TEOREMAS DE CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

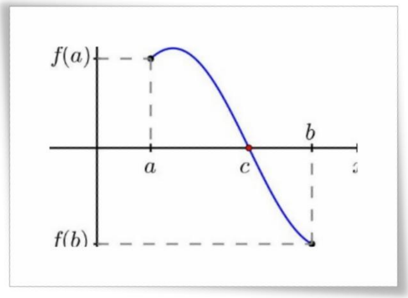
TEOREMA DE BOLZANO

Dada una función $f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces:

$$\left.\begin{array}{c} si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \\ y\quad f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\ c \in (a,b)\ \ t.q.\ \ \boldsymbol{f(c) = 0}$$

Dicho de otra forma, si tenemos una función continua en un intervalo cerrado y en los extremos de dicho intervalo cambia de signo, entonces tiene que existir al menos un punto en el que la gráfica de la función corte el eje X.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

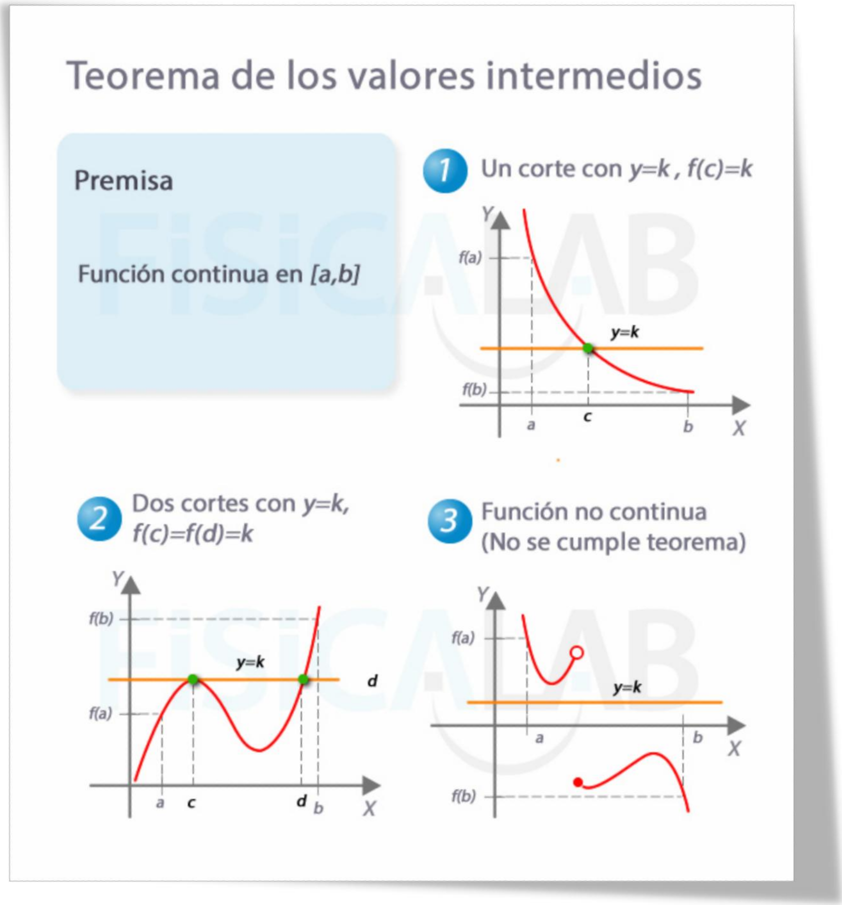


TEOREMA DE VALORES INTERMEDIOS, REGLA DE DARBOUX

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\ continua\ en\ [a,b] \\ k \in (f(a), f(b)) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\ c \in (a,b)\ \ t.q.\ \ f(c) = k$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

El teorema de los valores intermedios, a veces llamado de Darboux, afirma que una función continua en un intervalo [a,b] toma todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b). Se trata de una consecuencia directa del teorema de Bolzano.

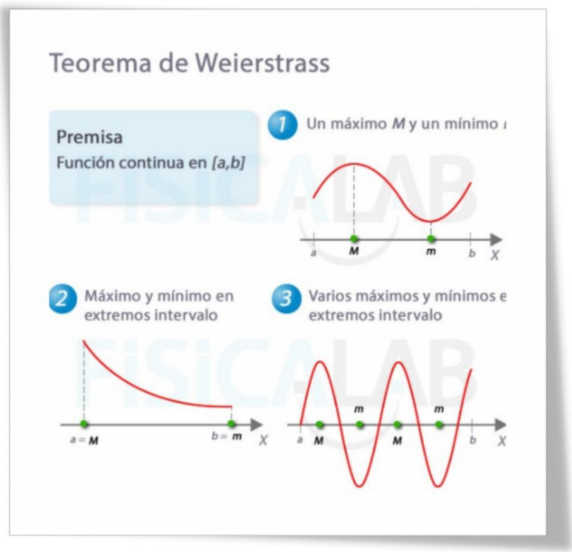


TEOREMA DE WEIERSTRASS

Tiene dos formas de expresarse:

$$Forma\ 1.\ \ Si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \Longrightarrow f(x)\ está\ acotada\ en\ ese\ intervalo$$
$$Forma\ 2.\ \ Si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \Longrightarrow f(x) alcanza\ sus\ máximos\ y\ mínimos\ absolutos\ en\ ese\ intervalo$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



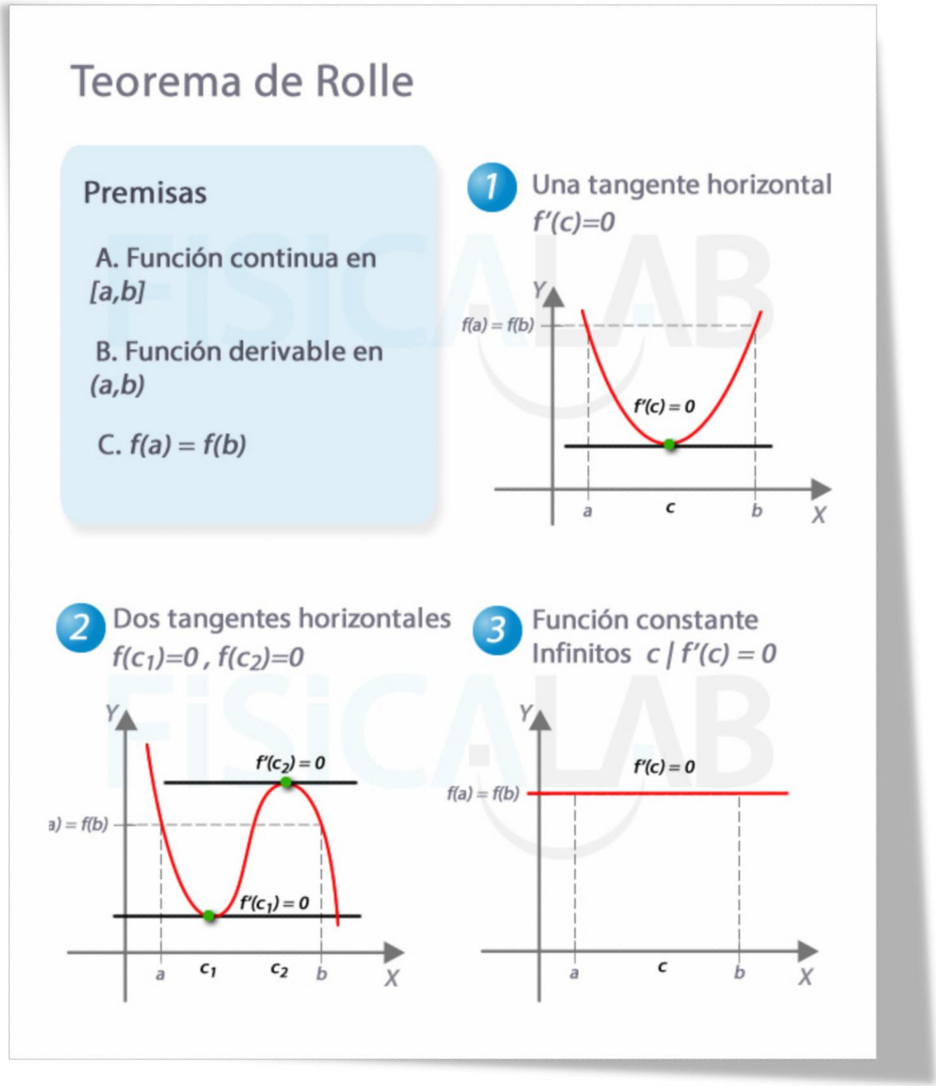
TEOREMA DE ROLLE

Dada una función $f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces:

$$\left.\begin{matrix} si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \\ derivable\ en\ (a,b) \end{matrix} \quad y\ f(b) = f(a) \right\} \Longrightarrow \exists\ c \in (a,b)\ \ t.q.\ \ \boldsymbol{f'(c) = 0}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si se cumplen las condiciones del teorema de Rolle entonces existe al menos un punto intermedio en el intervalo donde la recta tangente es paralela al eje de abscisas



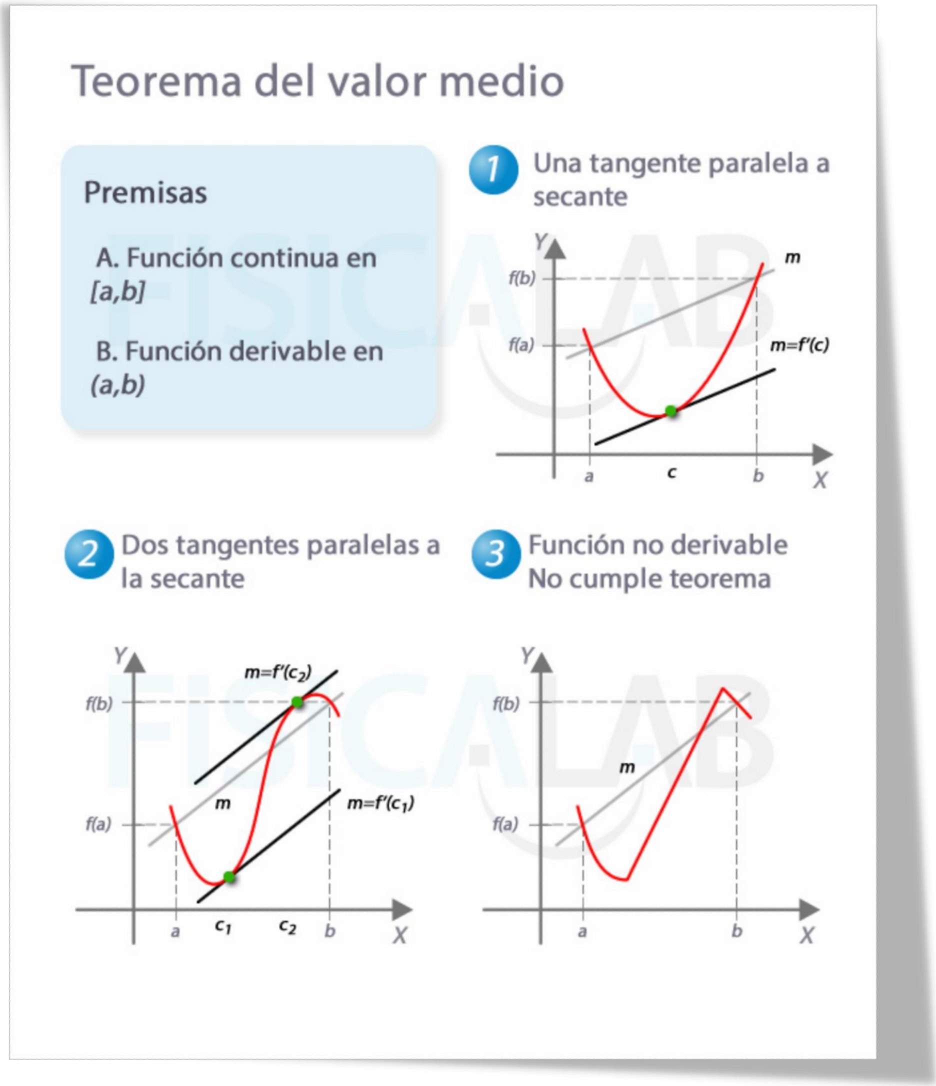
TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL O TEOREMA DE LAGRANGE

Dada una función $f(x)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces:

$$\left.\begin{array}{c} si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \\ y\ derivable\ en\ (a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\ c \in (a,b)\ \ \boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si se cumplen las condiciones del teorema entonces existe al menos un punto intermedio en el intervalo donde la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que une los puntos (a,f(a)) y (b,f(b))



FICHA APLICACIÓN DE TEOREMAS

1. Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo (1,2)

2. Demostrar que la ecuación $x^{2009} - e^x + 2 = 0$ tiene alguna solución

3. Demostrar que las curvas $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ se cortan en algún punto del intervalo $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$

4. Justifica si las funciones siguientes están acotadas en el intervalo que se indica:

   $a)\quad f(x) = \dfrac{4}{x}\ en\ el\ intervalo\ [1,3]$ $\qquad b)\quad f(x) = \dfrac{3x}{x-2}\ en\ el\ intervalo\ [0,3]$

5. Sea la función $f(x) = 2x + 1$ ¿Se puede afirmar que toma todos los valores del intervalo $[1,5]$

6. **GALICIA 2008.** Enunciado del teorema de Weierstrass. Si una función es continua en $[a, b]$y es estrictamente decreciente en ese intervalo, ¿dónde alcanza la función el máximo y el mínimo absoluto?

7. **CASTILLA LA MANCHA EXT 2021.** Sea la función $\mathrm{f(x) = x\ sen(x) - cos(x)}$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función f(x) tiene al menos un extremo relativo en el intervalo [−1, 1].

8. **GALICIA 2018.** Enuncia el teorema de Rolle. Calcula a, b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax, & si\ x < 1 \\ bx + c, & si\ x \geq 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,2]$ y calcula el punto en el que se cumple el teorema.

9. **GALICIA 2013.** Enuncia el teorema de Rolle. Determina el valor de a para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^3 + ax - 1$, en el intervalo [0,1]. Para este valor de a, calcula el punto $c \in (0,1)$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ sea paralela al eje OX.

10. **GALICIA 2012 EXT opción B**. Si c>2, calcula los valores de a, b, c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & si\ x < 2 \\ x + 1, & si\ x \geq 2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0,c]

11. **GALICIA 2011.** Enunciado e interpretación geométrica de Rolle. Calcula el valor de k para que la función $f(x) = x^3 - kx + 10$ cumpla las hipótesis de Rolle en el intervalo [-2,0] y para ese valor determina un punto del intervalo en el que se anule la derivada de $f(x)$.

12. **GALICIA 2014 ORD Opción B.** Enuncia el teorema del valor medio del cálculo diferencial. ¿Se puede aplicar, en el intervalo [0,1], este teorema a la función $f(x) = \frac{1}{2-x}$? En caso afirmativo calcula el punto al que hace referencia el teorema.

13. **GALICIA 2014 EXT Opción B.** Dada la función $f(x) = \begin{cases} mx, & si\ x < 1 \\ ax^2 + bx + 1, & si\ x \geq 1 \end{cases}$

    a. Calcula los valores a, b y m para que la función sea derivable en $x = 1$ y tenga un extremo relativo en $x = 3$.

    b. Enuncia el teorema del valor medio del cálculo diferencial. Para los valores $a = 1, b = -6, m = -4$, calcula, si existe, un punto $c \in (0,5)$ tal que la tangente a la gráfica en $x = c$ sea paralela al segmento que une los puntos (0,0) , (5,-4)

14. **NAVARRA ORD 2021**. Sea la función:

$$f(x)=\ln\left(\frac{5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}\right)$$

a. Demuestra que la función es continua en el intervalo [1,3].

b. Demuestra que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f'(\alpha) = 3/2 \ln 2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

15. **NAVARRA EXT. 2021**. Se considera la función: $f(x)=\sqrt{x+\sin\frac{\pi x}{2}}$

a. Demuestra que la función es continua en el intervalo [1,3].

b. Demuestra que existen dos valores $\alpha \in (1,2)$ y $\beta \in (2,3)$ tal que $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.