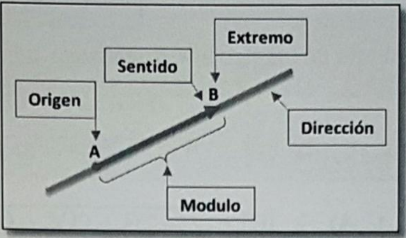
1. Introducción. Conceptos previos

1.1. Definición de vector

Un vector $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado, que tiene:

- **Origen:** Donde empieza
- **Extremo:** Donde acaba
- **Modulo:** Su longitud
- **Dirección:** La recta que lo contiene
- **Sentido:** Hacia donde se dirige



Un vector puede expresarse a través de la forma $\overrightarrow{AB}$ ó $\vec{v}$

Los vectores están libres en el espacio. Para trabajar con ellos buscaremos aquellos que tengan su origen en el origen de coordenadas...¡¡Ahora veremos la forma de calcularlos!!

1.2. Coordenadas de un vector definido por dos puntos

Sean dos puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$. El vector definido por esos dos puntos es:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = B - A}$$

Calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ en los siguientes casos:

$a)$ $A\,(1,\ 0,\ 3)$ y $B\,(-2,\ 3,\ 1)$ b) $A\,(3, -1,\ 2)$ y $B\,(-1,\ 2, -3)$

$a)$ $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,\ 3,\ 1) - (1,\ 0,\ 3) = (-3,\ 3, -2)$

$b)$ $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 2, -3) - (3, -1,\ 2) = (-4,\ 3, -5)$

En este caso, ahora las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ tienen su origen en el origen de coordenadas y su extremo en el punto $(-4,\ 3, -5)$

1.3. Módulo de un vector

El módulo de un vector $\vec{v}\,(v_x, v_y, v_z)$, es la <u>longitud</u> de dicho vector. Se calcula así:

$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + \left(v_y\right)^2 + (v_z)^2}}$$

Calcula el módulo de los siguientes vectores: $a)\ \vec{v} = (1,\ 2, -3)$ $\quad$ b) $\vec{w} = (-2,\ 1,\ 4)$

$a)\ \vec{v} = (1,\ 2, -3) \quad \rightarrow \quad |\vec{v}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \boldsymbol{\sqrt{14}}$

$b)\ \vec{w} = (-2,\ 1,\ 4) \rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+1+16} = \boldsymbol{\sqrt{21}}$

1.4. Suma y resta de vectores y producto por un número

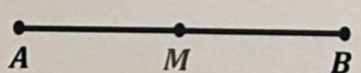
Sean los vectores $\vec{u} = (1, -3,\ 2)$ y $\vec{v} = (2, -1, -4)$. Calcula: $a)\ 2\vec{u} + 3\vec{v} \quad b) -3\vec{u} + 2\vec{v}$

$a)\ 2\vec{u} + 3\vec{v} = 2 \cdot (1, -3,\ 2) + 3 \cdot (2, -1, -4) = (2, -6,\ 4) + (6, -3, -12) = \mathbf{(8, -9, -8)}$

$b) -3\vec{u} + 2\vec{v} = -3(1, -3,\ 2) + 2(2, -1, -4) = (-3,\ 9, -6) + (4, -2, -8) = \mathbf{(1,\ 7, -14)}$

1.5. Punto medio de un segmento

El punto medio (M) de un segmento, es aquel punto que pertenece al segmento y que está a la misma distancia de los extremos. Se calcula de la siguiente forma:



$$\boxed{M = \frac{A+B}{2}}$$

Calcula el punto medio (M) definido por los siguientes segmentos de extremos:
$a)\ A\,(1,\ 2, -3)$ y $B\,(3, -4,\ 1)$ $\quad$ b) $A\,(3, -1,\ 5)$ y $B\,(-2,\ 1, -2)$

$$a)\ M = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,\ 2, -3) + (3, -4,\ 1)}{2} = \frac{(4, -2, -2)}{2} = \mathbf{(2, -1, -1)}$$

$$b)\ M = \frac{A+B}{2} = \frac{(3, -1,\ 5) + (-2,\ 1, -2)}{2} = \frac{(1,\ 0,\ 3)}{2} = \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\right)$$

1.6. Vectores paralelos

Sabemos que **dos vectores $\vec{u}\,(u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v}\,(v_x, v_y, v_z)$ son paralelos (tienen la misma dirección) si son proporcionales**. Es decir:

$$\boxed{\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} = \frac{u_z}{v_z}}$$

Deduce si los siguientes pares de vectores son paralelos:

$a)\ \vec{u} = (2, -2,\ 4)$ y $\vec{v} = (1, -1,\ 2)$ $\quad b)\ \vec{u} = (2, -6, -4)$ y $\vec{v} = (1, -3,\ 2)$

Dividimos los componentes de $\vec{u}$ entre $\vec{v}$ para ver si son proporcionales y por tanto, paralelos:

$$\boldsymbol{a)}\ \frac{2}{1} = \frac{-2}{-1} = \frac{4}{2} \quad \rightarrow \quad 2 = 2 = 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son paralelos}}$$

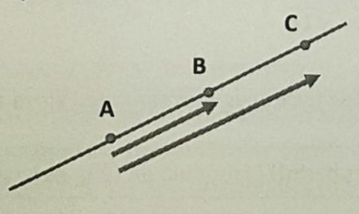
$$\boldsymbol{b)}\ \frac{2}{1} = \frac{-6}{-3} = \frac{-4}{2} \quad \rightarrow \quad 2 = 2 \neq -2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{u} \text{ y } \vec{v} \ \underline{\text{no}} \text{ son paralelos}}$$

Calcula el valor de k para que $\vec{u} = (1, -3,\ 2)$ y $\vec{v} = (2,\ k,\ 4)$ sean paralelos:

$$\frac{1}{2} = \frac{-3}{\boldsymbol{k}} = \frac{2}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{-3}{k} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{-3}{k} \rightarrow \quad \boldsymbol{k = -6}$$

1.7. Puntos alineados

Los puntos A, B y C están alineados si pertenecen a la misma recta, entonces, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ serán paralelos:



Deduce si los siguientes puntos están alineados:

$a)\ A\,(1,\ 0,-1)\ \ B\,(-1,\ 1,\ 0)\ \ C\,(0,\ 1,-1)$ b) $P\,(2,\ 3,\ 2)\ \ Q\,(2,\ 5,\ 4)\ \ R\,(2,\ 4,\ 3)$

a) Construimos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 1\,,0) - (1,\ 0,-1) = (-2,\ 1,\ 1\,)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = \ (0,\ 1,-1) - (1,\ 0,-1) = (-1,\ 1,\ 0)$

Ahora vamos a comprobar si $\overrightarrow{AB}\,(-2,\ 1,\ 1\,)$ y $\overrightarrow{AC}\,(-1,\ 1,\ 0)$ son paralelos:

$\frac{-2}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{0} \ \rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{AC} \text{ no son paralelos, por lo tanto: } A, B \text{ y } C \text{ no están alineados}}$

b) Construimos los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$:

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,\ 5\,,4) - (2,\ 3,\ 2) = (0,\ 2,\ 2\,)$

$\overrightarrow{PR} = R - P = (2,\ 4,\ 3) - (2,\ 3,\ 2) = (0,\ 1,\ 1)$

Ahora vamos a comprobar si $\overrightarrow{PQ}\,(0,\ 2,\ 2\,)$ y $\overrightarrow{PR}\,(0,\ 1,\ 1)$ son paralelos:

$\cancel{\frac{0}{0}} = \frac{2}{1} = \frac{2}{1} \ \rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{PQ} \text{ y } \overrightarrow{PR} \text{ son paralelos, por lo tanto: } P, Q \text{ y } R \text{ están alineados}}$

1.8. Vectores unitarios

Definimos vector unitario $\vec{v}_u$ como aquel cuyo módulo es la unidad.

$$\boxed{|v_u\,| = \mathbf{1}}$$

Calcula un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{u}\,(-1,-2,\ \ 3)$ y otro vector con la misma dirección pero sentido opuesto:

Primero calculamos el modulo de $\vec{u}$:

$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{\mathbf{14}}$

Para conseguir un vector unitario a $\vec{u}$, dividimos todos sus componentes entre su módulo:

$\vec{v}_{u_1} = \left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ ¡¡Puedes comprobarlo!! El módulo de $(\vec{v})_u$ es igual a 1

Finalmente para obtener el vector unitario a $\vec{u}$ con la misma dirección pero sentido opuesto, basta con cambiar los signos de los componentes:

$\vec{v}_{u_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$

2. Producto escalar ($\vec{u} \cdot \vec{v}$)

2.1. Introducción y cálculo del producto escalar

El producto escalar de dos vectores, como bien indica la palabra escalar, **es siempre un número (nunca será un vector)**. ¡¡OJO con la notación!! **Se denota con un punto (·).** Podemos definir el producto escalar de la siguiente forma:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$ (Siendo α el ángulo formado por los dos vectores)

Sin embargo, nosotros lo calcularemos a través de su **expresión analítica**:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

¡¡Con un ejemplo vamos a ver lo fácil que es!!

Calcula el producto escalar de los siguientes pares de vectores:
$a)\ \vec{u} = (1,\ 2, -3)$ y $\vec{v} = (-1,\ 4,\ 5)$ $\qquad b)\ \vec{u} = (2,\ 3, -1)$ y $\vec{v} = (1, -2,\ 5)$

$$a)\ \vec{u} \cdot \vec{v} = (1,\ 2, -3) \cdot (-1,\ 4,\ 5) = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 5 = \mathbf{-8}$$

$$b)\ \vec{u} \cdot \vec{v} = (2,\ 3, -1) \cdot (1, -2,\ 5) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 = \mathbf{-9}$$

¡¡Acuérdate!! El producto escalar es siempre un escalar, es decir, un número.

2.2. Propiedades del producto escalar

a) Propiedad conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b) Propiedad asociativa: $k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}$

c) Propiedad distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \underbrace{\cos 0°}_{1} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot 1 = |\vec{v}|^2$ **por lo tanto:** $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$

PROPIEDAD/APLICACIÓN MUY IMPORTANTE… ¡¡La utilizaremos mucho!!

e) Si el producto escalar de dos vectores no nulos es cero ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$), serán perpendiculares
Vocabulario: **Ortogonal y perpendicular significan los mismo.**
Esto se debe a que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales (o perpendiculares) formarán un ángulo de 90° y el coseno de dicho ángulo, al ser 0, dará como resultado un producto escalar de 0 también:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \underbrace{\cos 90°}_{0} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot 0 = \mathbf{0}$ **por lo tanto si** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \underbrace{\vec{u} \perp \vec{v}}_{\textbf{Perpendicular}}$

Deduce si los siguientes pares de vectores son perpendiculares:

$a)\ \vec{u} = (-1,\ 2,\ 3)$ y $\vec{v} = (2,\ 1,\ 0)$ $\qquad b)\ \vec{u} = (2, -1,\ 4)$ y $\vec{v} = (1, -3,\ 1)$

$\boldsymbol{a)}\ \vec{u} \cdot \vec{v} = (-1,\ 2,\ 3) \cdot (2,\ 1,\ 0) = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = \mathbf{0}$ **Perpendiculares**

$\boldsymbol{b)}\ \vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -1,\ 4) \cdot (1, -3,\ 1) = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) + 4 \cdot 1 = \mathbf{9}$ **No perpendiculares**

Calcula el valor de k para que los siguientes vectores sean ortogonales:

$\vec{u} = (1, -3,\ 1)$ y $\vec{v} = (5,\ k, -2)$

¡¡Recuerda!! Ortogonal y perpendicular significan lo mismo.

Calculamos su producto escalar e igualamos k a cero para que los vectores sean ortogonales:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, -3,\ 1) \cdot (5,\ k, -2) = 1 \cdot 5 + (-3) \cdot k + 1 \cdot (-2) = 5 - 3k - 2 = \mathbf{3 - 3k}$;

$\mathbf{3 - 3k = 0} \ \rightarrow\ 3k = 3 \ \rightarrow\ k = {}^{3}/_{3} \ \rightarrow\ \mathbf{k = 1}$

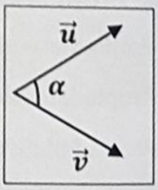
Si $k = 1 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow$ Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares (ortogonales)

¡¡INTERESANTE!! Ahora ya sabemos deducir si dos vectores son **paralelos o perpendiculares.** Ello será una herramienta fundamental para los próximos temas de geometría.

2.3. Ángulo entre dos vectores

<u>Una aplicación del producto escalar</u> es que nos permite deducir el ángulo entre dos vectores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \rightarrow \boxed{\alpha = arco\ cos\ \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}}$$



En las calculadoras $arco\ cos$ suele venir como cos^{-1}

Memorizar bien esta fórmula

¡¡Vamos a usarla bastante!!

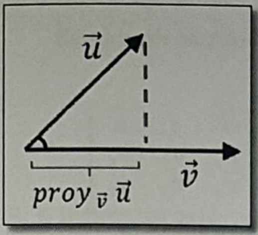
Calcula el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (1, -2,\ 3)$ y $\vec{v} = (2, -1,\ 1)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = (1, -2,\ 3) \cdot (2, -1,\ 1) = 2 + 2 + 3 = \mathbf{7} \\ |\vec{u}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{\mathbf{14}} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{\mathbf{6}} \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{84}} \ \rightarrow\ \alpha = arco\ cos\ \frac{7}{\sqrt{84}} \rightarrow\ \boldsymbol{\alpha \simeq 40,20°}$$

2.4. Interpretación geométrica del producto escalar: Proyección

La proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$, es la sombra ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:



Se calcula de la siguiente forma: $\boxed{\boldsymbol{proy_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}}}$

Dados los vectores $\vec{u} = (-1,\ 3,-2)$ y $\vec{v} = (3,\ 0,\ 4)$

a) Calcula la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$

b) Calcula la proyección del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$

$$a)\ proy_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1\,,3,-2)\cdot(3\,,0,4) = \mathbf{-11} \rightarrow |\vec{u}\cdot\vec{v}| = \mathbf{11}\\ |\vec{v}| = \sqrt{(3)^2+(0)^2+(4)^2} = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = \mathbf{5}\end{cases}$$

$$proy_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{5}}$$

$$b)\ proy_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|}\begin{cases}|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \mathbf{11}\\ |\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2+(3)^2+(-2)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{\mathbf{14}}\end{cases}$$

$$proy_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \frac{\mathbf{11}}{\sqrt{\mathbf{14}}}$$

3. Producto vectorial ($\vec{u} \times \vec{v}$)

3.1. Introducción y cálculo del producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores, como bien indica la palabra vectorial, es siempre un <u>**vector**</u>. **¡¡OJO con la notación!! Se denota con un × (también con ∧).**

Su cálculo se realiza resolviendo el siguiente determinante: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$

Calcula el producto vectorial de los siguientes pares de vectores:

$a)\ \vec{u} = (1,\ 2,\ 0)$ y $\vec{v} = (-1,\ 3,\ 1)$ $\quad b)\ \vec{u} = (2, -1,\ 3)$ y $\vec{v} = (0,\ 1,\ 0)$

$$\boldsymbol{a)}\ \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \left(2\vec{i} + 3\vec{k} + 0\right) - \left(-2\vec{k} + 0 + \vec{j}\right) = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k} = (2, -1,\ 5)$$

$$\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = (2, -1,\ 5)}$$

$$\boldsymbol{b)}\ \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(0 + 2\vec{k} + 0\right) - \left(0 + 3\vec{i} + 0\right) = -3\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} = (-3,\ 0,\ 2)$$

$$\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \end{matrix}$$

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = (-3,\ 0,\ 2)}$$

3.2. Propiedades del producto vectorial

a) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

b) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores paralelos $\rightarrow$ $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

c) Propiedad anticonmutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

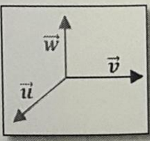
d) Propiedad asociativa: $k \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \times \vec{v}$

e) Propiedad distributiva: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

PROPIEDAD/APLICACIÓN MUY IMPORTANTE... ¡¡La utilizaremos mucho!!

f) El vector solución del producto vectorial de $\vec{u} \times \vec{v}$, es un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$

Es decir: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \rightarrow \begin{cases} \vec{w} \text{ es perpendicular a } \vec{u}\ (\vec{w} \perp \vec{u}) \\ \vec{w} \text{ es perpendicular a } \vec{v}\ (\vec{w} \perp \vec{v}) \end{cases}$



Calcula un vector perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1,\ 2, -3)$ y $\vec{v} = (-1,\ 0,\ 1)$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2\vec{\imath} + 0 + 3\vec{\jmath}) - (-2\vec{k} + 0 + \vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k} = (\mathbf{2},\ \mathbf{2}\ ,\ \mathbf{2})$$

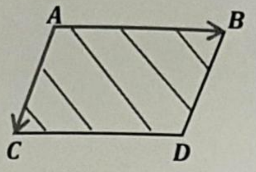
$$\begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \end{matrix}$$

$\boxed{\vec{w}(2,\ 2,\ 2)\ \text{será perpendicular a}\ \vec{u}\ \text{y a}\ \vec{v}}$

3.3. Interpretación geométrica del producto vectorial: Áreas

El producto vectorial de dos vectores nos ayuda a calcular el área de un paralelogramo o el área de un triángulo... ¡¡Vamos a verlo!!

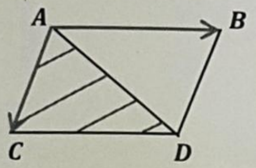
Área del paralelogramo: Es el módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$



Área del paralelogramo $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ unidades cuadradas (u^2)

Módulo

Área del triángulo: Es la mitad del módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$



Área del triángulo $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|/2$ unidades cuadradas (u^2)

Módulo

Calcula el área del triángulo definido por los puntos: $A(1,\ 3, -1)$; $B(2,\ 1,\ 1)$; $C(0,\ \ 1, -1)$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 1,\ 1) - (1,\ 3, -1) = (\mathbf{1}, -\mathbf{2},\ \mathbf{2})$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 1, -1) - (1,\ 3, -1) = (-\mathbf{1}, -\mathbf{2},\ \mathbf{0})$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 2\vec{k} - 2\vec{\jmath}) - (2\vec{k} - 4\vec{\imath} + 0) = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 4\vec{k} = (\mathbf{4}, -\mathbf{2}\ , -\mathbf{4})$$

$$\begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \end{matrix}$$

$$|\overrightarrow{\mathbf{AB}} \times \overrightarrow{\mathbf{AC}}| = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = \mathbf{6}$$

Área del triángulo $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|/2 = {}^{6}\!/_{2} = \mathbf{3\ u^2}$

4. Producto mixto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

4.1. Introducción y cálculo del producto mixto

El producto mixto de tres vectores es una **combinación entre producto escalar y producto vectorial, dando como resultado un <u>número</u>**. ¡¡OJO con la notación!!

Su cálculo se realiza resolviendo el siguiente determinante:

$$\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Calcula el producto mixto de:

$a)\ \vec{u}\,(1,\ 0,\ 1)\ ;\ \vec{v}\,(0,\ 1,-1)$ y $\vec{w}\,(0,\ 1,\ 3)$

b) $\vec{u}\,(1,\ 0,\ 0)\ ;\ \vec{v}\,(0,\ 1,\ 1)$ y $\vec{w}\,(2,\ 0,\ 2)$

$$a)\ [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (3+0+0)-(0-1+0) = \mathbf{4}$$
$$\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{matrix}$$

$$b)\ [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2+0+0)-(0+0+0) = \mathbf{2}$$
$$\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{matrix}$$

4.2. Propiedades del producto mixto

a) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$

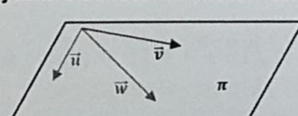
b) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = -[\vec{u},\vec{w},\vec{v}] = -[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]$

c) $[\vec{u}+\vec{t},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] + [\vec{t},\vec{v},\vec{w}]$

d) $k\cdot[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [k\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},k\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},k\vec{w}]$

PROPIEDAD/APLICACIÓN MUY IMPORTANTE... ¡¡La utilizaremos mucho!!

e) Si el producto mixto de tres vectores es cero ($[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$), dichos vectores serán <u>coplanarios</u> (están en el mismo plano). En esta situación, ya estudiaremos que dichos vectores <u>no</u> formarán un conjunto de vectores linealmente independientes.

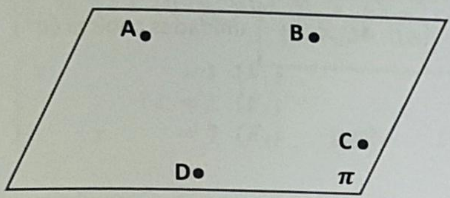


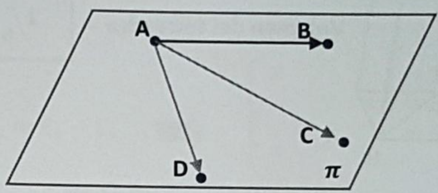
Calcula el valor de m para que los siguientes vectores sean coplanarios:
$\vec{u}\,(1,\ 1,\ 0)$; $\vec{v}\,(-2,-1,\ m)$ y $\vec{w}\,(m+1,\ 1,-1)$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & m \\ m+1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [1+0+m(m+1)] - (0+m+2) = \boldsymbol{m^2-1}$$
$$\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{m} \end{matrix}$$

Como queremos que los tres vectores pertenezcan al mismo plano: $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0 \ \rightarrow \ \boldsymbol{m^2 - 1 = 0} \rightarrow \ m = \sqrt{1} \rightarrow \boldsymbol{m = \pm 1}$

<u>**Puntos coplanarios**</u>: Diremos que cuatro puntos **A**, **B**, **C** y **D** son coplanarios, si pertenecen al mismo plano. Ello significará que los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ también pertenecen a dicho plano:





Deduce si los siguientes puntos son coplanarios:
$A\,(1,-2,\ 1)$; $B\,(-4,\ 0,\ 1)$; $C\,(-3,\ 1,\ 2)$ y $D\,(0,-3,\ 0)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4,\ 0,\ 1) - (1,-2,\ 1) = (\mathbf{-5},\ \mathbf{2},\ \mathbf{0})$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,\ 1,\ 2) - (1,-2,\ 1) = (\mathbf{-4},\ \mathbf{3},\ \mathbf{1})$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (0,-3,\ 0) - (1,-2,\ 1) = (\mathbf{-1},\mathbf{-1},\mathbf{-1})$

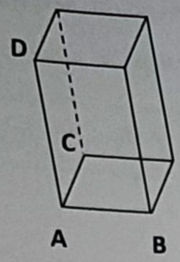
$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (15+0-2) - (0+5+8) = \mathbf{0}$$
$$\begin{matrix} \mathbf{-5} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{matrix}$$

Como $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = 0 \rightarrow$ A, B, C y D son coplanarios (pertenecen al mismo plano).

4.3. Interpretación geométrica del producto mixto: Volumen

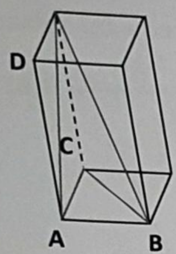
El producto mixto de tres vectores nos ayuda a calcular el volumen de un paralelepípedo o el volumen de un tetraedro... ¡¡Vamos a verlo!!

Volumen del paralelepípedo: Es el valor absoluto del producto mixto de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$



Volumen del paralelepípedo= $\boxed{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|}$ unidades cúbicas (u^3)

Volumen del tetraedro: Es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$



Volumen del tetraedro = $\boxed{{}^{1}\!/_{6} \cdot \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|}$ unidades cúbicas (u^3)

Calcula el volumen del tetraedro definido por los puntos:
$A\,(1,\ 0,\ 0)$; $B\,(2,\ 1,\ 3)$; $C\,(1,\ 1,\ 0)$ y $D\,(1,\ 1,\ 1)$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 1,\ 3) - (1,\ 0,\ 0) = (\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{3})$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1,\ 1,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = (\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0})$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (1,\ 1,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = (\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})$$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+0+0) - (0+0+0) = \mathbf{1}$$

$$\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{matrix}$$

Volumen del tetraedro = ${}^{1}\!/_{6} \cdot \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = {}^{1}\!/_{6} \cdot |\mathbf{1}| = {}^{1}\!/_{6}\, u^3$

5. Dependencia e independencia lineal

5.1. Combinación lineal de vectores

Definimos un vector $\vec{v}$ como una <u>**combinación lineal**</u> **del conjunto de vectores** $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n\}$ si el sistema $x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + \dots + z \cdot \vec{u}_n = \vec{v}$ <u>**tiene solución**</u>.

Dado el vector $\vec{v}\,(1,\ 2,\ 0)$, razona si es posible expresar el vector $\vec{v}$ como combinación lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

$a)\ \vec{u}_1\,(1,\ 0,\ 1)\ ;\ \vec{u}_2\,(0,\ 1,\ 1)\ ;\ \vec{u}_3\,(0,\ 1,\ 0)$

$b)\ \vec{u}_1\,(1,\ 0,\ 1)\ ;\ \vec{u}_2\,(1,\ 1,\ 0)\ ;\ \vec{u}_3\,(0,-1,\ 1)$

a) Planteamos el sistema y resolvemos a través de Gauss:

$$x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + z \cdot \vec{u}_3 = \vec{v}$$

$$x \cdot (1,\ 0,\ 1) + y \cdot (0,\ 1,\ 1) + z \cdot (0,\ 1,\ 0) = (1,\ 2,\ 0)$$

$$(x,\ 0,\ x) + (0,\ y,\ y) + (0,\ z,\ 0) = (1,\ 2,\ 0)$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & & & = 1 & (E_1) \\ & y & +z & = 2 & (E_2) \\ x & +y & & = 0 & (E_3) \end{array}\right. \Rightarrow E_3' = E_3 - E_1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & & & = 1 \\ & y & +z & = 2 \\ & y & & = -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{x = 1} \\ y + z = 2 \rightarrow -1 + z = 2 \rightarrow \boxed{z = 3} \\ \boxed{y = -1} \end{array}\right.$$

El vector $\vec{v}$ <u>sí</u> se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$:

$$\vec{v} = 1 \cdot \vec{u}_1 - 1 \cdot \vec{u}_2 + 3 \cdot \vec{u}_3$$

b) Planteamos el sistema y resolvemos a través de Gauss:

$$x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + z \cdot \vec{u}_3 = \vec{v}$$

$$x \cdot (1,\ 0,\ 1) + y \cdot (1,\ 1,\ 0) + z \cdot (0,-1,\ 1) = (1,\ 2,\ 0)$$

$$(x,\ 0,\ x) + (y,\ y,\ 0) + (0,-z,\ z) = (1,\ 2,\ 0)$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & & = 1 & (E_1) \\ & y & -z & = 2 & (E_2) \\ x & & +z & = 0 & (E_3) \end{array}\right. \Rightarrow E_3' = E_3 - E_1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{lllll} x & +y & & = 1 & (E_1) \\ & y & -z & = 2 & (E_2) \\ & -y & +z & = -1 & (E_3') \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & & = 1 & (E_1) \\ & y & -z & = 2 & (E_2) \\ & -y & +z & = -1 & (E_3') \end{array}\right. \Rightarrow E_3'' = E_3' + E_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & +y & & = 1 \\ & y & -z & = 2 \\ & & 0 & = 1 \end{array}\right.$$

El sistema es <u>incompatible</u> $(1 \neq 0)$ por lo que no tiene solución. Por lo tanto:
El vector $\vec{v}$ <u>no</u> se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$

5.2. Vectores linealmente independientes y dependientes

Definimos un <u>conjunto de vectores linealmente independientes</u> a aquel en el que todos los vectores son independientes entre sí, es decir, ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de otro vector de dicho conjunto. <u>Pero</u> si alguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de otro (dependiente), no formarán dicho conjunto.

Al formar una matriz A con un conjunto de vectores, el rango de la matriz A coincidirá con el número de vectores linealmente independientes y así podremos determinar si dicho conjunto es linealmente independiente o no (Repasad las propiedades de los determinantes).

Comprueba si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o no:

$a)\ \vec{u}\,(1,\ 0,\ 1)\ ;\ \vec{v}\,(0,\ 1,\ 1)$ y $\vec{w}\,(0,\ 2,\ 1)$ $\quad$ b) $\vec{u}\,(1,\ 1\ \ 0)\ ;\ \vec{v}\,(0,\ 1,\ 0)$ y $\vec{w}\,(1,\ 1,\ 0)$

a) Formamos la matriz A con el conjunto de vectores y estudiamos su rango:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1+0+0) - (0+2+0) = -1 \neq \mathbf{0}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$\boldsymbol{Rg(A) = 3}$

Los tres vectores son linealmente independientes. **Forman un <u>conjunto</u> de vectores linealmente independientes**

b) Formamos la matriz A con el conjunto de vectores y estudiamos su rango:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (0+0+0) = \mathbf{0}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Nos podríamos haber ahorrado calcular el $|A|$ si recordamos las propiedades de los determinantes: **Si un determinante tiene una línea de ceros, el determinante vale 0**

$|A| = 0 \rightarrow \boldsymbol{Rg(A) < 3}$. **Buscamos en la matriz A un determinante 2x2 distinto de cero:**

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

$\boldsymbol{Rg(A) = 2}$. **Como solo hay dos vectores linealmente independientes <u>no</u> forman un <u>conjunto</u> linealmente independiente.**

5.3. Base de R^3

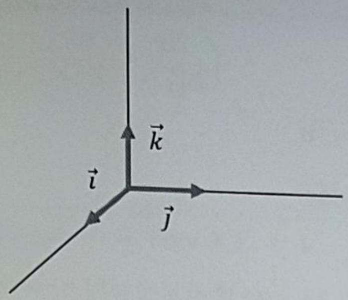
Definimos <u>base</u> como el conjunto de vectores que genera un espacio o subespacio vectorial.
A nosotros nos interesa la base de $\boldsymbol{R^3}$ ya que vamos a trabajar mucho con ella.
Para que un conjunto de vectores formen base en R^3 tienen que cumplir dos condiciones:

1) Tienen que ser tres vectores

2) Los tres vectores tienen que ser linealmente independientes

5.4. Base canónica

La base canónica en R^3 está formada por los **vectores:** $\vec{\imath}\,(1,\ 0,\ 0)$; $\vec{\jmath}\,(0,\ 1,\ 0)$; $\vec{k}\,(0,\ 0,\ 1)$ **cuyos módulos son la unidad (unitarios) y además son perpendiculares entre sí.**
Como son módulos unitarios y perpendiculares entre sí, diremos que es una **base ortonormal.**



6. "REMIX" DE EJERCICIOS DEL TEMA:

VECTORES EN EL ESPACIO

1. Sean los vectores $\vec{u}(2,-3,\ 5)$ y $\vec{v}(6,-1,\ 0)$, halla:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

c) El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$

d) La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

e) m para que $\vec{w}=(m,\ 2,\ 3)$ sea ortogonal a $\vec{u}$

a)

$$|\vec{u}|=\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(5)^2}=\sqrt{4+9+25}=\boldsymbol{\sqrt{38}}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{(6)^2+(-1)^2+(0)^2}=\sqrt{36+1+0}=\boldsymbol{\sqrt{37}}$$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2,-3,\ 5)\cdot(6,-1,\ 0)=12+3+0=\mathbf{15}$

c) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\ \cdot\ \vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{\mathbf{15}}{\sqrt{\mathbf{38}}\cdot\sqrt{\mathbf{37}}}\quad\rightarrow\quad \alpha=arco\ cos\left(\dfrac{15}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{37}}\right)\quad\rightarrow\quad \boldsymbol{\alpha\simeq 66,42°}$

d) $proy_{\vec{v}}\,\vec{u}=\dfrac{|\vec{u}\ \cdot\ \vec{v}|}{|\vec{v}|}=\dfrac{|15|}{\sqrt{37}}=\dfrac{15}{\sqrt{37}}\underset{\uparrow}{=}\dfrac{15\cdot\sqrt{37}}{37}\simeq \mathbf{2,46}$

Racionalizamos

e) Dos vectores son perpendiculares (u ortogonales) si su producto escalar es cero: $\vec{w}\cdot\vec{u}=0$

$\vec{w}\cdot\vec{u}=(m,\ 2,\ 3)\cdot(2,-3,\ 5)=2m-6+15=\mathbf{2m+9=0}\quad\rightarrow\quad m=\dfrac{\mathbf{-9}}{\mathbf{2}}$

2. Sean los vectores $\vec{u}(2,-3,\ 5)$ y $\vec{v}(6,-1,\ 0)$, halla:

a) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) Un vector unitario y ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$a)\ \vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 5\\ 6 & -1 & 0\end{vmatrix}=\left(0-2\vec{k}+30\vec{\jmath}\right)-\left(-18\vec{k}-5\vec{\imath}+0\right)=5\vec{\imath}+30\vec{\jmath}+16\vec{k}$$

$$\begin{matrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 5\end{matrix}$$

$$\boxed{\vec{w}=(5,\ 30,\ 16)}$$

b) El vector solución del producto vectorial de $\vec{u}\times\vec{v}$, al que hemos llamado $\vec{w}$, es un vector perpendicular (u ortogonal) a ellos. Ahora tenemos que transformarlo en unitario dividiendo los componentes entre su módulo:

$$|\vec{w}|=\sqrt{(5)^2+(30)^2+(16)^2}=\sqrt{25+900+256}=\sqrt{\mathbf{1181}}$$

$$\vec{w}_u=\left(\frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{1181}}},\frac{\mathbf{30}}{\sqrt{\mathbf{1181}}},\frac{\mathbf{16}}{\sqrt{\mathbf{1181}}}\right)$$

3. Sea el triángulo de vértices $A(1,\ 0,\ 1)$; $B(0,\ 1,\ 0)$; $C(0,\ 1,\ 2)$:

a) Deduce si es un triángulo rectángulo en A

b) Calcula el área del triángulo

a) Para que fuera un triángulo rectángulo en A, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deberían ser perpendiculares y por tanto su producto escalar igual cero: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ 1,\ 0)-(1,\ 0,\ 1)=(-\mathbf{1},\ \mathbf{1},-\mathbf{1})$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(0,\ 1,\ 2)-(1,\ 0,\ 1)=(-\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1,\ 1,-1)\cdot(-1,\ 1,\ 1)=1+1-1=1\neq\mathbf{0}$$

$\boxed{\text{No es triángulo rectángulo en } A}$

b) Área del triángulo = $\boxed{\dfrac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\left(\vec{\imath}-\vec{k}+\vec{\jmath}\right)-\left(-\vec{k}-\vec{\imath}-\vec{\jmath}\right)=2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+0\vec{k}=(\mathbf{2},\ \mathbf{2},\ \mathbf{0})$$

$$\begin{matrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -1 & 1 & -1\end{matrix}$$

Área del triángulo = $$\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}=\frac{\sqrt{(2)^2+(2)^2+(0)^2}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\simeq\mathbf{1{,}41}\ \boldsymbol{u^2}$$

4. Sean los puntos $A(1,-1,\ 3)$; $B(1,\ 2,\ 1)$; $C(1,\ 0,-1)$; $D(1,-3,\ 1)$:

a) Deduce si los 4 puntos son coplanarios.

b) Demuestra que son los 4 vértices correspondientes a un paralelogramo $ABCD$

c) Calcula el área del paralelogramo.

a) Cuatro puntos son coplanarios si el producto mixto es cero: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 2,\ 1) - (1,-1,\ 3) = (0,\ 3,-2)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (1,\ 0,-1) - (1,-1,\ 3) = (0,\ 1,-4)$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (1,-3,\ 1) - (1,-1,\ 3) = (0,-2,-2)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$ **(Ya que tiene una columna entera llena de 0)**

Los cuatro puntos son coplanarios

b) Para que el polígono $ABCD$ sea un paralelogramo se tienen que cumplir las igualdades:

$\boxed{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}}$ y $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (0,-2,-2) \\ \overrightarrow{BC} = C - B = (1,\ 0,-1) - (1,\ 2,\ 1) = (0,-2,-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0,\ 3,-2) \\ \overrightarrow{DC} = C - D = (1,\ 0,-1) - (1,-3,\ 1) = (0,\ 3,-2) \end{cases}$$

Puesto que se cumplen las igualdades, $ABCD$ es un paralelogramo

c) Área del paralelogramo: $\boxed{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-12\vec{\imath} + 0 + 0) - (0 - 2\vec{\imath} + 0) = -10\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = (-10,\ 0\ ,\ 0)$$

$$\begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -2 \end{matrix}$$

Área del paralelogramo $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-10)^2 + (0)^2 + (0)^2} = \sqrt{100} = \boxed{10u^2}$

5. Considera los vectores $\vec{u} = (1,\ 0,\ 1)$; $\vec{v} = (0,\ 2,\ 1)$; $\vec{w} = (m,\ 1,\ n)$:

a) Halla m y n sabiendo que $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$

b) Para $n = 1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas

a) 1. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son linealmente dependientes, significa que el rango de la matriz A formada por estos tres vectores es menor que 3. Por lo tanto $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = (2n + 0 + 0) - (2m + 1 + 0) = \mathbf{2n - 2m - 1 = 0}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Ya tenemos una ecuación con dos incógnitas ¡¡Vamos a buscar otra!!

2. Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ significa que su producto escalar es cero: $\vec{\boldsymbol{w}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (m,\ 1,\ n) \cdot (1,\ 0,\ 1) = m + 0 + n = \boldsymbol{m + n = 0}$$

Ya podemos establecer el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{2n - 2m - 1 = 0} \ \rightarrow\ 2 \cdot (-\boldsymbol{m}) - 2m - 1 = 0 \ \rightarrow\ -4m = 1 \ \rightarrow\ \boldsymbol{m = {}^{-1}/_4} \\ \boldsymbol{n + m = 0} \ \rightarrow\ \boldsymbol{n = -m} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{n = -m} = -\left(\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{4}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \qquad \boxed{\boldsymbol{m = {}^{-1}/_4} \qquad \boldsymbol{n = {}^{1}/_4}}$$

b) Para $\boldsymbol{n = 1} \rightarrow$ $\vec{u} = (1,\ 0,\ 1)$; $\vec{v} = (0,\ 2,\ 1)$; $\vec{w} = (m,\ 1,\ \mathbf{1})$

Volumen del tetraedro = $\boxed{{}^{1}/_{6} \cdot |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|} = \mathbf{10}\ \boldsymbol{u^3}$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & \mathbf{1} \end{vmatrix} = (2 + 0 + 0) - (2m + 1 + 0) = \mathbf{2 - 2m - 1 = -2m + 1}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Volumen del tetraedro = ${}^{1}/_{6} \cdot |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} \cdot |\mathbf{-2}\boldsymbol{m} + \mathbf{1}| = \mathbf{10} \rightarrow |\mathbf{-2}\boldsymbol{m} + \mathbf{1}| = \mathbf{60}$

¡Recuerda! Las ecuaciones con valor absoluto se resuelven **igualando al <u>positivo</u> y al <u>negativo</u>:**

$$|-2m + 1| = 60 \quad \begin{cases} -2m + 1 = 60 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m} = \dfrac{\mathbf{-59}}{\mathbf{2}} \\ -2m + 1 = -60 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m} = \dfrac{\mathbf{61}}{\mathbf{2}} \end{cases}$$