NAVARRA 2021 ORD (Ej. 7 del Boletín) ①

Dada $f(x) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{5x-2-x\,\mathrm{sen}\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}\right)$ Demostrar

que $\exists\ \alpha \in (1,3)$ t.q. $f'(\alpha) = \frac{3}{2}\mathrm{Ln}\,2$

Enunciar el resultado teórico utilizado y hacer inter. geométrica

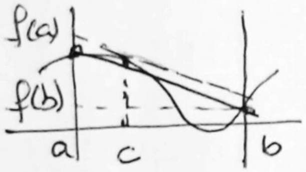
—— o ——

Sol

Para este ejercicio el th. más indicado parece el de Lagrange o T.V.M. Cál. Diferencial, que dice

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [a,b] \\ f \text{ deriv } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ \alpha \in (a,b)\ /\ f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Int. geométrica f cont $[a,b]$. f deriv (a,b) $\Rightarrow \exists$ un pto intermedio en (a,b) t.q. la pendiente de la recta tangente a la curva en ese pto. sea la misma que la de la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$



i.e. la tangente a la gráfica en ese pto es paralela a la cuerda que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

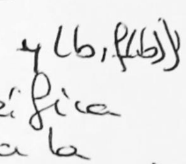
—— o ——

En nuestro caso $f(x) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{g(x)}{h(x)}\right)$ con $\begin{cases} g(x) = 5x-2-x\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}x \\ h(x) = x^2-4x+6 \end{cases}$

$[a,b] = [1,3]$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{15-2-3\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}}{9-12+6}\right) - \mathrm{Ln}\left(\frac{5-2-\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}}{1-4+6}\right)}{2}$$

$$= \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{13-3(-1)}{3}\right) - \mathrm{Ln}\left(\frac{3-1}{3}\right)}{2} = \frac{\mathrm{Ln}\frac{16}{3} - \mathrm{Ln}\frac{2}{3}}{2} =$$



$$= \frac{\mathrm{Ln}\,16 - \cancel{\mathrm{Ln}\,3} - \mathrm{Ln}\,2 + \cancel{\mathrm{Ln}\,3}}{2} = \frac{\mathrm{Ln}\,16 - \mathrm{Ln}\,2}{2} =$$

$$= \frac{\mathrm{Ln}\,2^4 - \mathrm{Ln}\,2}{2} = \frac{4\,\mathrm{Ln}\,2 - \mathrm{Ln}\,2}{2} = \boxed{\frac{3\,\mathrm{Ln}\,2}{2}}\ \text{Sol}$$

Falta comprobar que se cumplen las hipótesis del th. de Lagrange. i.e. ②

t.q.d. f cont $[1,3]$ y f deriv en $(1,3)$

Continuidad

f composición, suma, producto y COCIENTE de func. elementales $\Rightarrow$ continua en su DOMINIO i.e. donde esté bien definida, por tener el logaritmo neperiano y un cociente tiene que ocurrir que el denominador sea $\neq 0$ en el int. $[1,3]$ i.e. $x^2-4x+6 \neq 0$ $\forall x \in [1,3]$

Resolvemos $x^2-4x+6=0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} \notin \mathbb{R}$ No corta al eje X en ningún pto. además como x^2-4x+6 es parábola CONVEXA

$\Rightarrow \underbrace{x^2-4x+6 > 0}_{\forall x \in \mathbb{R}}$

en particular para $x \in [1,3]$

También tiene q. ocurrir que $\frac{5x-2-x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x}{x^2-4x+6} > 0$ en $[1,3]$

para q. $\exists$ el Ln

como ya vimos $x^2-4x+6>0$, falta ver que

$5x-2-x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x > 0$ con $x \in [1,3]$

$\Updownarrow$

$5x-2 > x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x$ con $x \in [1,3]$

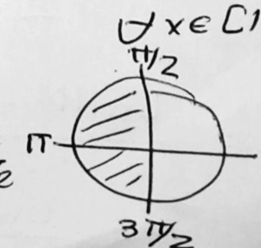
$5x-2$ recta creciente, su valor más pequeño en $[1,3]$ es $5 \cdot 1 - 2 = 5-2 = 3$, Así que $5x-2 \geq 3 > 2$ $\forall x \in [1,3]$

- para $x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x$, $x \in [1,3]$

$x=1 \rightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$

$x=3 \rightarrow \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$

nos movemos en el 2° y 3° cuadrante



dividio en subintervalos: $[1,2) \cup \{2\} \cup (2,3]$

• Si $\frac{\pi}{2}x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ $\Rightarrow$ sen $\frac{\pi}{2}x$ estrictamente decreciente y toma valores entre $(0,1]$

$\uparrow$
$x \in [1,2)$ (2º cuadrante)

Como $x \in [1,2)$ $\Rightarrow 0 < x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x < 2$

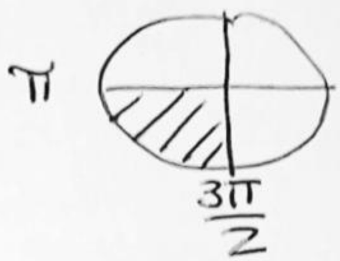
$0 < 1 \leq x < 2$

Como $5x - 2 \geq 3 > 2$ $\Rightarrow$ $5x - 2 - x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x > 0$

cierto

• Si $x = \cancel{\pi}2 \Rightarrow$ $5 \cdot 2 - 2 - 2 \operatorname{sen} \pi = 10 - 2 - 0 = 8 > 0$

• Si $x \in (2,3] \Rightarrow \frac{\pi}{2}x \in (\pi, \frac{3\pi}{2}]$ (3º cuadrante)



$x > 0$ y sen $\frac{\pi}{2}x < 0$
(3º cuadrante)

$\Rightarrow -x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x > 0 \Rightarrow \underbrace{5x-2}_{>2>0} \underbrace{- x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}_{>0} > 0$

En resumen, hemos comprobado que $\frac{5x-2-x \operatorname{sen} x\frac{\pi}{2}}{x^2-4x+6} > 0$

$\forall x \in [1,3]$ $\Rightarrow \exists \operatorname{Ln}\left(\frac{5x-2-x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x}{x^2-4x+6}\right)$ ~~si x∈[~~ $= f(x)$

$\Rightarrow f$ bien definida en $[1,3]$
f func. elemental

$\Big|\Rightarrow f$ cont en $[1,3]$
f deriv en $(1,3)$