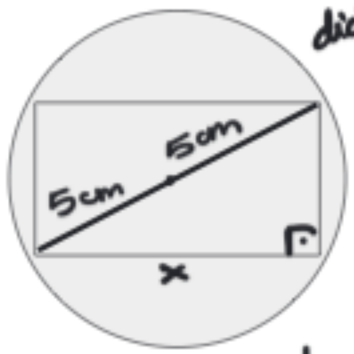
Boletín Optimización

diámetro = 10cm = 2 radios

1º)



Función a optimizar: $\text{Área} = x\,y$

Condición (la sacamos de Pitágoras)

$$\boxed{x^2+y^2=10^2}$$

1º) despejo y en la condición: $y=\sqrt{100-x^2}$ (No tiene sentido tomar el valor negativo de la raíz, las dimensiones y áreas son +)

2º) sustituyo en la función $\boxed{x\sqrt{100-x^2}=A(x)}$

3º) derivo función e igualo a cero

$$A'(x)=\sqrt{100-x^2}+x\,\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=\sqrt{100-x^2}-\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}=\frac{(\sqrt{100-x^2})^{\cancel{2}}-x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$=\boxed{\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}}=0 \Rightarrow 100-2x^2=0 \Rightarrow 100=2x^2 \Rightarrow x^2=\frac{100}{2}=50$$

$$\boxed{x=\sqrt{50}\text{ cm}}$$

4º) segunda derivada, compruebo si es máx. o mínimo

$$A''(x)=\frac{-4x(\sqrt{100-x^2})-(100-2x^2)\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}}{(\sqrt{100-x^2})^{\cancel{2}}}=$$

$$=\frac{\frac{-4x(\sqrt{100-x^2})^{2}+x(100-2x^2)}{\sqrt{100-x^2}}}{(100-x^2)}=\frac{-4x(100-x^2)+x(100-2x^2)}{(100-x^2)\sqrt{100-x^2}}$$

$$=\frac{2x^3-300x}{(100-x^2)\sqrt{100-x^2}}\;; \qquad A''(\sqrt{50})<0 \text{ es Máximo}$$

5º) calculo y en la condición: $y=\sqrt{100-(\sqrt{50})^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}$

Solución: las dimensiones del rectángulo son $x=\sqrt{50}$, $y=\sqrt{50}$ (es un cuadrado)

2º) No hay dibujo posible

x, y dos nºs cualquiera t.q. $x^2 y$ Función

condición $x+y=40$

1º) despejo y en la condición: $y=40-x$

2º) sustituyo en la función $f(x)=x^2(40-x)=40x^2-x^3$

3º) Derivo función $f'(x)=80x-3x^2$ e igualo a cero: $x(80-3x)=0$ $\begin{cases} x=0 \\ x=\frac{80}{3} \end{cases}$

4º) Calculo segunda derivada para comprobar si max. o min.

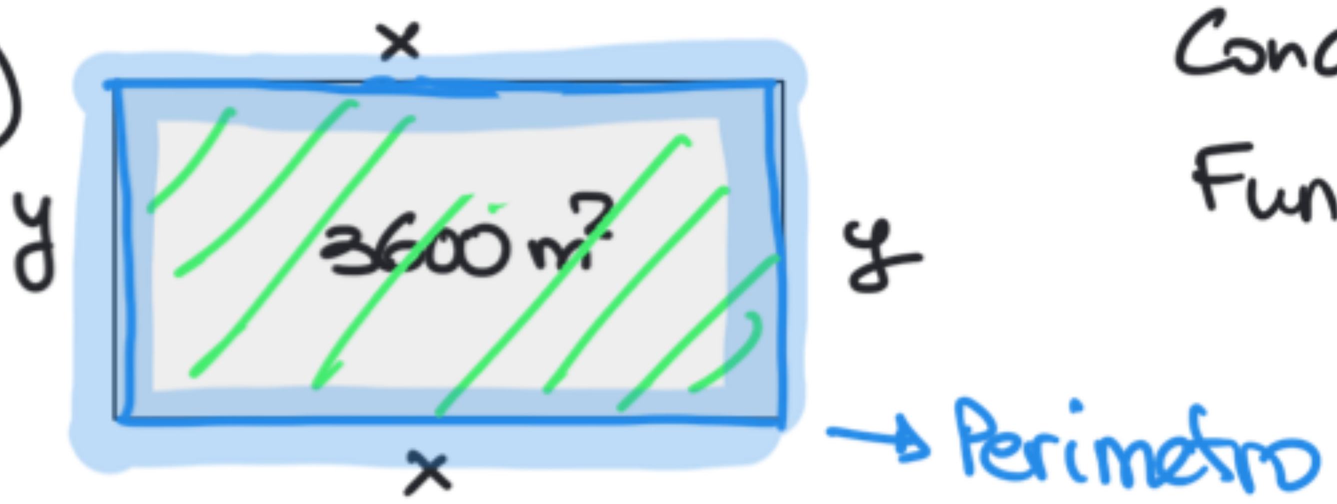
$f''(x)=80-6x$; $f''(0)=80>0$ mínimo

$f''\left(\frac{80}{3}\right)=-80<0$ máximo

5º) sustituyo en la condición para calcular y

$y=40-x$; $y=40-\frac{80}{3}=\frac{40}{3}$

Solución $x=\frac{80}{3}$, $y=\frac{40}{3}$

3) 

Condición $xy = 3600$

Función $2x + 2y$

1º) despejo y en la condición: $y = \frac{3600}{x}$

2º) sustituyo en la función: $2x + 2\,\frac{3600}{x} =$

$= 2x + \frac{7200}{x} = A(x)$

3º) Derivo función e igualo a 0:

$A'(x) = \boxed{2 - \frac{7200}{x^2} = 0} \Rightarrow \frac{7200}{x^2} = 2$

$7200 = 2x^2$; $x^2 = \frac{7200}{2} = 3600$; $x = \sqrt{3600} =$
$= \boxed{60}$

(no tiene sentido coger el valor negativo, es un área)

4º) Calculo 2ª derivada para ver si max, o mínimo

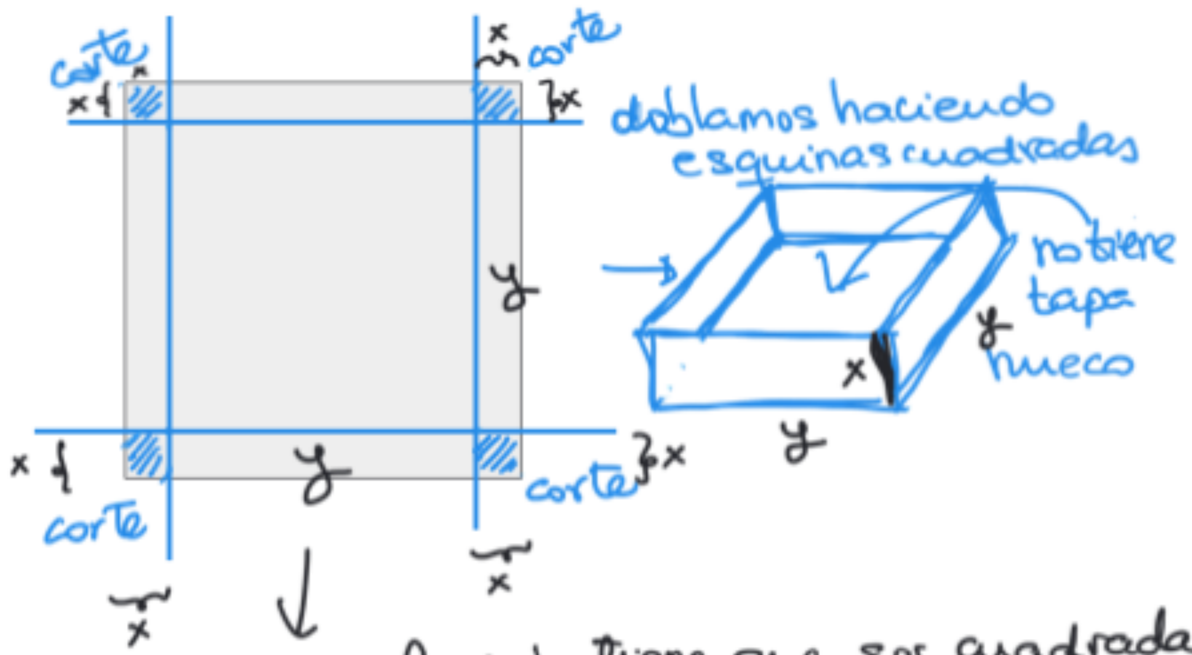
$A''(x) = + \frac{7200 \cdot 2x}{x^4} = \frac{1440\,x}{x^4} = \boxed{\frac{1440}{x^3}}$

5º) Sustituyo x en la condición para calcular y

$y = \frac{360\cancel{0}}{6\cancel{0}} = 60$

Solución las dimensiones del rectángulo son 60 cm × 60 cm

4) El enunciado del boletín está incompleto faltaba por indicar que la caja era de base cuadrada y no tenía tapa



como la caja tiene que ser cuadrada (el cartón también)

nos queda $(2x+y)(2x+y) = 1 \ m^2$

$\boxed{2x+y=1}$ condición

Para la función a optimizar $V = y^2 x$

1º) despejo y en la condición

$y = 1-2x$

2º) sustituyo en la función $V(x) = (1-2x)^2 x =$

$= 4x^3 - 4x^2 + x$

3º) derivo la función e igualo a 0

$V'(x) = 12x^2 - 8x + 1 = 0 \ ; \ x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-48}}{24} = \dfrac{8 \pm \sqrt{16}}{24}$

$= \dfrac{8 \pm 4}{24} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{array} \right.$

4º) calculo 2ª deriv para ver si máx. o mínimo

$V''(x) = 24x - 8$

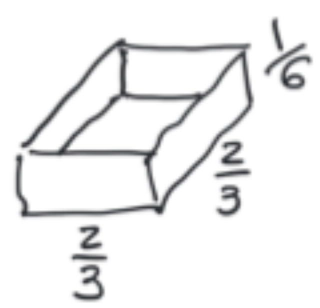
$V''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ mínimo

$V''\left(\frac{1}{6}\right) < 0$ máximo → este es el que buscamos

5º) sustituyo el valor en la condición para obtener la y

$y = 1 - 2x$

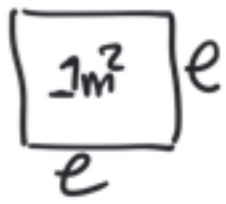
$y = 1 - 2\frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



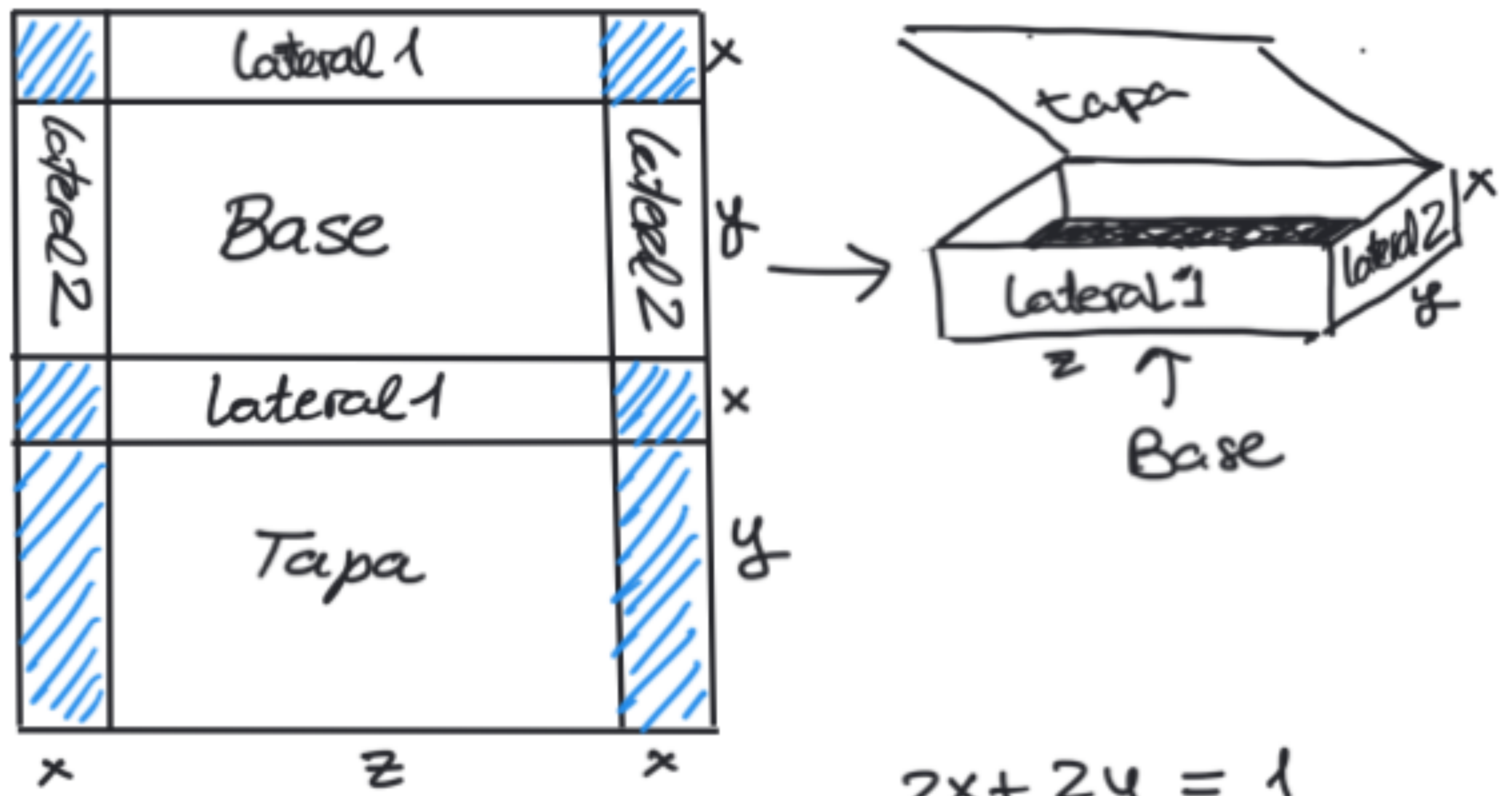
Las dimensiones de la caja son $\frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$

Otra variante del mismo ejercicio, pero CON Tapa (este NO entra) pero para que veais cómo se haría

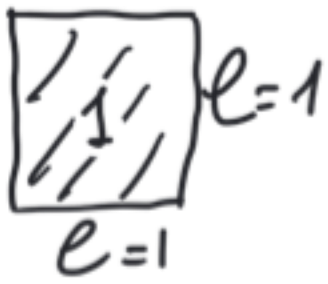
Cartón Cuadrado, ¡ojo!



$e^2 = 1$
$e = 1m$



Por ser el cartón cuadrado $\left\langle \begin{array}{l} 2x + 2y = 1 \\ \text{(dos condiciones)} \\ 2x + z = 1 \end{array} \right.$



Una función $V = xyz$

1º) despejo y, z en las condiciones $y = \frac{1-2x}{2}$

$z = 1 - 2x$

2º) sustituyo en la función

$V(x) = x \frac{(1-2x)}{2} (1-2x) = \frac{x}{2}(1 - 4x + 4x^2) =$

$= \frac{x}{2} - 2x^2 + 2x^3$

3º) Derivo e igualo a cero

$V'(x) = \frac{1}{2} - 4x + 6x^2 = 0 \quad ; x = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{array} \right.$

4º) Calculo segunda derivada para ver si máx o mínimo

$V''(x) = 12x - 4$

$V''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ mínimo

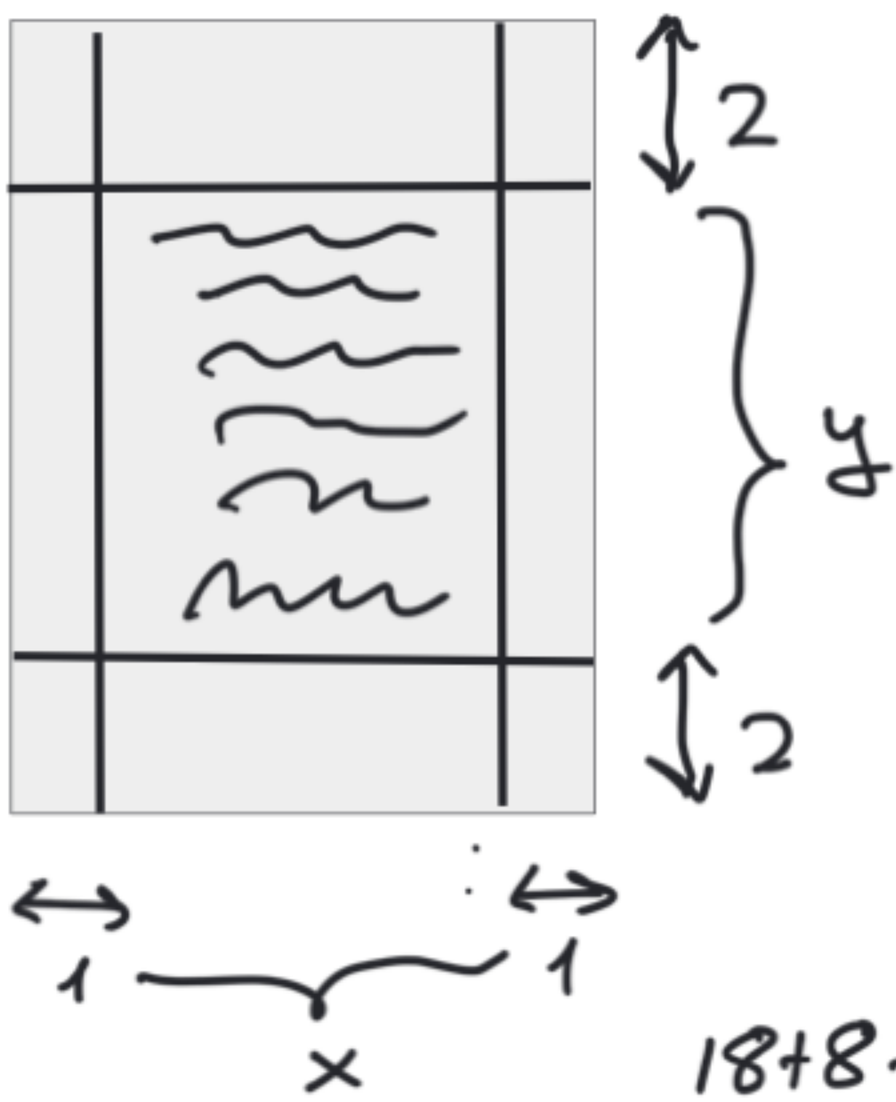
$V''\left(\frac{1}{6}\right) < 0$ máximo $\rightarrow$ este es el que me interesa

5º) sustituyo en las condiciones para obtener y, z

$\boxed{x = \frac{1}{6}, \; y = \frac{1}{3}, \; z = \frac{2}{3}}$ solución para la caja con tapa, hecha con un cartón cuadrado.

5) hoja con $18 cm^2$ de texto escrito.

Entendemos que cuanto más pequeña sea la hoja más barata saldrá, así que tenemos que minimizar su superficie.



$xy = 18$ condición

$A = (y+4)(x+2)$ función

1º) despejo y en la condición: $y = \frac{18}{x}$

2º) sustituyo en la función

$A(x) = \left(\frac{18}{x} + 4\right)\cdot(x+2) =$

$= \frac{18x}{x} + \frac{36}{x} + 4x + 8 =$

$18 + 8 + 4x + \frac{36}{x} = \boxed{26 + 4x + \frac{36}{x}}$

3º) Derivamos la función e igualamos a 0

$A'(x) = 4 - \frac{36}{x^2} = 0 \Rightarrow 4 = \frac{36}{x^2} \Rightarrow 4x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 9$

$\Rightarrow x = 3$ (no tiene sentido tomar el valor negativo)

4º) sustituimos en la condición para obtener y

$y = \frac{18}{x} \Rightarrow y = \frac{18}{3} = 6$

Esto NO son los valores que nos pedían, son tan sólo las proporciones del texto ($3 \times 6 = 18$)

Ahora añadimos los márgenes para tener las dimensiones de la hoja $\Rightarrow$ $y + 4 = 6 + 4 = 10$ cm

$x + 2 = 3 + 2 = 5$ cm

Solución: la hoja tiene dimensiones 5×10

6) La cosecha. Este problema es atípico. No hay condición y la función se obtiene de forma recursiva, veámoslo:

Días de espera hasta la venta		Peso (kg) cosecha		Precio venta/kg
0	$\longrightarrow$	50000	$\longrightarrow$	20
1	$\longrightarrow$	50000 − 800	$\longrightarrow$	20 + 3
2	$\longrightarrow$	50000 − 800·2	$\longrightarrow$	20 + 3·2
3	$\longrightarrow$	50000 − 800·3	$\longrightarrow$	20 + 3·3
⋮		⋮		⋮
x	$\longrightarrow$	50000 − 800x	$\longrightarrow$	20 + 3x

Beneficio = Peso · precio venta/kg =

$$= \boxed{(50\,000 - 800x)\cdot(20+3x)}$$

función a optimizar

Operando un poco: $B(x) = -2400x^2 + 134\,000x + 1000000$

derivamos e igualamos a 0 ⇒

$B'(x) = -4800x + 134000 = 0 \Rightarrow \boxed{x \simeq 28 \text{ días}}$

para comprobar que es el máximo:

$B''(x) = -4800 < 0$

$\boxed{\text{Sol. } 28 \text{ días}}$

7) Los bolis   otro atípico, sin condición.

PVP	Nº bolis vendidos por día	Nº bolis fabricados
		1000
15 cént	1000	1000
15+1	1000 − 100	1000
15+2	1000 − 100·2	1000
15+3	1000 − 100·3	1000
⋮	⋮	⋮
		1000
15+x	1000 − 100x	

siendo x = nº cént. que añade a los 15 cént

Beneficio diario = $\underbrace{\text{gana por}}_{\text{bolis vendidos}} - 7'5 \cdot \underbrace{1000}_{\text{stock diario de bolis fabricados}}$

$B(x) = (15+x)(1000-100x) - 7'5 \cdot 1000$

$B(x) = 15000 - 1500x + 1000x - 100x^2 - 7500$

$B(x) = 7500 - 500x - 100x^2$

derivamos e igualamos a cero:

$B'(x) = -500 - 200x = 0$

$-500 = 200x$

$x = \dfrac{-500}{200} = -2'5$ cént. de euro

$B''(x) = -200 < 0$ máximo

El precio óptimo es $x + (-2'5) = 12'5$ cént unidad

8) ~~las~~ ventanas

x: Para los horizontales 20 €/m
y: Para los verticales 30 €/m

$\boxed{\text{Condición } xy = 6}$

Para la función:
el precio de los perfiles será:

$\boxed{40 \cdot x + 60 \cdot y}$ Función

1º) despejamos y en la condición

$$y = \frac{6}{x}$$

2º) sustituimos en función $P(x) = 40x + 60 \cdot \frac{6}{x}$

3º) derivamos e igualamos a 0

$$P'(x) = 40 - \frac{360}{x^2} = 0 \Rightarrow 40 = \frac{360}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{36\cancel{0}}{4\cancel{0}} = 9 \Rightarrow x = 3\,m$$ (la solución negativa no tiene sentido si hablamos de magnitudes)

4º) segunda derivada para ver si max. o mínimo

$$P''(x) = + \frac{360x}{x^4} = \frac{360}{x^3}$$

$P''(3) > 0 \Rightarrow$ es mínimo

5º) sustituimos x en la condición para calcular y: $y = \frac{6}{x}$; $y = \frac{6}{3} = 2\,m$

~~das~~ dimensiones de la ventana son 3×2

y su coste es $P(3) = 40 \cdot 3 + 60 \cdot \frac{6}{3} =$
$120 + 120 = \boxed{240\,€}$