TEMA 2
MATRICES

¿Qué vamos a estudiar en este tema?

1. Matrices. Introducción y conceptos previos

- ¿Qué es una matriz?
- Dimensiones de una matriz
- Elementos de una matriz
- Diagonal principal de una matriz
- Matriz traspuesta (A^t)
- Tipos de matrices

2. Operaciones con matrices

- Suma y resta de matrices
- Producto de un número por una matriz
- Sistemas de ecuaciones matriciales
- Producto de matrices
- Potencia de matrices
- Matrices cíclicas
- Potencia de matrices por recurrencia
- Matrices conmutables

3. Rango (rg) de una matriz mediante el método de Gauss

4. Matriz inversa (A^{-1}) mediante el método de Gauss

1. Matrices. Introducción y conceptos previos

- *¿Qué es una matriz?*

Una matriz es un conjunto de números y/o letras distribuidos en filas y columnas.

Podríamos asemejarlo a una "estantería" donde tenemos ordenados los números.

- *Dimensiones de una matriz:*

Las Filas son las líneas horizontales $\longrightarrow$

Las Columnas son las líneas verticales $\downarrow$

Las **dimensiones** de una matriz se indican como Filas**x**Columnas (Truco: FerroCarril):

$$A_{\boxed{2x3}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B_{\boxed{3x2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(**2** filas y **3** columnas) (**3** filas y **2** columnas)

De esta forma, podemos deducir fácilmente las dimensiones de las siguientes matrices:

$$A_{\boxed{3x3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_{\boxed{1x3}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C_{\boxed{3x1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad D_{\boxed{2x4}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- *Elementos de una matriz:*

Son los números que componen la matriz. Su notación es $\boldsymbol{a_{ij}}$ siendo $\boldsymbol{i} \rightarrow$ **Fila** y $\boldsymbol{j} \rightarrow$ **Columna**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

De esta forma, podemos calcular fácilmente los elementos de una matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{13} = 3$
$a_{22} = 0$
$a_{31} = 2$
$a_{42} =$ **No tiene**

- *Diagonal principal de una matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

- *Matriz traspuesta (A^t):*

La matriz traspuesta de la matriz A, es el resultado de cambiar las filas por las columnas:

$$A_{\boxed{2x3}} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 2} \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 3} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t_{\boxed{3x2}} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Calcula las matrices traspuestas de las siguientes matrices, indicando sus dimensiones:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \; D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t{}_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^t{}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_{1x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^t{}_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$D_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow D^t{}_{1x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow E^t{}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Tipos de matrices:*

Matriz fila: Matriz compuesta por una única fila.

$$A_{1x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz columna: Matriz compuesta por una única columna.

$$A_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada: Matriz compuesta por el mismo número de filas que de columnas.

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz nula: Matriz compuesta por ceros en su totalidad.

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz <u>identidad</u> (I): Matriz <u>cuadrada</u> compuesta por **<u>ceros excepto en su diagonal principal</u>**, que está compuesta por **<u>unos</u>**. De esta manera, pueden tener distinto orden:

$$I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{4x4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Este tipo de matriz es muy importante. Se podría decir que la **<u>matriz identidad es como el</u>** **<u>número 1</u>** de las matrices por sus propiedades:

*** Producto:** $\boldsymbol{I \cdot A = A} \qquad \boldsymbol{A \cdot I = A}$

*** Potencia:** $\boldsymbol{I^2 = I} \qquad \boldsymbol{I^3 = I}$

*** Cualquier matriz cuadrada (excepto la matriz nula) elevada a cero es I:** $\boldsymbol{A^0 = I}$

Matriz simétrica: Matriz cuadrada que presenta simetría respecto a la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Fíjate que para este tipo de matriz $A = A^t$

Matriz antisimétrica: Matriz cuadrada cuya diagonal principal es nula y presenta simetría a ambos lados de dicha diagonal pero con los elementos cambiados de signo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Operaciones con matrices

- Suma y resta de matrices:

Es importante saber que para sumar y restar matrices, éstas deber tener las **mismas dimensiones**. Hacerlo es muy intuitivo ¡¡Veamos algún ejemplo!!:

Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Calcula $A + B$ y $A - B$:

$$\boldsymbol{A+B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2+1 & 3+0 \\ 0+3 & 1+0 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A-B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2-1 & 3-0 \\ 0-3 & 1-0 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

- Producto de un número por una matriz:

El número multiplica a todos los elementos de la matriz. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{2A} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 5 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{10} \\ \mathbf{8} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

Para las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ Calcula $2A + 3B$ y $-3A + 4B$

$$\boldsymbol{2A+3B} = 2\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{11} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{-3A+4B} = -3\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{9} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

- Sistemas de ecuaciones matriciales:

Los sistemas de ecuaciones matriciales se resuelven igual que los sistemas de ecuaciones, es decir, por reducción, sustitución o igualación. Vamos a recomendar el método de reducción:

¡¡Fíjate en la notación!! Las mayúsculas indican matrices y las minúsculas, números. Por lo que si buscamos "X", la solución será una matriz y si buscamos "x", la solución será un número.

Resuelve el siguiente sistema matricial $\begin{cases} 2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ A - 2B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ A - 2B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot (-2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ -2A + 4B = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$0 + 7B = \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ 21 & -7 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{14}{7} & \frac{-7}{7} & \frac{0}{7} \\ \frac{21}{7} & \frac{-7}{7} & \frac{14}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$A - 2B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

- Producto de matrices

Es importante saber que para multiplicar matrices **es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz**. Las dimensiones de la matriz resultante serán las filas de la primera matriz x las columnas de la segunda matriz.

$$A_{m\,x\,n} \cdot B_{n\,x\,p} = S_{m\,x\,p}$$

Se puede multiplicar

Calcular el producto de dos matrices no es complicado pero sí un poco lioso ya que **tenemos que multiplicar cada fila de la primera matriz por cada columna de la segunda y sumar su resultado**. ¡Vamos a practicar un poco!

Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ Calcula AB

Comprobamos que se pueden multiplicar ya que: $A_{2\,x\,2} \cdot B_{2\,x\,3}$ y la dimensión resultante: $2x3$

Multiplicamos cada fila de la primera matriz **por** cada columna de la segunda matriz:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{3} & \mathbf{13} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

¡¡OJO!! **En el producto de matrices no se cumple la propiedad conmutativa**, es decir, no es lo mismo $A \cdot B$ que $B \cdot A$. De hecho, $B \cdot A$ ni siquiera podría multiplicarse ya que: $B_{2\,x\,3} \cdot A_{2\,x\,2}$

- *Potencia de matrices*

La potencia de una matriz se calcula **multiplicando**:

$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A \quad \text{ó} \quad A^3 = A^2 \cdot A$$

Vamos a destacar **dos propiedades** importantes de la potencia de matrices:

1. Para que una matriz tenga potencia, tiene que ser cuadrada.
2. Cualquier matriz cuadrada (excepto la matriz nula) elevada a cero es I: $\boldsymbol{A^0 = I}$

* *Recuerda también que* $\boldsymbol{I^n = I}$. *Es decir:* $I^2 = I \quad ; \quad I^3 = I; \quad I^4 = I \ldots$

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Calcula $A^2 \; y \; A^3$

$$\boldsymbol{A^2 = A \cdot A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2+0 \\ -1+0 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^3 = A^2 \cdot A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & -2+0 \\ -1+2 & -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Calcula A^2

$$\boldsymbol{A^2 = A \cdot A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+0 & 2+0+0 & 0+2+0 \\ 1+0+0 & 2+0+1 & 0+0+3 \\ 0+1+0 & 0+0+3 & 0+1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

- *Matrices cíclicas*

Una matriz es cíclica si $\boldsymbol{A^n = I}$, siendo $\boldsymbol{n}$ **el periodo**.

Si una matriz es cíclica, podemos calcular cualquier potencia de A que nos pidan. Solo tenemos que **dividir la potencia entre el periodo y quedarnos con el resto**. ¡¡Vamos a ver un ejemplo!!:

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ Calcula $A^{19},\ A^{20}\ y\ A^{21}$

Comprobamos si es una matriz cíclica y su periodo:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2+0 & 2-4+2) & 2-2+2 \\ -1+2+0 & -2+4-1) & -2+2-1 \\ 0-1+0 & 0-2+1) & 0-1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0+0 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -1+1+0 & -2+2+1 & -2+1+1 \\ 1-1+0 & 2-2+0 & 2-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$$

Puesto que $\boldsymbol{A^3 = I}$, podemos afirmar que $\boldsymbol{A}$ **es una matriz cíclica** y su **periodo** $\boldsymbol{n = 3}$

Por lo tanto, para calcular cualquier potencia, solo tenemos que dividir la potencia entre el periodo (3) y quedarnos con el resto:

$\boldsymbol{A^{19}}$ ➡

19	3	← Periodo
18	6	
1 ← **Resto**		

$$\boldsymbol{A^{19} = A^1 = A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A^{20}}$ ➡

20	3	← Periodo
18	6	
2 ← **Resto**		

$$\boldsymbol{A^{20} = A^2} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A^{21}}$ ➡

21	3	← Periodo
21	7	
0 ← **Resto**		

$$\boldsymbol{A^{21} = A^0 = I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- *Potencia de matrices por recurrencia*

Calculamos las potencias sucesivas hasta encontrar una nueva ley. ¡¡Veamos un ejemplo!!:

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calcula A^n

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 0+0+0 & 1+0+1 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 1+0+1 & 0+0+0 & 1+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{2^1}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+2 & 0+0+0 & 2+0+2 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 2+0+2 & 0+0+0 & 2+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{2^2}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0+4 & 0+0+0 & 4+0+4 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 4+0+4 & 0+0+0 & 4+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{2^3}$$

Luego podemos concluir que: $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \mathbf{2^{n-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{2^{n-1}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2^{n-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{2^{n-1}} \end{pmatrix}}$

- *Matrices conmutables*

Como vimos anteriormente, el producto de dos matrices no es conmutativo. Sin embargo, hay ciertas matrices que sí cumplen esta propiedad ... ¡¡Las matrices conmutables!!

Decimos que dos matrices son conmutables si: $\boldsymbol{A \cdot B = B \cdot A}$

Veamos un ejercicio clásico para entenderlo:

Halla todas las matrices X conmutables con A (Es decir: $X \cdot A = A \cdot X$)

Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para que dos matrices **sean conmutables tienen que tener la <u>misma dimensión</u> y ser <u>cuadradas</u>**. Por tanto la matriz solución tiene que tener, para este caso, una **<u>dimensión 2x2</u>**.

La dificultad de estos ejercicios radica en que suelen tener infinitas soluciones, por lo que vamos a tener que resolver un sistema compatible <u>indeterminado</u>. ¡¡Vamos a ello!!

La matriz X será: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & a+b \\ c+0 & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a+b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c+d} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0+c & 0+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a+c} & \boldsymbol{b+d} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A = A \cdot X \rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a+b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c+d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a+c} & \boldsymbol{b+d} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = a + c \\ a + b = b + d \\ c = c \\ c + d = d \end{cases}$$

Ordenamos las ecuaciones

$$\begin{cases} (E_1) \quad a = a + c \rightarrow c + a - a = 0 \rightarrow \boldsymbol{c = 0} \\ (E_2) \quad a + b = b + d \rightarrow a = d + b - b \rightarrow \boldsymbol{a = d} \\ (E_3) \quad c = c \rightarrow \boldsymbol{0 = 0} \\ (E_4) \quad c + d = d \rightarrow c = d - d \rightarrow \boldsymbol{0 = 0} \end{cases}$$

Luego tenemos:

$$\begin{cases} \boldsymbol{(E_1)\ c = 0} \\ \boldsymbol{(E_2)\ a = d} \\ \boldsymbol{(E_3)\ 0 = 0} \\ \boldsymbol{(E_4)\ 0 = 0} \end{cases}$$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

Número de parámetros = Número de incógnitas − Número de ecuaciones útiles

Puesto que tenemos cuatro incógnitas (a, b, c, d) y dos ecuaciones útiles (E_1 y E_2):

Número de parámetros $= 4 - 2 = \boldsymbol{2}$

¡¡Truco!! Si alguna incógnita desaparece en las ecuaciones válidas, tiene que ser un parámetro.

Asignamos una letra a cada parámetro (λ, μ por ejemplo) y afirmando que $\boldsymbol{d = \lambda}$ y que $\boldsymbol{b = \mu}$, resolvemos el resto de incógnitas:

$$\begin{cases} \boldsymbol{d = \lambda} \\ \boldsymbol{b = \mu} \\ (E_1)\ \boldsymbol{c = 0} \\ (E_2)\ a = d \rightarrow \boldsymbol{a = \lambda} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}}$$

3. Rango (rg) de una matriz mediante el método de Gauss

- ¿Qué es el rango (rg) de una matriz?

El rango de una matriz es el número máximo de filas o columnas linealmente independientes

Propiedad: El número de filas linealmente independientes es igual al número de columnas linealmente independientes. Por lo tanto, $rg(A) = rg(A^t)$.

Vamos a lo importante....¡¡Aprender a calcularlo!!

- ¿Cómo se calcula el rango de una matriz?: Método de Gauss

En el tema siguiente ("Determinantes"), estudiaremos otro método igualmente válido al que vamos a proponer a continuación para calcular el rango de una matriz. Ahora mismo vamos a aprender a calcularlo mediante el **método de Gauss** siguiendo los siguientes pasos:

Paso 1. Hacemos ceros debajo de la diagonal principal (tal y como hacíamos en el tema de sistemas de ecuaciones). ¡¡Consejo!! Sigue el orden marcado. ¡¡No cojas atajos!!

Paso 2. El número de filas no nulas es el rango de la matriz. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{rg(A) = 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{rg(B) = 2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{rg(C) = 1} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{rg(D) = 2}$$

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 - F_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F_3'' = 3F_3' - 2F_2' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{rg(A) = 3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} F'_2 = 2F_2 - F_1 \\ F'_3 = 2F_3 - F_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow F''_3 = F'_3 + F'_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{rg(B) = 2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} F'_2 = F_2 + F_1 \\ F'_3 = F_3 - 2F_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{rg(C) = 1}$$

2. **Calcula el rango de las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F'_3 = F_3 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow F''_3 = F'_3 + 2F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{rg(A) = 3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow F'_3 = F_3 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} F''_3 = F'_3 - F_2 \\ F'_4 = F_4 - 2F_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{rg(B) = 2}$$

4. Matriz inversa (A^{-1}) mediante el método de Gauss

Empezaremos destacando que **no todas las matrices tienen inversa.**

Condiciones para que una matriz A tenga inversa (A^{-1}):

1. A tiene que ser cuadrada de orden n

2. El rango de A tiene que ser igual a n

Ejemplo: Si A es una matriz 2x2, el $rg(A)$ tiene que ser 2

Si una matriz A tiene inversa, diremos que A es **invertible o regular.**

Si una matriz A no tiene inversa, diremos que A es **no invertible o singular.**

Propiedades de la matriz inversa:

* Si una matriz tiene inversa, esta es única.

* $(A^{-1})^{-1} = A$

* $(A \cdot B)^{-1} = (B)^{-1} \cdot (A)^{-1}$

¡¡Importante!! El producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad. Es decir:

$$A^{-1} \cdot A = I \qquad\qquad A \cdot A^{-1} = I$$

- *¿Cómo se calcula la* **matriz inversa***?:* ***Método de Gauss-Jordan***

En el tema siguiente ("Determinantes"), estudiaremos otro método igualmente válido (**y más sencillo**) al que vamos a proponer a continuación para calcular la matriz inversa. Ahora mismo vamos a aprender a calcularlo mediante el **método de Gauss** siguiendo los siguientes pasos. ¡¡OJO!! Es un proceso sistemático pero puede resultar algo lioso, por lo que aconsejamos seguir el orden marcado y... ¡¡No coger atajos!!:

- **Paso 1.** "Pegamos" a continuación de nuestra matriz, la matriz identidad (I).

- **Paso 2.** Hacemos ceros en nuestra matriz por debajo y por encima de la diagonal principal (realizaremos las mismas operaciones en la matriz I).

- **Paso 3.** Dividimos las filas por el número de la diagonal principal para terminar de transformar la matriz A en la matriz I.

- **Paso 4.** Una vez transformada la matriz A en la matriz I, la antigua matriz I queda transformada en la matriz A^{-1}.

¡¡Vamos a ver este proceso con algunos ejemplos!!

1. Calcula la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Paso 1.** "Pegamos" a continuación de nuestra matriz, la matriz identidad (I):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- **Paso 2.** Hacemos ceros en nuestra matriz por debajo y por encima de la diagonal principal (realizaremos las mismas operaciones en la matriz I):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow F_2' = F_2 - F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow F_1' = 2F_1 - F_2' \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

- **Paso 3.** Dividimos las filas por el número de la diagonal principal para terminar de transformar la matriz A en la matriz I:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} F_1'/2 \\ F_2'/2 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

- **Paso 4.** Una vez transformada la matriz A en la matriz I, la antigua matriz I queda transformada en la matriz A^{-1}:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Paso 1:** $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$

- **Paso 2:** $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow F_2' = F_2 - 2F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0} & & -2 & 1 \end{array}\right)$

¡¡Importante!! **Como nos ha dado todo ceros, significa que $rg(B) < n \rightarrow$ <u>No existe</u> B^{-1}**

2. Calcula la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Paso 1: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

- Paso 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow F_3' = F_3 - F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow F_2' = F_2 + F_3' \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow F_1' = F_1 + F_3' \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Paso 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} F_1'/1 \\ F_2'/1 \\ F_3'/-1 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

- Paso 4: $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}}$

3. Calcula la inversa de la matriz de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Paso 1: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

- Paso 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 + F_1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow F_3'' = F_3' + F_2' \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

¡¡Importante!! **Como nos ha dado todo ceros, significa que $rg(A) < n \rightarrow$ <u>No existe</u> A^{-1}**