos el dibujo anterior, descubrimos que la distancia de $A$ a la recta $r$ es $|\overrightarrow{AP}|$:**

$$d(A,r) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(1)^2} = \boxed{\sqrt{21}\,u}$$

**c) Distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano $\pi$ que pasa por $(3,-1,0)$ y es perpendicular a $r$:**

**- Calculamos la ecuación del plano $\pi$ que pasa por $(3,-1,0)$ y es perpendicular a $r$:**

Como la recta es perpendicular al plano, sabremos que $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r$

$$\pi \begin{cases} \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-1,\ 3,\ 2) \\ A(3,\ -1,\ 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -x+3y+2z+D=0 \\ -1\cdot(3)+3\cdot(-1)+2\cdot(0)+D=0 \rightarrow D=6 \end{array}$$

$$\boxed{\pi \equiv -x+3y+2z+6=0}$$

**- Calculamos la distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano $\pi$ aplicando la fórmula:**

$$\boxed{d(B,\pi) = \frac{|A\cdot B_x + B\cdot B_y + C\cdot B_z + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} = \frac{|-1\cdot(1)+3\cdot(1)+2\cdot(1)+6|}{\sqrt{(-1)^2+(3)^2+(2)^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{14}} = \frac{10}{\sqrt{14}}\,u$$

**Podemos racionalizar** $\Rightarrow$ $d(B,\pi) = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{10\cdot\sqrt{14}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{10\sqrt{14}}{14} = \frac{5\sqrt{14}}{7}u$

**10. Dado el plano $\alpha \equiv 4x+2y+4z-15 = 0$ y el punto $A(2,-3,1)$:**

a) Calcula la distancia del punto $A$ al plano $\alpha$.

b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano $\alpha$ sea igual que la distancia del punto $A$ al plano $\alpha$.

**a) Calculamos la distancia del punto $A(2,-3,1)$ al plano $\alpha$ aplicando la fórmula:**

$$\boxed{d(A,\alpha) = \frac{|A\cdot A_x + B\cdot A_y + C\cdot A_z + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} = \frac{|4\cdot(2)+2\cdot(-3)+4\cdot(1)-15|}{\sqrt{(4)^2+(2)^2+(4)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{36}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}u$$

**b)** Para averiguar dicho lugar geométrico, vamos a recurrir a un punto genérico $G(x,y,z)$ al cual le imponemos la siguiente <u>condición</u>: $d(G,\alpha) = d(A,\alpha)$:

$$d(A,\alpha) = {}^3/_2 \quad ; \quad d(G,\alpha) = \frac{|4\cdot(x)+2\cdot(y)+4\cdot(z)-15|}{\sqrt{(4)^2+(2)^2+(4)^2}} = \frac{|4x+2y+4z-15|}{6}$$

$$\boxed{d(G,\alpha) = d(A,\alpha) \rightarrow \frac{|4x+2y+4z-15|}{6} = \frac{3}{2}}$$

$$|4x+2y+4z-15| = 9 \begin{cases} 4x+2y+4z-15=9 \;\to\; 4x+2y+4z-24=0 \\ \qquad\qquad \boxed{\beta_1 \equiv 2x+y+2z-12=0} \\ 4x+2y+4z-15=-9 \;\to\; 4x+2y+4z-6=0 \\ \qquad\qquad \boxed{\beta_2 \equiv 2x+y+2z-3=0} \end{cases}$$

**11. Dados los vectores $\vec{u}=(0,1,1)$ , $\vec{v}=(1,1,-1)$ y $\vec{w}=(2,0,3)$:**

a) Determina el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u}-\lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$.

b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta.

c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2,0,2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

**a) El vector $\vec{u}-\lambda\vec{v}$ será perpendicular a $\vec{w}$ si su producto escalar es 0:**

$$\vec{u}-\lambda\vec{v} = (0,\ 1,\ 1)-\lambda(1,\ 1,-1) = (-\lambda,\ 1-\lambda,\ 1+\lambda)$$

$$(-\lambda,\ 1-\lambda,\ 1+\lambda)\cdot(2,\ 0,\ 3) = -2\lambda+3+3\lambda \;\to\; -2\lambda+3+3\lambda=0 \;\to\; \boxed{\lambda=-3}$$

**b) Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ serán linealmente dependientes, si su determinante asociado es 0:**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (0+0-2)-(2+0+3) = -7 \neq 0$$
$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

**$\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son linealmente dependientes. Forman un <u>conjunto</u> de vectores linealmente <u>independientes</u>.**

**c) El producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$ dará como resultado un vector perpendicular a ellos y por lo tanto será el vector director de la recta que buscamos ($\vec{d}_r$) y que pasa por $P(2,0,2)$:**

$$\vec{d}_r = \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{\imath}+\vec{\jmath}-(\vec{k}+\vec{\imath}) = -2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k} = (-2,\ 1,-1)$$

$$r\begin{cases} \vec{d}_r(-2,\ 1,-1) \\ P(2,\ 0,\ 2) \end{cases} \Rightarrow \quad r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y}{1} \;\to\; x-2=-2y \;\to\; x+2y-2=0 \\[2ex] \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1} \;\to\; -y=z-2 \;\to\; z+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x+2y-2=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}}$$



**12. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x=-2 \\ y=-3+2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$ , $s \equiv \begin{cases} -x+y+2z+4=0 \\ -x+2y+3z+5=0 \end{cases}$ y el punto $P(-1,2,-1)$:**

a) Determina la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.

b) Halla la ecuación implícita del plano que pasa por $P$ y es paralelo a $r$ y a $s$.

c) Calcula el área del triángulo que tiene por vértices el origen de coordenadas, el punto $P$ y el punto $P'$ proyección de $P$ sobre el plano $z=0$.

**a) Determinamos la posición relativa de las rectas $r$ y $s$:**

**- Primero pasamos la ecuación de la recta $s$ a <u>paramétrica</u> para poder obtener $\vec{v}_s$ y $P_s$:**

$$\begin{cases} -x \;+y \;+2z \;+4 = 0 \quad (E_1) \\ -x \;+2y \;+3z \;+5 = 0 \quad (E_2) \end{cases} \Rightarrow \quad E_2' = E_2 - E_1 \quad \begin{cases} -x \;+y \;+2z \;+4 = 0 \\ 0 \;+y \;+z \;+1 = 0 \end{cases}$$

**Definimos $z=t$ y ya podemos obtener el resto de las variables:**

$$\begin{cases} -x \;+y \;+2z \;+4 = 0 \;\to\; -x+(-1-t)+2(t)+4=0 \;\to\; x=3+t \\ \quad\;\; +y \;+z \;+1 = 0 \;\to\; y+t+1=0 \;\to\; y=-1-t \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| $r \equiv \begin{cases} x=-2 \\ y=-3+2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-2,-3,\ 0) \\ \vec{v}_r(0,\ 2,-1) \end{cases}$ | $s \equiv \begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s(3,-1,\ 0) \\ \vec{v}_s(1,-1,\ 1) \end{cases}$ |
| $\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (3,-1,\ 0)-(-2,-3,\ 0) = (5,\ 2,\ 0)$ | |

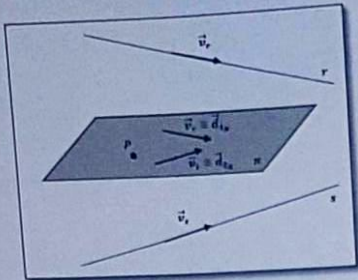
**- Formamos las matrices $A$ y $A^*$ con los vectores anteriores y calculamos sus rangos para determinar la posición relativa entre las rectas:**

$$A^* = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0-2+10)-(5+0+0) = 3$$
$$\begin{matrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}$$

| Como la matriz $A^*$ tiene el determinante $3x3 \neq 0$, el $rg(A^*)=3$ |
|---|
| LAS RECTAS SE CRUZAN |

**b) Ecuación implícita del plano que pasa por $P$ y es paralelo a $r$ y a $s$:**



**Al ser el plano $\pi$ paralelo a $r$ y $s$, usaremos como vectores directores del plano los propios vectores directores de las rectas:**

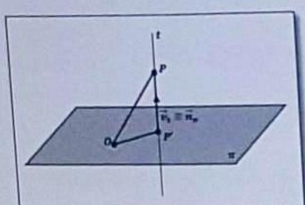
$$\pi\begin{cases}\vec{d}_{1_\pi}=\vec{v}_r=(0,\ 2,-1)\\ \vec{d}_{2_\pi}=\vec{v}_s=(1,-1,\ 1)\\ P(-1,\ 2,-1)\end{cases}$$

**Pasamos la ecuación del plano a forma implícita:**

$$\begin{vmatrix}x+1 & y-2 & z+1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=[2(x+1)+0-1(y-2)]-[2(z+1)+(x+1)]$$

$$\begin{matrix}x+1 & y-2 & z+1\\ 0 & 2 & -1\end{matrix}\quad =2x+2-y+2-2z-2-x-1=\boxed{x-y-2z+1=0}$$

**c) Área del triángulo que tiene por vértices el origen de coordenadas, el punto $P$ y el punto $P'$ proyección de $P$ sobre el plano $z=0$:**



**Calculamos $P'$ como punto de corte entre el plano $z=0$ y la recta $t$, recta perpendicular al plano y que pasa por $P$. Para calcular el área del triángulo aplicaremos el producto vectorial entre los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OP'}$.**

$$\pi\equiv z=0\ \rightarrow\ \vec{n}_\pi(0,\ 0,\ 1)\quad ;\quad t\begin{cases}\vec{d}_t=\vec{n}_\pi=(0,\ 0,\ 1)\\ P(-1,\ 2,-1)\end{cases}\rightarrow\ t\equiv\begin{cases}x=-1\\ y=2\\ z=-1+\alpha\end{cases}$$

- Calculamos el <u>punto de corte</u> a través de un <u>punto genérico</u> $P'(x,\ y,\ z)$ de la recta:

$$P'(x,\ y,\ z)\ \rightarrow\ \boxed{P'(-1\ ,\ 2\ ,-1+\alpha\ )}$$

**Sustituimos dicho punto en el <u>plano</u> para calcular el parámetro y obtener $P'$:**

$$-1+\alpha\ =0\ \rightarrow\ \alpha\ =1\rightarrow\ \boxed{P'(-1\ ,\ 2\ ,\ 0\ )}$$

**- Calculamos el área del triángulo aplicando producto vectorial entre los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OP'}$:**

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{OP}(-1,\ 2,-1)\\ \overrightarrow{OP'}(-1,\ 2,\ 0)\end{matrix}\right\}\rightarrow\ \overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OP'}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=2\vec{\imath}+\vec{\jmath}=(2,\ 1,\ 0)$$

$$|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OP'}|=\sqrt{(2)^2+(1)^2+(0)^2}=\sqrt{5}\quad\rightarrow\quad A=\frac{|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OP'}|}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\ u^2$$



**13. Dados los planos $\pi_1\equiv 4x+6y-12z+1=0$ y $\pi_2\equiv -2x-3y+6z-5=0$**

**a) Calcula el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.**

**b) Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A(2,1,3)$ y $B(1,2,3)$, calcula los vértices $C$ y $D$, sabiendo que $C$ pertenece a los planos $\pi_2$ y $\pi_3\equiv x-y+z=2$.**

**a) Calcula el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos:**

**- Primero estudiamos la posición relativa entre los planos:**

$$\begin{cases}\pi_1\equiv 4x+6y-12z+1=0\\ \pi_2\equiv -2x-3y+6z-5=0\end{cases}\ \rightarrow\ \frac{4}{-2}=\frac{6}{-3}=\frac{-12}{6}\neq\frac{1}{-5}$$

**Los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ son paralelos ($\pi_1\parallel\pi_2$)**

¡¡Interesante!! **Como los dos planos son paralelos, la arista del cubo que buscamos será la distancia entre ellos. Cogemos un punto del plano $\pi_2$ asignando valores a dos de las variables de su ecuación y despejando la tercera. Probamos diferentes combinaciones de $x$ e $y$ procurando que $z$ quede el número más sencillo posible.** Por ejemplo: $x=-4$ e $y=1$:

$$-2(-4)-3\cdot(1)+6z-5=0\rightarrow\ \ 6z=0\ \ \rightarrow\ z=0\ ;\ \ P_{\pi_2}(-4,\ 1,\ 0)$$

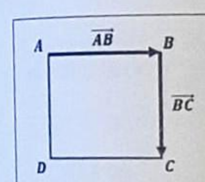
**Calculamos la distancia entre el punto del plano $P_{\pi_2}$ y el plano $\pi_1$:**

$$d(\pi_2,\pi_1)=d(P_{\pi_2},\pi_1)=\frac{|4(-4)+6(1)-12(0)+1|}{\sqrt{(4)^2+(6)^2+(-12)^2}}=\frac{|-9|}{\sqrt{196}}=\frac{9}{14}\ u.$$

**Luego, la arista del cubo es $9/14$ unidades y su volumen será:**

$$V=a^3=\left(\frac{9}{14}\right)^3=\frac{729}{2744}\approx\boxed{0,266\ u^3}$$

**b) Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A(2,1,3)$ y $B(1,2,3)$, calculamos los vértices $C$ y $D$, sabiendo que $C$ pertenece a los planos $\pi_2$ y $\pi_3\equiv x-y+z=2$:**




**Buscamos un punto $C$ que pertenece a la recta $r$, formada por la intersección de los planos $\pi_2$ y $\pi_3$:**

$$r\equiv\begin{cases}-2x-3y+6z-5=0\\ x-y+z-2=0\end{cases}$$

**de tal manera que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean perpendiculares.**

**Pasamos la ecuación a forma paramétrica:**

Como a través de Gauss nos quedarán muchas fracciones, **buscaremos su vector director por medio del productor vectorial: $\vec{v}_r=\vec{n}_{\pi_2}\times\vec{n}_{\pi_3}$**

$$\vec{v}_r=\vec{n}_{\pi_2}\times\vec{n}_{\pi_3}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -2 & -3 & 6\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\vec{\imath}+8\vec{\jmath}+5\vec{k}=(3,\ 8,\ 5)$$

**Buscamos un punto de la recta ($P_r$):**

**- Primero hacemos Gauss:**

$$\begin{cases} -2x-3y+6z-5=0\ (E_1) \\ x-y+z-2=0\ (E_2) \end{cases} \Rightarrow E_1' = E_1+2E_2 \Rightarrow \begin{cases} -5y+8z-9=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$$

**- Ahora damos un valor a $y$ procurando que $x$ y $z$ queden números enteros:**

$$\text{Si } y=3 \rightarrow \begin{cases} -5y+8z-9=0 \rightarrow -5(3)+8z-9=0 \rightarrow z=3 \\ x-y+z-2=0 \rightarrow x-(3)+(3)-2=0 \rightarrow x=2 \end{cases} \rightarrow P_r\,(2,\ 3,\ 3)$$

$$r \equiv \begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=3+8\lambda \\ z=3+5\lambda \end{cases} \rightarrow \text{El punto } C \text{ tendrá la forma } C(2+3\lambda,\ 3+8\lambda,\ 3+5\lambda)$$

¡¡Nota!! Con este método nos ahorramos las fracciones, pero podríamos haberlas empleado y nos hubiera tenido que dar el mismo resultado. ¡¡Escoge el método que prefieras!!

**Construimos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$:**

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 2,\ 3) - (2,\ 1,\ 3) = (\mathbf{-1,\ 1,\ 0})$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (2+3\lambda,\ 3+8\lambda,\ 3+5\lambda) - (1,\ 2,\ 3) = (\mathbf{1+3\lambda,\ 1+8\lambda,\ 5\lambda})$

**Puesto que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son perpendiculares, su producto escalar será cero:**

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \rightarrow (-1,\ 1,\ 0)\cdot(1+3\lambda,\ 1+8\lambda,\ 5\lambda) = 0\ ;$$

$$-1-3\lambda+1+8\lambda=0 \rightarrow 5\lambda=0 \rightarrow \lambda=0$$

**Sabiendo que $C(2+3\lambda,\ 3+8\lambda,\ 3+5\lambda)$, sustituimos $\lambda=0$** $\rightarrow \boxed{C\,(2,\ 3,\ 3)}$

**Calculamos $D\,(x,\ y,\ z)$, sabiendo que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son equivalentes:**

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow (-1,\ 1,\ 0) = (2-x,\ 3-y,\ 3-z)$$

$$\begin{cases} -1=2-x \rightarrow x=3 \\ 1=3-y \rightarrow y=2 \\ 0=3-z \rightarrow z=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(3,\ 2,\ 3)}$$





# Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad 2019

**1. Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros. Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?**

**1. Definimos las incógnitas:**

$x$ = Bocadillos

$y$ = Refrescos

$z$ = Patatas

**2. Planteamos las ecuaciones:**

• "Pidió 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 de patatas y pagó un total de 19 euros. Pero le habían cobrado 1 bocadillo y 1 bolsa de patatas de más". Por lo tanto:

$$(3+1)x+2y+(2+1)z=19 \rightarrow \mathbf{4x+2y+3z=19}$$

• "Reclamó y le devolvieron 4 euros". Por lo tanto, el bocadillo y las patatas valen 4 euros:

$$\mathbf{x+z=4}$$

• "El vendedor le ofreció llevarse 1 bocadillo y 1 refresco por 3 euros, lo que suponía un descuento del 40%". Por lo tanto, paga el 60%:

$$\frac{60}{100}x+\frac{60}{100}y=3 \rightarrow 60x+60y=300 \rightarrow 6x+6y=30 \rightarrow \mathbf{x+y=5}$$

**3. Ordenamos las ecuaciones:**

$$\begin{cases} 4x+2y+3z=19 \\ x+z=4 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x+z=4 \\ 4x+2y+3z=19 \end{cases}$$

**4. Resolvemos el sistema de ecuaciones:**

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & & = & 5 & (E_1) \\ x & & +z & = & 4 & (E_2) \\ 4x & +2y & +3z & = & 19 & (E_3) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} E_2' = E_2 - E_1 \\ E_3' = E_3 - 4E_1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrcr} x & +y & & = & 5 \\ 0 & -y & +z & = & -1 \\ 0 & -2y & +3z & = & -1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & & = & 5 & (E_1) \\ & -y & +z & = & -1 & (E_2') \\ & -2y & +3z & = & -1 & (E_3') \end{array}\right. \Rightarrow E_3'' = E_3' - 2E_2' \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & & = & 5 \\ & -y & +z & = & -1 \\ & 0 & +z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & & = & 5 & 3) \\ & -y & +z & = & -1 & 2) \\ & & z & = & 1 & 1) \end{array}\right.$$

1) $\boxed{z = 1}$

2) $-y + z = -1 \rightarrow -y + (1) = -1 \rightarrow \boxed{y = 2}$

3) $x + y = 5 \rightarrow x + (2) = 5 \rightarrow \boxed{x = 3}$

**Solución: El precio del bocadillo es de 3 €, el del refresco 2 € y el de las patatas 1 €.**



**2. Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.**

**Aplicaremos la siguiente información para resolver el ejercicio:**

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad a + d = 1 \qquad |X| = 1 \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad AX = XA$$

$$|X| = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \boldsymbol{a \cdot d - c \cdot b = 1}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

Puesto que $AX = XA \rightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} -c = b & d = a \\ a = d & b = -c \end{array}}$

**Luego tenemos las siguientes cuatro ecuaciones:**

$$\begin{array}{l} b = -c \\ a = d \\ a + d = 1 \\ a \cdot d - c \cdot b = 1 \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{l} a + (a) = 1 \rightarrow 2a = 1 \rightarrow a = 1/2 \\ a = d \rightarrow d = 1/2 \end{array}}$$

$$\begin{array}{l} a \cdot d - c \cdot b = 1 \longrightarrow \\ b = -c \end{array} \quad \boxed{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - c \cdot (-c) = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + c^2 = 1 \rightarrow c = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$Si \quad c = +\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Si \quad c = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow b = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Luego tenemos dos matrices:**

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & +\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

**3. Dadas las matrices:**

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&1&0\\2&-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

a) Calcular razonadamente la matriz inversa de $A$.

b) Calcular razonadamente la matriz $X$ que verifica que $A\cdot X-2B=C$.

**a) La matriz $A$ admite inversa si su determinante es <u>distinto de cero</u>:**

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\-1&1&0\\2&-1&0\end{vmatrix}=(-1)-(-2)=1\neq 0 \quad \boxed{\text{Existe } A^{-1}}$$

$adj\,(A)$:

| | | |
|---|---|---|
| $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\-1&0\end{vmatrix}=0$ | $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1&0\\2&0\end{vmatrix}=0$ | $A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\2&-1\end{vmatrix}=-1$ |
| $A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&0\end{vmatrix}=1$ | $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}-1&-1\\2&0\end{vmatrix}=2$ | $A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}-1&-1\\2&-1\end{vmatrix}=-3$ |
| $A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&-1\\1&0\end{vmatrix}=1$ | $A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&0\end{vmatrix}=1$ | $A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=-2$ |

$$adj\,(A)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&2&-3\\1&1&-2\end{pmatrix}\ \rightarrow\ [adj\,(A)]^t=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot[adj\,(A)]^t=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}$$

b) $AX-2B=C\ \rightarrow\ AX=C+2B\ \rightarrow\ X=A^{-1}\cdot(C+2B)$

$$C+2B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&4&4\\0&2&2\\2&-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&5\\1&3&2\\2&-1&6\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot(C+2B)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&5&5\\1&3&2\\2&-1&6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0+1+2&0+3-1&0+2+6\\0+2+2&0+6-1&0+4+6\\-2-3-4&-5-9+2&-5-6-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&8\\4&5&10\\-9&-12&-23\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot(C+2B)=\begin{pmatrix}3&2&8\\4&5&10\\-9&-12&-23\end{pmatrix}$$



**4. Dadas las matrices:**

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4&1\\1&a&2&2-a\\-1&2&a&a-2\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

a) Estudiar el rango de $A$ en función del parámetro real $a$.

b) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz $AM$ para el caso $a=0$.

**a) Rango de $A$ en función del parámetro $a$:**

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4&1\\1&a&2&2-a\\-1&2&a&a-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1&3&4\\1&a&2\\-1&2&a\end{vmatrix}=(a^2+8-6)-(-4a+4+3a)=a^2+a-2$$

$$a^2+a-2=0\ \rightarrow\ a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}\ \rightarrow\ \begin{cases}a=\dfrac{-1+3}{2}=1\\[2mm] a=\dfrac{-1-3}{2}=-2\end{cases}$$

| | |
|---|---|
| Si $a\neq 1$ y $a\neq -2$ | $rg\,(A)=3$ |

Vamos a estudiar los rangos de $A$ para $a=1$ y $a=-2$ por el método de Gauss ya que, al no ser una matriz $3x4$, pensamos que será más sencillo su resolución por este método:

Si $a=-2$

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4&1\\1&-2&2&4\\-1&2&-2&-4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}F_2'=F_2-F_1\\F_3'=F_3+F_2\end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3&4&1\\0&-5&-2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad rg(A)=2$$

Si $a=1$

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4&1\\1&1&2&1\\-1&2&1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}F_2'=F_2-F_1\\F_3'=F_3+F_1\end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3&4&1\\0&-2&-2&0\\0&5&5&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&4&1\\0&-2&-2&0\\0&5&5&0\end{pmatrix}\Rightarrow F_3''=2F_3'+5F_2'\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3&4&1\\0&-2&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rg(A)=2$$

| | |
|---|---|
| Si $a\neq 1$ y $a\neq -2$ | $rg\,(A)=3$ |
| Si $a=-2$ | $rg\,(A)=2$ |
| Si $a=1$ | $rg\,(A)=2$ |

**b) Inversa de la matriz $AM$ para el caso $a = 0$:**

$$S = A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

**La matriz $S$ admite inversa si su determinante es <u>distinto de cero</u>:**

$$|S| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (0 - 6 + 2) - (0 + 4 - 6) = -2 \neq 0 \qquad \boxed{\text{Existe } S^{-1}}$$

$adj\ (S)$:

| | | |
|---|---|---|
| $S_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4$ | $S_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ | $S_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$ |
| $S_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 8$ | $S_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1$ | $S_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5$ |
| $S_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$ | $S_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ | $S_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$ |

$$adj\ (S) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow [adj\ (S)]^t = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{|S|} \cdot [adj\ (S)]^t = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$



**5. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real $a$, y una matriz cuadrada $B$ de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$, sindo $I$ la matriz identidad de orden 3.**

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz $A$ en función del parámetro $a$ y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$.

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$.

c) La comprobación de que $B$ es invertible, encontrando $m$ y $n$ tales que $B^{-1} = mB + nI$.

**a) - Rango de $A$ en función del parámetro $a$:**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = [(a+1) \cdot a + a \cdot (-2) \cdot (a-1)] - [a \cdot (a+1) \cdot (-3) + 2 \cdot (a-1)] =$$

$$= (a^2 + a - 2a^2 + 2a) - (-3a^2 - 3a + 2a - 2) = 2a^2 + 4a + 2$$

$$2a^2 + 4a + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{4} = -1$$

| | | |
|---|---|---|
| Si $a \neq -1$ | $\lvert A\rvert \neq 0$ | $rg\ (A) = 3$ |

Si $a = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow rg\ (A) = 2$$

| | | |
|---|---|---|
| Si $a = -1$ | $\lvert A\rvert = 0$ | $rg\ (A) = 2$ |

**- Determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 0 + 0) - (-6 + 0 + 0) = 8$$

$$|2A^{-1}| = 2^3 \cdot |A^{-1}| = 2^3 \cdot \frac{1}{|A|} = 2^3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

**b) Soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ cuando $a=-1$.**

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&0&2\\-3&-2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{cases}x+0y-1z=-1\\-2x+0y+2z=2\\-3x-2y-1z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-z=-1\\-2x+2z=2\\-3x-2y-z=0\end{cases}\;\rightarrow\;\begin{matrix}E_2'=E_2+2E_1\\E_3'=E_3+3E_1\end{matrix}\;\rightarrow\;\begin{cases}x-z=-1\\\boxed{0=0}\\-2y-4z=-3\end{cases}$$

**SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)**

**Número de parámetros = Número de incógnitas − Número de ecuaciones útiles = 1**

Afirmando que $\boxed{z=\lambda}$, resolvemos:

$$\begin{cases}x-z=-1\;\rightarrow\;x-(\lambda)=-1\;\rightarrow\;\boxed{x=-1+\lambda}\\-2y-4z=-3\;\rightarrow\;-2y-4(\lambda)=-3\;\rightarrow\;2y=3-4\lambda\;\rightarrow\;\boxed{y=\dfrac{3-4\lambda}{2}}\end{cases}$$

**c) Comprobación de que $B$ es invertible, encontrando $m$ y $n$ tales que $B^{-1}=mB+nI$.**

$$B^2=\frac{1}{3}I-2B\;\rightarrow\;B^2+2B=\frac{1}{3}I\;\rightarrow\;3B^2+6B=I\rightarrow\;B\cdot(3B+6I)=I$$

Puesto que $B\cdot B^{-1}=I$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{B^{-1}=3B+6I}$ **Queda comprobado que $B$ es invertible.**

Luego $\boldsymbol{m=3}$ y $\boldsymbol{n=6}$



**6. Dadas las matrices:**

$$A=\begin{pmatrix}2-m&1&2m-1\\1&m&1\\m&1&1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2m^2-1\\m\\1\end{pmatrix}$$

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^tA=B^t$, donde $X^t, B^t$ denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de $m$.

$$X^t\cdot A=B^t\;\rightarrow\;(x\;\;y\;\;z)\cdot\begin{pmatrix}2-m&1&2m-1\\1&m&1\\m&1&1\end{pmatrix}=(2m^2-1\;\;m\;\;1)$$

$$((2-m)x+y+mz\quad x+my+z\quad (2m-1)x+y+z)=(2m^2-1\;\;m\;\;1)$$

$$\begin{cases}(2-m)x+y+mz=2m^2-1\\x+my+z=m\\(2m-1)x+y+z=1\end{cases}$$

**- Expresamos el sistema como matriz ampliada ($A^*$):**

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}2-m&1&m&2m^2-1\\1&m&1&m\\2m-1&1&1&1\end{array}\right)$$

(the first three columns form $A$)

**- Discutimos el sistema por el método de teorema de Rouché Frobenius:**

$$|A|=\begin{vmatrix}2-m&1&m\\1&m&1\\2m-1&1&1\end{vmatrix}=$$

$$=[m\cdot(2-m)+(2m-1)+m]-[m^2(2m-1)+2-m+1]=$$

$$=[2m-m^2+2m-1+m]-[2m^3-m^2+2-m+1]=\boldsymbol{-2m^3+6m-4=0}$$

**Aplicamos Ruffini**

| | $-2$ | $0$ | $6$ | $-4$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | | $-2$ | $-2$ | $4$ |
| | $-2$ | $-2$ | $4$ | $0$ |

$$-2m^2-2m+4=0\begin{cases}\boldsymbol{m=1}\\\boldsymbol{m=-2}\end{cases}$$

| Discusión | $rg\,(A)$ | $rg\,(A^*)$ | Incógnitas | Sistema |
|---|---|---|---|---|
| $m\neq1$ y $m\neq-2\rightarrow|A|\neq0$ | 3 | 3 | 3 | Compatible determinado |

Si $m = 1$

$$A^{*} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{\boxed{A}}$$

| Discusión | $rg\ (A)$ | $rg\ (A^{*})$ | Incógnitas | Sistema |
|---|---|---|---|---|
| $m = 1 \to \lvert A\rvert = 0$ | 1 | 1 | 3 | Compatible indeterminado |

Si $m = -2$

$$A^{*} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}} & -2 & 7 \\ & 1 & -2 \\ -5 \quad 1 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{\boxed{A}} \to \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 1 = -9 \neq 0 \ \to rg\ (A) = 2$$

$$A^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-8 + 10 + 7) - (70 - 8 + 1) = -54 \neq 0 \to rg\ (A^{*}) = 3$$

| Discusión | $rg\ (A)$ | $rg\ (A^{*})$ | Incógnitas | Sistema |
|---|---|---|---|---|
| $m = -2 \to \lvert A\rvert = 0$ | 2 | 3 | 3 | Incompatible |



**7. Sean la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ y el plano $\pi \equiv x + y + kz = 0$.**

**Encontrar $m$ y $k$ para que:**

a) La recta $r$ sea perpendicular al plano $\pi$.

b) La recta $r$ esté contenida en el plano $\pi$.

$\vec{v}_r(m,\ 2,\ 4)$ $\qquad P_r(1,\ 1,\ 1)$ $\qquad \vec{n}_\pi(1,\ 1,\ k)$

a) Para que la recta $r$ sea perpendicular al plano $\pi$, $\vec{v}_r$ debe ser paralelo (proporcional) a $\vec{n}_\pi$:

$$\frac{m}{1} = \frac{2}{1} = \frac{4}{k} \ \to \ \boxed{\begin{matrix} m = 2 \\ k = 2 \end{matrix}}$$

b) Para que la recta $r$ esté contenida en el plano $\pi$, $\vec{v}_r$ debe ser perpendicular a $\vec{n}_\pi$ y $P_r$ debe estar contenido en $\pi$, por lo tanto:

$$\begin{cases} \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \ \to (m,\ 2,\ 4)\cdot(1,\ 1,\ k) = m + 2 + 4k = 0 \ \to m + 4k = -2 \\ P_r \in \pi \ \to \ (1) + (1) + k(1) = 0 \ \to k = -2 \end{cases}$$

$$m + 4k = -2 \ \to \ m + 4(-2) = -2 \ \to m = 6$$

**8. Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ y la recta $s$ que pasa por el punto $(2, -5, 1)$ y tiene dirección $(-1,\ 0, -1)$ se pide:**

a) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

b) Calcular un plano que sea paralelo a $r$ y que contenga a $s$.

c) Calcular un plano perpendicular a la recta $r$ y que pase por el origen de coordenadas.

$$r \begin{cases} P_r(1,\ 3,\ 0) \\ \vec{v}_r(2, -2,\ 1) \end{cases} \qquad s \begin{cases} P_s(2, -5, 1) \\ \vec{v}_s(-1,\ 0, -1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (2, -5,\ 1) - (1,\ 3,\ 0) = (1, -8,\ 1)$$

a) Posición relativa entre las dos rectas:

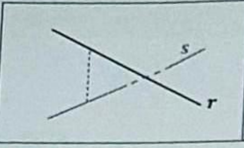
**- Formamos las matrices $A$ y $A^{*}$ con los vectores anteriores:**

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{*} = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos el rango de las matrices para determinar la posición relativa entre las rectas:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & 1 \end{vmatrix} = (0+2+8)-(0+16+2) = -8 \neq 0 \rightarrow rg\,(A^*) = 3$$

$$A = \left(\boxed{\begin{matrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right) \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0-2 = -2 \neq 0 \rightarrow rg\,(A) = 2$$




**Las rectas se cruzan**

b) Plano que sea paralelo a $r$ y que contenga a $s$:

$$\pi \begin{cases} P_\pi = P_s(2,-5,1) \\ \vec{v}_s(-1,\ 0,-1) \\ \vec{v}_r(2,-2,\ 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= [0 - 2\cdot(y+5) + 2\cdot(z-1)] - [0 + 2\cdot(x-2) - 1\cdot(y+5)] =$$

$$= [-2y - 10 + 2z - 2] - [2x - 4 - y - 5] = -2x - y + 2z - 3 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv -2x - y + 2z - 3 = 0}$$

c) Plano perpendicular a la recta $r$ y que pase por el origen de coordenadas:

$$\alpha \begin{cases} \vec{n}_\alpha = \vec{v}_r(2,-2,\ 1) \\ P_\pi\ (0,\ 0,\ 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x - 2y + 1z + D = 0 \\ 2(0) - 2(0) + 1(0) + D = 0 \ \rightarrow\ D = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\alpha \equiv 2x - 2y + 1z = 0}$$



**9. Consideramos en el espacio las rectas:**

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas $r$ y $s$.

b) La recta que pasa por $P = (0,-1,\ 2)$ y corta perpendicularmente a la recta $r$.

c) El valor que deben tener los parámetros reales $\alpha$ y $b$ para que la recta $s$ esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + \alpha z = b$.

**- Primero pasamos la ecuación de la recta $r$ a <u>paramétrica</u> para poder obtener $\vec{v}_r$ y $P_r$:**

$$\begin{cases} x \ -y \qquad +3 = 0 \ (E_1) \\ 2x \qquad -z\ +3 = 0 \ (E_2) \end{cases} \Rightarrow E_2' = E_2 - 2E_1 \quad \begin{cases} x \ -y \qquad +3 = 0 \\ 0 \ +2y \ -z \ -3 = 0 \end{cases}$$

**Definimos $y = t$ y ya podemos obtener el resto de las variables:**

$$\begin{cases} x - y \qquad +3 = 0 \ \rightarrow\ x - (t) + 3 = 0 \ \rightarrow\ x = -3 + t \\ 2y - z - 3 = 0 \ \rightarrow\ 2(t) - z - 3 = 0 \ \rightarrow\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \rightarrow\ r \begin{cases} P_r(-3,\ 0,-3) \\ \vec{v}_r(1,\ 1,\ 2) \end{cases} \qquad s \begin{cases} P_s(0,-1,\ 2) \\ \vec{v}_s(1,\ 1,\ 2) \end{cases}$$

a) Plano que contiene las rectas $r$ y $s$:

**Tenemos dos vectores directores y podemos escoger el punto que queramos entre $P_r$ y $P_s$. Nos vamos a decantar por $P_s$ al ser un dato ofrecido por el propio problema:**

$$\pi \begin{cases} P_\pi = P_s(0,-1,\ 2) \\ \vec{v}_s(1,\ 1,\ 2) \\ \vec{v}_r(1,\ 1,\ 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

¡¡OJO!! La razón por la cual el determinante es cero es porque las rectas, al tener el mismo vector director, son paralelas. Por lo tanto solo me sirve un vector director ($\vec{v}_r$ o $\vec{v}_s$) y tenemos que construir el vector: $\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (0,-1,\ 2) - (-3,\ 0,-3) = (3,-1,\ 5)$

$$\pi \begin{cases} P_\pi = P_s(0,-1,\ 2) \\ \vec{v}_s(1,\ 1,\ 2) \\ \overrightarrow{P_rP_s}(3,-1,\ 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= [5\cdot(x-0) + 6\cdot(y+1) - 1\cdot(z-2)] - [3\cdot(z-2) - 2\cdot(x-0) + 5\cdot(y+1)] =$$

$$= [5x + 6y + 6 - z + 2] - [3z - 6 - 2x + 5y + 5] = 7x + y - 4z + 9 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv 7x + y - 4z + 9 = 0}$$

b) Recta que pasa por $P=(0,-1,\ 2)$ y corta perpendicularmente a la recta $r$:

**Este problema es una variación del clásico "<u>simétrico de un punto respecto a una recta</u>":**

- **Calculamos el <u>plano $\alpha$</u>** perpendicular a la recta $r$ y que pasa por $P$:

$$\alpha\begin{cases}\vec{n}_\alpha=\vec{v}_r=(1,\ 1,\ 2)\\ P\ (0,-1,\ 2)\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}1x+1y+2z+D=0\\ 1\cdot(0)+1\cdot(-1)+2\cdot(2)+D=0\ \rightarrow\ 3+D=0\ \rightarrow\ \boldsymbol{D=-3}\end{array}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha\equiv x+y+2z-3\ =0}}$$

- Calculamos el **<u>punto de corte</u>** a través de un **<u>punto genérico</u>** $\boldsymbol{M(x,\ y,\ z)}$ **de la recta:**

$$\boldsymbol{M(x,\ y,\ z)}\rightarrow\boxed{\boldsymbol{M(-3+t,\ t,\ -3+2t)}}$$

- Sustituimos **dicho punto en el <u>plano</u>** para calcular el parámetro y **<u>obtener $M$</u>**:

$$\alpha\equiv(-3+t)+(t)+2(-3+2t)-3\ =0\ \rightarrow\ 6t-12=0\ \rightarrow\ t=2$$

$$\boxed{\boldsymbol{M(-1,\ 2,\ 1)}}$$

-De esta manera, **la <u>recta solución $t$</u> tomará la forma:**

$$t\begin{cases}P\ (0,-1,\ 2)\\ \vec{v}_t=\overrightarrow{PM}=M-P=(-1,\ 3,-1)\end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{t\equiv\begin{cases}x=-t\\ y=-1+3t\\ z=2-t\end{cases}}$$

c) El valor que deben tener los parámetros reales $a$ y $b$ para que la recta $s$ esté contenida en el plano $\pi: x-2y+az=b$:

Para que la recta $s$ esté contenida en el plano $\pi$, $\vec{v}_s$ **debe ser perpendicular a $\vec{n}_\pi$ y $P_s$ debe estar contenido en $\pi$**, por lo tanto:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\vec{v}_s\cdot\vec{n}_\pi=0}\ \rightarrow(1,\ 1,\ 2)\cdot(1,-2,\ a)=1-2+2a=0\ \rightarrow\ a={}^1\!/_2\\ \boldsymbol{P_s\in\pi}\ \rightarrow\ (0)-2\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot(2)=b\rightarrow\ b=3\end{cases}$$



**10. Considera la recta $r\equiv\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1\equiv x=0$ y $\pi_2\equiv y=0$.**

**a) Halla los puntos de la recta $r$ que equidistan de los planos $\pi_1$ y $\pi_2$.**

**b) Determina la posición relativa de la recta $r$ y la recta intersección de los planos $\pi_1$ y $\pi_2$.**

a) Para **averiguar dicho lugar geométrico, vamos a recurrir a un punto genérico $G$,** al cual le imponemos la **<u>condición</u>** de que siempre esté a la misma distancia de $\pi_1$ y $\pi_2$

$$r\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{1}\ \rightarrow\ r\equiv\begin{cases}x=2-t\\ y=2+3t\\ z=1+t\end{cases}\ \rightarrow\ \boldsymbol{G(2-t,\ 2+3t,\ 1+t)}$$

$$\left.\begin{array}{l}d(G,\pi_1)=\boldsymbol{d(G,\pi_2)}\\[4pt] d(G,\pi_1)=\dfrac{|2-t|}{1}\\[4pt] d(G,\pi_2)=\dfrac{|2+3t|}{1}\end{array}\right\}\ \boxed{|2-t|=|2+3t|\begin{cases}a)\ 2-t=2+3t\ \rightarrow\ \boldsymbol{t=0}\\ b)\ 2-t=-2-3t\rightarrow\ \boldsymbol{t=-2}\end{cases}}$$

$$t=0\ \rightarrow\ P_1\begin{cases}x=2-(0)=2\\ y=2+3(0)=2\\ z=1+(0)=1\end{cases}\ \rightarrow\ \boldsymbol{P_1(2,\ 2,\ 1)}$$

$$t=-2\ \rightarrow\ P_2\begin{cases}x=2-(-2)=4\\ y=2+3(-2)=-4\\ z=1+(-2)=-1\end{cases}\ \rightarrow\ \boldsymbol{P_2(4,-4,-1)}$$

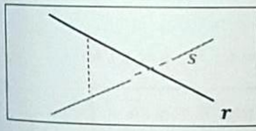
b) - Recta intersección entre $\pi_1$ y $\pi_2$: $s\equiv\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\ \rightarrow\ s\equiv\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=t\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{P_s(0,\ 0,\ 0)}\\ \boldsymbol{\vec{v}_s(0,\ 0,\ 1)}\end{cases}$

- Posición relativa de la recta $r$:

$$\overrightarrow{P_rP_s}=P_s-P_r=(0,\ 0,\ 0)-(2,\ 2,\ 1)=\boldsymbol{(-2,-2,-1)}$$

$$A=\begin{pmatrix}\vec{v}_r\\ \vec{v}_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&1\\ 0&0&1\end{pmatrix}\qquad A^*=\begin{pmatrix}\vec{v}_r\\ \vec{v}_s\\ \overrightarrow{P_rP_s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&1\\ 0&0&1\\ -2&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$|A^*|=\begin{vmatrix}-1&3&1\\ 0&0&1\\ -2&-2&-1\end{vmatrix}=(-6)-(+2)=\ \boldsymbol{-8\neq0\ \rightarrow\ rg\ (A^*)=3}$$




**Las rectas se cruzan**

# Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad 2020

**1. Se da las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real $b$.**

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de $b$ para que cada una de las matrices $AB$ y $BA$ tenga inversa.

b) Los valores de $b$ para que la matriz $A^t A$ tenga inversa, siendo $A^t$ la matriz traspuesta de $A$.

c) La inversa de $A^t A$, cuando dicha inversa exista.

a) Valores de $b$ para que cada una de las matrices $AB$ y $BA$ tenga inversa:

$$A_{3\,x\,2} \cdot B_{2\,x\,3} = S_{3\,x\,3}$$

$$\boldsymbol{A \cdot B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{vmatrix} = 2b \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2b \cdot [(-2b) - (-6b + 4b)] =$$

$$= 2b \cdot [-2b + 2b] = \mathbf{0}$$

$\boxed{\textbf{\textit{AB} no tiene inversa para cualquier valor de } b}$

$$B_{2\,x\,3} \cdot A_{3\,x\,2} = S_{2\,x\,2}$$

$$\boldsymbol{B \cdot A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 2b^2 = 0 \;\rightarrow\; 2b^2 = 12 \;\rightarrow\; b^2 = 6 \;\rightarrow\; b = \pm\sqrt{6}$$

$\boxed{\textbf{\textit{BA} tiene inversa para } b \neq \pm\sqrt{6}}$



b) Valores de $b$ para que la matriz $A^t A$ tenga inversa:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|A^t A| = \begin{vmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot (b^2+2) = 0 \;\rightarrow\; b^2 = -2 \;\rightarrow\; b = \sqrt{-2} \quad \boxed{\textbf{Sin solución}}$$

$\boxed{\boldsymbol{A^t A} \textbf{ tiene inversa para cualquier valor de } b}$

c) Inversa de $A^t A$, cuando dicha inversa exista:

$$(\boldsymbol{A^t A})^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{A^t A}|} \cdot \boldsymbol{adj\ (A^t A)^t}$$

$$|A^t A| = 8 \cdot (b^2+2)$$

$$(A^t A)^t = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$adj\ (A^t A)^t = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix}$$

$$(A^t A)^{-1} = \frac{1}{|A^t A|} \cdot adj\ (A^t A)^t = \frac{1}{8 \cdot (b^2+2)} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b^2+2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}} \end{pmatrix}$$

**2. Sean $A$ y $B$ las dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix}0&-4\\4&-2\end{pmatrix}$. Se pide:**

a) Calcular $A^2-B^2$. (Advertencia: en este caso, $A^2-B^2\neq(A+B)(A-B)$)

b) Calcular la matriz $X$ que cumple la igualdad: $XA+(A+B)^t=2I+XB$, siendo $I$ la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la traspuesta de $A+B$.

a) Cálculo de $A^2-B^2$:

$$A+B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}-A=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\-2&1\end{pmatrix}}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}0&-4\\4&-2\end{pmatrix}$$

$$2A=\begin{pmatrix}2&0\\4&-2\end{pmatrix}\rightarrow A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ;\ B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}1&4\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&8\\-4&-7\end{pmatrix}$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7&8\\-4&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-8\\4&8\end{pmatrix}$$

b) Cálculo de la matriz $X$ que cumple la igualdad: $XA+(A+B)^t=2I+XB$:

$$XA+(A+B)^t=2I+XB\rightarrow XA-XB=2I-(A+B)^t\rightarrow X(A-B)=[2I-(A+B)^t]\rightarrow$$

$$\rightarrow X(A-B)(A-B)^{-1}=[2I-(A+B)^t](A-B)^{-1}\ \rightarrow\ X=[2I-(A+B)^t](A-B)^{-1}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}\ \rightarrow\ (A+B)^t=\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}$$

$$2I-(A+B)^t=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-4&2\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}0&-4\\4&-2\end{pmatrix}=C \quad \boxed{\text{Vamos a llamar } C=A-B}$$

$$|C|=\begin{vmatrix}0&-4\\4&-2\end{vmatrix}=16\ ;\quad C^t=\begin{pmatrix}0&4\\-4&-2\end{pmatrix}\ ;\ adj\,(C^t)=\begin{pmatrix}-2&4\\-4&0\end{pmatrix}$$

$$(C)^{-1}=\frac{1}{|C|}\cdot adj\,(C^t)=\frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix}-2&4\\-4&0\end{pmatrix}$$

$$X=[2I-(A+B)^t](A-B)^{-1}$$

$$X=\begin{pmatrix}0&0\\-4&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix}-2&4\\-4&0\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$$



**3. a) Determina razonadamente los valores de $\alpha$ para los que la matriz $A$ no tiene inversa**

$$A=\begin{pmatrix}1&\alpha+1&2&1\\0&2&1&\alpha\\\alpha&0&1&0\\\alpha&0&2&0\end{pmatrix}$$

**b) Calcula razonadamente todos los posibles valores de $x,y,z$ para que el producto de las matrices $C=\begin{pmatrix}x&1\\y&z\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}$ conmute.**

a) Valores de $a$ para los que la matriz $A$ no tiene inversa:

$$A=\begin{pmatrix}1&a+1&2&1\\0&2&1&a\\a&0&1&0\\a&0&2&0\end{pmatrix}$$

Vamos a calcular el determinante por los adjuntos en la columna 4

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a+1&2&1\\0&2&1&a\\a&0&1&0\\a&0&2&0\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}0&2&1\\a&0&1\\a&0&2\end{vmatrix}+a\cdot\begin{vmatrix}1&a+1&2\\a&0&1\\a&0&2\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot[(0+2a+0)-(0+0+4a)]+a\cdot[(a^2+a)-(2a^2+2a)]=2a-a^3-a^2=$$

$$=-a^3-a^2+2a=0\ \rightarrow\ a(-a^2-a+2)=0\rightarrow\ -a^2-a+2=0\rightarrow\begin{cases}a=0\\a=1\\a=-2\end{cases}$$

| | | |
|---|---|---|
| Si $a=0;\ a=1;\ a=-2$ | $\lvert A\rvert=0$ | $A$ no tiene inversa |

b) valores de $x,y,z$ para que el producto de las matrices $C$ y $D$ conmute:

$$C\cdot D=D\cdot C\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}x&1\\y&z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&1\\y&z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3x+1&x-1\\3y+z&y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y&3+z\\x-y&1-z\end{pmatrix}$$

$$3x+1=3x+y\ \rightarrow\boxed{y=1}$$

$$x-1=3+z\ \rightarrow\ x-z=4$$

$$3y+z=x-y\ \rightarrow\ -x+z=-4y$$

$$y-z=1-z\ \rightarrow\boxed{y=1}$$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x-z=4\\-x+z=-4(1)\end{cases}}$$

$$\begin{cases}x-z=4\\-x+z=-4\end{cases}\ \xrightarrow{E_2'=E_2+E_1}\ \boxed{\text{S.C.I}\ \begin{cases}x-z=4\\0=0\end{cases}\ \infty\text{ soluciones}}\ \rightarrow\begin{cases}z=\lambda\\x=4+\lambda\\y=1\end{cases}\rightarrow\ \boxed{\begin{cases}x=4+\lambda\\y=1\\z=\lambda\end{cases}}$$

**4. Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real $a$ y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado:**

$$\begin{cases}(a+1)x+(a^2+a)y=2\\(-a-1)x-a^2y=0\\ay+(a^2-1)z=3-a\end{cases}$$

**Calculamos los valores de $a$ para los cuales $|A|=0$:**

$$A^*=\left(\underbrace{\begin{matrix}a+1 & a^2+a & 0\\-a-1 & -a^2 & 0\\0 & a & a^2-1\end{matrix}}_{\boxed{A}}\;\middle|\;\begin{matrix}2\\0\\3-a\end{matrix}\right)$$

$$A=\begin{vmatrix}a+1 & a^2+a & 0\\-a-1 & -a^2 & 0\\0 & a & a^2-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+1 & a(a+1) & 0\\-(a+1) & -a^2 & 0\\0 & a & a^2-1\end{vmatrix}=$$

$$=\boxed{(a+1)}\begin{vmatrix}1 & a & 0\\-(a+1) & -a^2 & 0\\0 & a & a^2-1\end{vmatrix}=(a+1)\cdot a\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\-(a+1) & -a & 0\\0 & 1 & a^2-1\end{vmatrix}=$$

$$=(a+1)\cdot a\cdot[[-a(a^2-1)]-[-(a+1)\cdot(a^2-1)]]=$$

$$=(a+1)\cdot a\cdot[-a^3+a+a^3-a+a^2-1]=(a+1)\cdot a\cdot(a^2-1)=0\rightarrow\begin{cases}a=-1\\a=0\\a=\pm1\end{cases}$$

| Discusión | $rg\,(A)$ | $rg\,(A^*)$ | Incógnitas | Sistema |
|---|---|---|---|---|
| $a\neq-1; a\neq0; a\neq1\rightarrow\|A\|\neq0$ | 3 | 3 | 3 | Compatible determinado |

Si $a=-1$

$$A^*=\left(\underbrace{\begin{matrix}0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & -1 & 0\end{matrix}}_{\boxed{A}}\;\middle|\;\begin{matrix}2\\0\\4\end{matrix}\right)$$

| Discusión | $rg\,(A)$ | $rg\,(A^*)$ | Incógnitas | Sistema |
|---|---|---|---|---|
| $a=-1\rightarrow\|A\|=0$ | 1 | 2 | 3 | Incompatible |



Si $a=0$

$$A^*=\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\end{matrix}}_{\boxed{A}}\;\middle|\;\begin{matrix}2\\0\\3\end{matrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 3\end{vmatrix}=2\neq0\rightarrow rg\,(A^*)=3$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix}=1\neq0\rightarrow rg\,(A)=2$$

| Discusión | $rg\,(A)$ | $rg\,(A^*)$ | Incógnitas | Sistema |
|---|---|---|---|---|
| $a=0\rightarrow\|A\|=0$ | 2 | 3 | 3 | Incompatible |

Si $a=1$

$$A^*=\left(\underbrace{\begin{matrix}2 & 2 & 0\\-2 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\end{matrix}}_{\boxed{A}}\;\middle|\;\begin{matrix}2\\0\\2\end{matrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix}2 & 2\\-2 & -1\end{vmatrix}=2\neq0\rightarrow rg\,(A)=2$$

$$\begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\-2 & -1 & 0\\0 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\rightarrow rg\,(A^*)=2$$

| Discusión | $rg\,(A)$ | $rg\,(A^*)$ | Incógnitas | Sistema |
|---|---|---|---|---|
| $a=1\rightarrow\|A\|=0$ | 2 | 2 | 3 | Compatible indeterminado |

**- Resolvemos el sistema para el caso compatible indeterminado, es decir, para $a=1$**

Al ser un sistema compatible indeterminado lo resolveremos mediantes Gauss pero vamos a utilizar sólo las dos ecuaciones que contengan el determinante 2x2 diferente a cero.

$$A^*=\left(\begin{matrix}2 & 2 & 0\\-2 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}2\\0\\2\end{matrix}\right)$$

$$\begin{cases}2x+2y=2\\-2x-y=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad 2x=-2y+2\quad\rightarrow\quad 2x=-2(2)+2\quad\rightarrow\quad\boxed{x=-1}$$

$$\boxed{y=2}\qquad\boxed{z=\lambda}$$

**5. Dadas las rectas:** $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$ ; $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ **, se pide:**

a) Calcular la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.

b) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta $r$ y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.

c) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta $r$ que contiene a la recta $s$.

a) Posición relativa de las rectas $r$ y $s$:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases} \xrightarrow{\boxed{y=\alpha}} \begin{cases} x - \alpha = 2 \rightarrow x = 2 + \alpha \\ 3(2+\alpha) - z = -1 \rightarrow -z = -1 - 6 - 3\alpha \rightarrow z = 7 + 3\alpha \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 7 + 3\alpha \end{cases} \rightarrow r \begin{cases} P_r(2,\ 0,\ 7) \\ \vec{v}_r(1,\ 1,\ 3) \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow s \begin{cases} P_s(-1, -4, 0) \\ \vec{v}_s(2, -1,\ 1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (-1, -4, 0) - (2,\ 0,\ 7) = (-3, -4, -7)$$

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & -7 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \rightarrow rg\,(A^*) = 3$$


Las rectas se cruzan

b) Ecuación del plano perpendicular a la recta $r$ y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$:

$$\pi_1 \begin{cases} \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (1,\ 1,\ 3) & 1x + 1y + 3z + D = 0 \\ P\,(2, -1,\ 5) & 1 \cdot (2) + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (5) + D = 0 \rightarrow 16 + D = 0 \rightarrow D = -16 \end{cases}$$

$$\boxed{\pi_1 \equiv x + y + 3z - 16 = 0}$$

c) Ecuación del plano paralelo a la recta $r$ que contiene a la recta s:

$$\pi_2 \begin{cases} P_s(-1, -4,\ 0) \\ \vec{v}_s(2, -1,\ 1) \\ \vec{v}_r(1,\ 1,\ 3) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z-0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= [-3 \cdot (x+1) + 1 \cdot (y+4) + 2 \cdot (z-0)] - [-1 \cdot (z-0) + 1 \cdot (x+1) + 6 \cdot (y+4)] =$$

$$= [-3x - 3 + y + 4 + 2z] - [-z + x + 1 + 6y + 24] = -4x - 5y + 3z - 24 = 0$$

$$\boxed{\pi_2 \equiv -4x - 5y + 3z - 24 = 0}$$



**6. Dados el punto $A(1, 2, 4)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$,**

a) Hallar un punto $B$ de la recta $r$ de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano $\pi \equiv x + 2z = 0$

b) Hallar un vector $(a, b, c)$ perpendicular a $(1, 0, -1)$ y $(2, 1, 0)$.

a) Punto $B$ de la recta $r$ de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano $\pi$:

Pasamos la recta $r$ a paramétrica:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

Si es el vector $\overrightarrow{AB}$ es paralelo al plano $\rightarrow$ $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$

Como $B$ es un punto de la recta que no conocemos $\rightarrow B = G(1 + 2\lambda,\ 1 + \lambda,\ 1 + 2\lambda)$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1 + 2\lambda,\ 1 + \lambda,\ 1 + 2\lambda) - (1,\ 2,\ 4) = (2\lambda, -1 + \lambda, -3 + 2\lambda)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = (2\lambda, -1 + \lambda, -3 + 2\lambda) \cdot (1,\ 0,\ 2) = 2\lambda + 0 - 6 + 4\lambda = 6\lambda - 6$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow 6\lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

$$B = G(1 + 2\lambda,\ 1 + \lambda,\ 1 + 2\lambda) = (1 + 2 \cdot 1,\ 1 + 1,\ 1 + 2 \cdot 1) = (3,\ 2,\ 3)$$

b) Vector $(a, b, c)$ perpendicular a $(1, 0, -1)$ y $(2, 1, 0)$.

$$\vec{s} = (a, b, c)$$

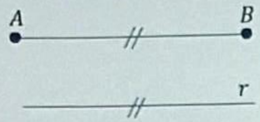
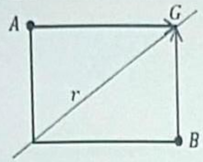
$$\vec{s} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2\vec{\jmath} + \vec{k}) - (-\vec{\imath}) = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k} = (1, -2,\ 1)$$

$$\vec{s} = (1, -2,\ 1)$$

**7. Los puntos $A \equiv (-1,2,1)$ y $B \equiv (2,5,1)$ son dos vértices de un cuadrado.** Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-4}$$

Como el problema no dice nada, tenemos dos posibles opciones:

| Los vértices son consecutivos | Los vértices están en una diagonal |
|---|---|
|  |  |
| **Opción incorrecta:** Como $\vec{v}_r(-1,1,-4)$ no es proporcional a $\overrightarrow{AB}(3,3,0)$ descartamos esta opción. | **Opción correcta** (usamos punto genérico): En este caso $\overrightarrow{AG}$ es perpendicular a $\overrightarrow{BG}$ por lo tanto sabemos que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$ |

Tenemos que encontrar dos puntos de la recta. Como no sabemos cuáles son, recurrimos a punto genérico. Para ello empezamos pasando la recta a paramétrica:

$$r\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 4+\lambda \\ z = -1-4\lambda \end{cases} \quad \rightarrow \quad G(-\lambda,\ 4+\lambda,\ -1-4\lambda)$$

Sabemos que $\overrightarrow{AG}$ es perpendicular a $\overrightarrow{BG} \ \rightarrow \ \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$

$$\overrightarrow{AG} = G - A = (-\lambda,\ 4+\lambda,\ -1-4\lambda) - (-1,\ 2,\ 1) = (-\lambda+1,\ 2+\lambda,\ -2-4\lambda)$$

$$\overrightarrow{BG} = G - B = (-\lambda,\ 4+\lambda,\ -1-4\lambda) - (2,\ 5,\ 1) = (-\lambda-2, -1+\lambda,\ -2-4\lambda)$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG} = (-\lambda+1,\ 2+\lambda,\ -2-4\lambda)\cdot(-\lambda-2,-1+\lambda,\ -2-4\lambda) =$$

$$= (-\lambda+1)\cdot(-\lambda-2) + (2+\lambda)\cdot(-1+\lambda) + (-2-4\lambda)\cdot(-2-4\lambda) =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - \lambda - 2 - 2 + 2\lambda - \lambda + \lambda^2 + 4 + 16\lambda + 16\lambda^2 =$$

$$= 18\lambda^2 + 18\lambda = 0 \ \rightarrow \ \lambda(18\lambda+18) = 0 \ \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Si $\lambda = 0 \ \rightarrow \ \boxed{G_1(0,\ 4, -1)}$

Si $\lambda = -1 \ \rightarrow \ \boxed{G_2(1,\ 3,\ 3)}$



# TEMA 8

# Probabilidad

## ¿Qué vamos a estudiar en este tema?

1. Espacio muestral y sucesos
2. Operaciones con sucesos
3. Probabilidad. Regla de Laplace
4. Propiedades de la probabilidad
5. Leyes de Morgan
6. Diferencia de sucesos
7. Probabilidad condicionada
8. Sucesos independientes
9. Diagramas de árbol
10. Teorema de probabilidad total
11. Teorema de Bayes

**"Remix" de ejercicios del tema: PROBABILIDAD**

**Evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad**