TEMA 2. DERIVADA DUNHA FUNCIÓN

2.1 DERIVADA DUNHA FUNCIÓN NUN PUNTO. INTERPRETACIÓN XEOMÉTRICA

2.2 RECTA TANXENTE E RECTA NORMAL

2.3 RELACIÓN ENTRE CONTINUIDADE E DERIVABILIDADE

2.4 FUNCIÓN DERIVADA

2.5 REGRAS DE DERIVACIÓN

2.6 DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

2.7 DERIVABILIDADE DUNHA FUNCIÓN

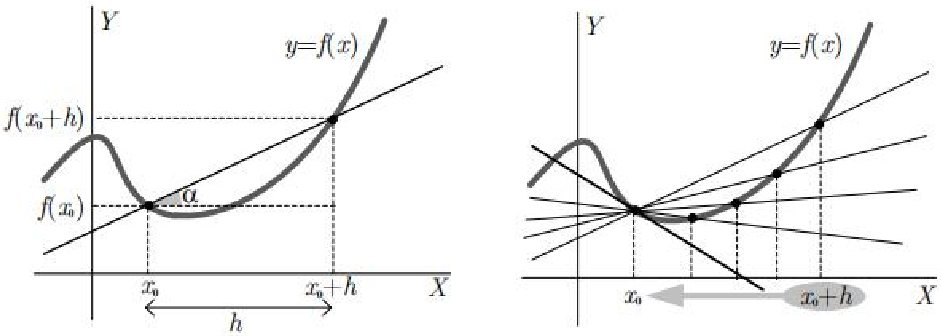
2.8 TÁBOA DE DERIVADAS

2.1 DERIVADA DUNHA FUNCIÓN NUN PUNTO. INTERPRETACIÓN XEOMÉTRICA

DERIVADA DUNHA FUNCIÓN NUN PUNTO

Chámase derivada dunha función y=f(x) nun punto x_0, ao valor do seguinte límite, se existe e é finito:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



INTERPRETACIÓN XEOMÉTRICA

O cociente $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ coincide coa pendente da recta secante á gráfica da función polos puntos de abscisas x_0, x_0+h. Canto máis pequeno sexa h estas rectas aproxímanse á recta tanxente á función no punto x_0.

Polo tanto, a derivada da función en x_0 é igual á pendente da recta tanxente á gráfica da función no punto x_0.

Exemplo:

Calcula f´(1) aplicando a definición de derivada, sendo f(x) =x^2-3.

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-3-(1-3)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+\mathrm{h}^2+2h-3-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+\mathrm{h}^2+2h-1}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{h}^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{h}(\mathrm{h}+2)}{h}=\lim_{h\to 0}h+2=2$$

Exercicio:
1.Calcula f´(2) aplicando a definición de derivada, sendo f(x) =3x^2-2x+1.

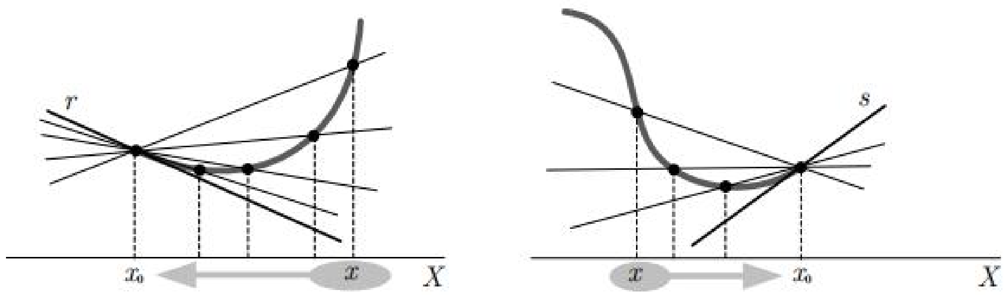
DERIVADAS LATERAIS

A derivada dunha función nun punto é o resultado de calcular un límite, para que este límite exista deben existir e coincidir os límites laterais, aos cales lles chamaremos derivadas laterais da función nun punto.

Definición: Chámase derivada lateral pola esquerda dunha función f nun punto x_0, e indícase f´(x_0^-) ao valor do seguinte límite, se existe e é finito: $f'(x_0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Definición: Chámase derivada lateral pola dereita dunha función f nun punto x_0, e indícase $f'(x_0^+)$ ao valor do seguinte límite, se existe e é finito: $f'\left(x_0^+\right)=\lim_{h\to 0^+}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$

Unha función é derivable nun punto x_0, se existen $f'\left(x_0^+\right)$, $f'\left(x_0^-\right)$, son finitos e coinciden.



Unha función é derivable nun intervalo aberto (a,b), se é derivable en todos os puntos do intervalo aberto.

$y=f(x)$ é derivable en $(\mathrm{a},\mathrm{b}) \Leftrightarrow \forall x_0\in(a,b), y=f(x)$ é derivable en x_0.

2.2 RECTA TANXENTE E RECTA NORMAL

ECUACIÓN DA RECTA TANXENTE

Na interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto, quedou explicado, que a derivada dunha función nun punto x_0 é igual á pendente da recta tanxente á gráfica da función no punto x_0.

$$r\begin{cases}(x_0, f(x_0))\\ m = f'(x_0)\end{cases}$$

Polo tanto, a ecuación da recta tanxente á función no punto $(x_0, f(x_0))$ será:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

ECUACIÓN DA RECTA NORMAL

$$r\begin{cases}(x_0, f(x_0))\\ m = -\dfrac{1}{f'(x_0)}\end{cases} \Rightarrow y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)$$

Exercicio:

2. Calcula a ecuación da recta tanxente e normal á gráfica de $f(x) = x^2 - 3x$, no punto de abscisa $x=5$. Calcula $f'(5)$ aplicando a definición.

2.3 RELACIÓN ENTRE CONTINUIDADE E DERIVABILIDADE

Teorema: Se unha función é derivable nun punto, entón é continua nese punto. É dicir,

$$y = f(x) \text{ derivable en } x_0 \Rightarrow y = f(x) \text{ } continua \text{ } en \text{ } x_0.$$

Demostración:

$$y = f(x) \text{ derivable en } x_0 \Rightarrow \exists f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ e é finito.}$$

Calculemos $\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot (x - x_0) = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

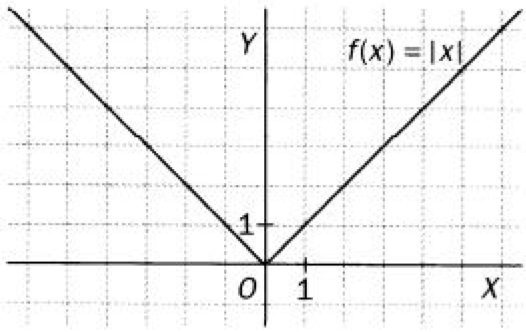
Entón:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Observacións:

1) O recíproco non é certo, que unha función sexa continua nun punto non implica que sexa derivable nese punto. É dicir, hai funcións continuas nun punto que non son derivables nese

punto. Exemplo: $y = |x|$ continua en x=o pero non é derivable en x=0.



Graficamente vemos que as pendentes pola dereita e pola esquerda do cero son distintas, entón a función non é derivable en x=0.Comprobémolo calculando as derivadas laterais:

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

As derivadas laterais son distintas, polo tanto non existe f´(0).

2) Se unha función non é continua nun punto, entón a función non será derivable nese punto.

2.4 FUNCIÓN DERIVADA

Definición: Dada unha función f, a función que asocia cada número real co valor da derivada chámaselle función derivada de f:

$$f' : R \to R$$

$$x \to f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

2.5 REGRAS DE DERIVACIÓN

DERIVADA DAS FUNCIÓNS ELEMENTAIS

FUNCIÓN	DERIVADA
$f(x)=K$	$f'(x)=0$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x \ln a$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$
$f(x)=senx$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-senx$
$f(x)=tagx$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=arcsenx$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\arccos x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=arctagx$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

REGRAS DE DERIVACIÓN

Teorema: Se y=f(x) , y=g(x) son dúas funcións , e k un número real calquera verifícanse as seguintes propiedades:

$$a)(kf)'(x) = kf'(x)$$
$$b)(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
$$c)(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
$$d)\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$
$$e)\,\text{Regra da cadena}: (\text{g o f})'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Demostración:

$$a)(kf)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(kf)(x+h) - (kf)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k(f(x+h) - f(x))}{h} =$$
$$= k \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot f'(x)$$

$$b)(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Exercicios:

3.Calcula as derivadas das seguintes funcións:

$a) f(x)=\frac{2x^5-x+4}{\ln x}$ b)$f(x)=e^x\left(x^3+4x\right)$

$c) f(x)=\frac{x^7+2x^3}{5}$ d)$f(x)=\ln x \ tg x$

e) $f(x)=\text{cosec } x$ f) $f(x)=(\text{arcsen } x)(-4x^3+x-5)$

$g) f(x)=(6x^5-x+2)\cdot\left(\ln x+2^x\right)$ g)$f(x)=\frac{\text{sen}(\cos x)-e^x}{\sqrt[3]{x^2}}$

4.Páxina 247, número 1a) b) c) d).

5. Páxina 263 números do 8 ao 12.

2.6 DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

A derivación logarítmica é un método que se utiliza para derivar funcións do tipo:

$$y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$$

A técnica consiste en:

En tomar logaritmos neperianos:

$$\ln y=\ln\left(f(x)\right)^{g(x)} \Rightarrow \ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$$

Derivar a ambos membros da ecuación:

$$\frac{y'}{y}=g'(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Despexar y´:

$$y'=\left(g'(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\cdot\left[f(x)\right]^{g(x)}$$

Esta técnica é só imprescindible cando tanto a base como o expoñente dependen de x, no resto dos casos pódese derivar directamente.

Exercicios:

6. Aplica a derivación logarítmica para calcular as derivadas de:

$$a) f(x) = \left(3x^4 - 2x^3 - 5\right)^{senx}$$
$$b) f(x) = \left(arctagx\right)^{\ln x}$$
$$c) f(x) = \left(\frac{e^x}{x^2+3}\right)^x$$
$$d) f(x) = \left(\cos x\right)^{-2x^3+5x^2}$$

7. Calcula a ecuación das rectas tanxente e normal en x=1 á función: $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$

2.7 DERIVABILIDADE DUNHA FUNCIÓN

Unha función é derivable en aqueles puntos nos que existe a derivada. Entón para estudar a derivabilidade debemos estudar o dominio da función derivada, tendo en conta o dominio da función.

Exemplo: Estuda a derivabilidade de

$$a) f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \mathrm{Dom}(f') = \mathrm{R} - \{0\}$$

Polo tanto, a función é derivable en todos os puntos agás en x=0.

$$b)\, f(x) = \ln(x+4)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+4} \Rightarrow f \text{ é derivable en } (-4, \infty)$$

c) Funcións a trozos: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ -x^2 & , x > 0 \end{cases}$

Primeiro debemos estudar a continuidade.
Continua en $R - \{0\}$.

Continuidade en x=0:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -x^2 = 0$$

Entón a función é continua en R.
Agora estudemos a derivabilidade, calculamos a función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ -2x & , x > 0 \end{cases}$

Derivable en $R - \{0\}$, *estudamos* a derivabilidade en $x = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} h = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} -h = 0$$

Entón existe f´(0)=0, polo tanto a función é derivable en x=0.
A función é derivable en R.

Exercicios:

8. Estuda a derivabilidade de:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\le 0 \\ -x^2+2 & ,x>0 \end{cases} \qquad b)\ f(x)=\begin{cases} x^2+3x & ,x\le 0 \\ x^3+3x & ,0<x<2 \\ \dfrac{1}{x} & ,x\ge 2 \end{cases}$$

$c)$ *Calcula a e b* para que a función sexa derivable en R :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & ,x\le 2 \\ -x^2+bx-9 & ,x>2 \end{cases}$$

9. Exercicios do libro:

Páxina 243 números 4, 5, 6,7.
Páxina 247, número 1 do e) ao n).
Páxina 251, número 1.
Páxina 263 do 8 ao 27.
Páxina 265 números 43,44.
Páxina 267 números 1,2,4,5.

10. Exercicios 14 a), 15, b) i), 25 da ficha Análise Abau.

2.8 TÁBOA DE DERIVADAS

FUNCIÓN	DERIVADA
$y=[f(x)]^n$	$y'=n[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=\sqrt[n]{f(x)}$	$y'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}\cdot f'(x)$
$y=e^{f(x)}$	$y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$y=a^{f(x)}$	$y'=a^{f(x)}\cdot \ln a\cdot f'(x)$
$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$
$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{1}{f(x)\ln a}\cdot f'(x)$
$y=sen\ f(x)$	$y'=f'(x)\cos f(x)$
$y=\cos \mathrm{f(x)}$	$y'=-f'(x)sen\ \mathrm{f(x)}$
$y=tag\ f(x)$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 f(x)}\cdot f'(x)$
$y=arcsen\ \mathrm{f(x)}$	$y'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\cdot f'(x)$
$y=\arccos \mathrm{f(x)}$	$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\cdot f'(x)$
$y=arctag\ \mathrm{f(x)}$	$y'(x)=\dfrac{1}{1+f(x)^2}\cdot f'(x)$