ÍNDICE

LICENCIA

ACERCA DE LA LICENCIA DE ESTE DOCUMENTO

RECONOCIMIENTO-NO COMERCIAL-COMPARTIR IGUAL 3.0 UNPORTED (CC BY-NC-SA 3.0)

ESTO SIGNIFICA USTED ES LIBRE DE:

BAJO LAS CONDICIONES SIGUIENTES:

CÁLCULO NUMÉRICO

TEMA 1: REPASO DE POTENCIAS, RADICALES Y LOGARITMOS

Propiedades de potencias, radicales y logaritmos

Potencias

Propiedad	Ejemplo	Propiedad	Ejemplo
$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$	$5^4 \cdot 5^3 = 5^7$	$x^n \cdot y^n = (x\,y)^n$	$5^3 \cdot 4^3 = 20^3$
$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$	$\frac{5^7}{5^3} = 5^4$	$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$	$\frac{20^3}{4^3} = 5^3$
$(x^n)^m = x^{n\,m}$	$(5^3)^4 = 5^{12}$	$x^0 = 1$	$5^0 = 1$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{1}{5^3} = 5^{-3}$	$x^1 = x$	$5^1 = 5$

Radicales

Propiedad	Ejemplo	Propiedad	Ejemplo
$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$\sqrt[3]{5} = 5^{1/3}$	$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x\,y}$	$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{20}$
$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$	$\sqrt[3]{5^4} = 5^{4/3}$	$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$	$\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{5}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\,m]{x}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$	$\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$	$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
$x \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n y}$	$5 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{250}$	$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$	$\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$

Logaritmos

Propiedad	Ejemplo	Propiedad	Ejemplo
$\log x + \log y = \log(x\,y)$	$\log 5 + \log 4 = \log 20$	$\log_a(a^n) = n$	$\log_5(5^3) = 3$
$\log x - \log y = \log\left(\frac{x}{y}\right)$	$\log 20 - \log 4 = \log 5$	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_2 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2}$
$\log(x^n) = n \log x$	$\log(2^3) = 3\log 2$	$\log_a a = 1$	$\log_5 5 = 1$
$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x$	$\log \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3} \log 5$	$\log 1 = 0$	

REPASO LOGARITMOS

<table>
<tr><th colspan="3">Definición</th></tr>
<tr><td colspan="2">Si $a>0$ y $a\neq 1$, se llama logaritmo en base a de b al exponente al que hay que elevar la base a para obtener b
$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$</td><td>• $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$.
• $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$.
• $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Una observación de interés</th></tr>
<tr><td colspan="2">Los números que son potencias exactas de la base tienen logaritmos enteros (ejemplos anteriores). Si no es así el logaritmo es un número decimal.</td><td>• $\log_2 24$ es un número decimal situado entre 4 y 5 porque $2^4 = 16$ y $2^5 = 32$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Propiedades de los logaritmos</th><th>Observaciones y ejemplos</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Números distintos tienen logaritmos distintos. O sea:
$$b\neq c \Rightarrow \log_a b \neq \log_a c$$
Además:
• Si $a>1$ y $b<c$, entonces $\log_a b < \log_a c$.
• Si $0<a<1$ y $b<c$, entonces $\log_a b > \log_a c$.</td><td>De lo anterior se deduce que el logaritmo de base mayor que 1 es creciente (a números mayores logaritmos mayores), y que el logaritmo de base un número comprendido entre 0 y 1 es decreciente (a números mayores logaritmos menores).</td></tr>
<tr><td>2</td><td>El logaritmo de en base a de a es igual a 1:
$$\log_a a = 1$$</td><td>Esta propiedad es evidente ya que $a^1 = a$.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>El logaritmo de 1 es 0, sea quien sea la base:
$$\log_a 1 = 0$$</td><td>Esta propiedad también es clara pues $a^0 = 1$.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos:
$$\log_a (b\cdot c) = \log_a b + \log_a c$$</td><td rowspan="4">Si $\log_2 r = 4,3$ y $\log_2 s = -1,7$, calcular $\log_2\left(\frac{r\cdot s}{4}\right)$ y $\log_2 \frac{2\sqrt{r}}{s^3}$.
• $\log_2\left(\frac{r\cdot s}{4}\right) = \log_2 (r\cdot s) - \log_2 4 =$
$= \log_2 r + \log_2 s - \log_2 4 = 4,3 + (-1,7) - 2 = 0,6$
• $\log_2 \frac{2\sqrt{r}}{s^3} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{r} - \log_2 s^3 =$
$= 1 + \log_2 r^{1/2} . \log_2 s^3 = 1 + \frac{1}{2}\log_2 r - 3\log_2 s =$
$= 1 + \frac{1}{2}\cdot 4,3 - 3\cdot(-1,7) = 1 + 2,15 + 5,1 = 8,25$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos:
$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base:
$$\log_a b^n = n\cdot \log_a b$$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice:
$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n}$$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Cambio de base. El logaritmo en base a de un número se puede obtener a partir de logaritmos en otra base:
$$\log_a b = \frac{\log_k b}{\log_k a}$$</td><td></td></tr>
</table>

Logaritmos decimales

Los logaritmos en base 10 se llaman logaritmos decimales y, en lugar de designarse mediante $\log_{10}$ se designan simplemente con $\log$. Es decir:

$$\log_{10} x = \log x$$

La tecla **log** de la calculadora sirve para calcular logaritmos decimales. Por la propiedad 8 anterior, se pueden obtener, con la ayuda de la calculadora, el logaritmo de un número en cualquier base. Por ejemplo:

$$\log_3 45 = \frac{\log 45}{\log 3} = 3,464973521$$

El número *e*

El número e es muy especial en matemáticas. Se define como el número al que tiende la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ cuando x tiende a $+\infty$. De esta función podemos hallar sucesivamente $f(1)$, $f(2)$,..., $f(100)$,..., $f(1000)$,... Por ejemplo: $f(1000) = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,716923932$, $f(1000000) = \left(1 + \frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2,718280469$.

Es posible demostrar (aunque esto requiere de matemáticas superiores), que cuando $x \to +\infty$, entonces $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ tiende a un número irracional al que llamaremos número e. Simbólicamente:

$$x \to \infty \Rightarrow f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e = 2,718281828...$$

Logaritmos neperianos

Se llaman así a los logaritmos cuya base es el número e, y se designan mediante la abreviatura $\ln$. De este modo el logaritmo neperiano de un número x es:

$$\ln x = \log_e x$$

Su nombre proviene de John Napier, un matemático escocés, reconocido por ser el primero en definir los logaritmos.

La tecla **ln** de la calculadora sirve para calcular logaritmos neperianos. Estos logaritmos, además de su interés histórico, son enormemente importantes en matemáticas superiores.

Ejemplos

1. Solamente utilizando la definición de logaritmo podemos calcular $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$. Observa:

$$\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^6 + \log_2 2^{-2} - \log_3 3^2 - \log_2 2^{1/2} =$$
$$= 6\log_2 2 + (-2)\log_2 2 - 2\log_3 3 - \frac{1}{2}\log_2 2 = 6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

2. Utilizando la definición de logaritmo también podemos resolver ecuaciones donde la incógnita es la base del logaritmo. Por ejemplo $\log_x 125 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x^3 = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$.
3. Podemos expresar como un solo logaritmo ciertas expresiones, por ejemplo $\log b + 2\log c - \log d$. Basta aplicar las propiedades a la inversa: $\log b + 2\log c - \log d = \log b + \log c^2 - \log d = \log\left(b \cdot c^2\right) - \log d = \log \frac{b \cdot c^2}{d}$.
4. Con la calculadora y utilizando el cambio de base se pueden hallar logaritmos de base cualquier número.

$$\log_7 938 = \frac{\log 938}{\log 7} \simeq 3,517 \quad ; \quad \log_{3/2} 127 = \frac{\ln 127}{\ln(3/2)} \simeq 11,947$$

FICHA DE REPASO CÁLCULO NUMÉRICO

RAÍCES

1. Simplificar: $(a)\ 2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+5\sqrt{27}-3\sqrt{48}+4\sqrt{3}+\sqrt{243}$

   $(b)\ 3\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{54}$

2. Simplificar $\sqrt[3]{2x+2\sqrt{x^2-2}}\cdot\sqrt[3]{2x-2\sqrt{x^2-2}}$

3. Racionalizar: $(a)\ \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ $\qquad (b)\ \dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

LOGARITMOS Y EXPONENCIALES

1. Definir logaritmo de un número y demostrar la fórmula del cambio de base.
2. Calcular el valor de $\log\sqrt[4]{781{,}25}$ conocido log 2 = 0,3010.
3. Calcular los siguientes logaritmos:

   $(a)\ \log_{81}\sqrt[3]{9}$ $\qquad (b)\ \log_2\frac{1}{\sqrt{8}}$ $\qquad (c)\ \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}3$ $\qquad (d)\ \log_4\frac{1}{8}$

4. Calcula:

   $(a)\ \log_3\sqrt{27}$ $\qquad (b)\ \log_{49}343$ $\qquad (c)\ \log_9\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ $\qquad (d)\ \log_{25}\frac{1}{5}$

5. Calcular los siguientes logaritmos:

   $(a)\ \log_{25}\dfrac{1}{125}$ $\qquad (b)\ \log_3\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad (c)\ \log_2\left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{8}\right)$ $\qquad (d)\ \log_8\dfrac{4}{\sqrt[5]{16}}$

Del libro de Anaya: página 51 ejercicios: 25, 26, 27, 29, 30 y 32

REPASO ÁLGEBRA

TEMA 2: REPASO ÁLGEBRA

ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

1. Despejar x en las siguientes ecuaciones:

   $a)\quad 3^{x^3-1} = 5$ $\qquad\qquad$ $b)\quad \log_2(2x-1) = 4$

2. Resolver la ecuación: $2^{2x+4} - 5 \cdot 2^{x+1} + 1 = 0$

3. Conocido log 5 = 0,6990, hallar log 12,5 y log 0,032.

4. Resolver la ecuación: $2^{x-1} + \frac{1}{2^{x-3}} = 5$

5. Resolver la ecuación: $3\log x - 2\log\frac{x}{3} = 2\log 3 + \log 2$

POLINOMIOS, FACTORIZACIÓN, FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. Determinar m con la condición de que el polinomio $x^4 + 5x^3 + mx + 4$ sea divisible por $x + 3$.

2. Encontrar el valor de a sabiendo que al dividir $x^4 - 3x^3 + ax^2 - 4x + 7$ entre $x + 2$, da de resto 7.

3. Factorizar el polinomio: $9x^4 - 31x^2 - 14x + 8$

4. En la ecuación $9x^2 + bx + 28 = 0$, determinar b con la condición de que la diferencia de las raíces de dicha ecuación sea igual a la unidad.

5. Simplificar la fracción

$$\frac{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 14x + 6}{x^3 - 4x^2 + 6x - 4}$$

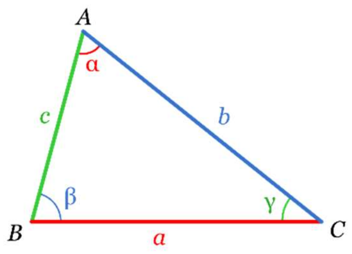
6. Factorizar el polinomio $4x^3 + 8x^2 - 11x + 3$

7. Calcular el valor que deberá tomar m en la ecuación $9x^2 - 18x + m = 0$ para que una de las raíces sea doble que la otra.

TRIGONOMETRÍA

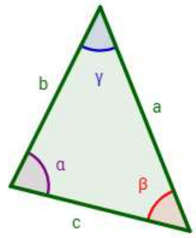
TEMA 3: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

TEOREMA DEL SENO



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

TEOREMA DEL COSENO



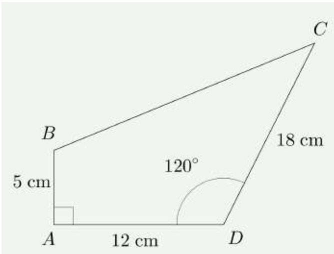
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\beta)$$

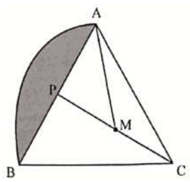
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma)$$

FICHA I TRIGONOMETRÍA

1. Calcular en radianes el ángulo correspondiente a un arco de 23 cm en una circunferencia de radio 12 cm.
2. Un triángulo isósceles los lados iguales mide 56 cm y el _ángulo desigual 87º. Calcular la longitud del lado desigual.
3. Calcular el área de un pentágono regular de 45 cm de lado.
4. En el triángulo a = 381 cm, b = 290 cm, c = 450 cm, calcular el ángulo c en grados y minutos.
5. Calcular el área del triángulo del problema anterior.
6. En un triángulo A = 46º, a = 18 cm y b = 25 cm. Calcular el ángulo B en grados y minutos.
7. Desde dos puntos en línea recta con el pie de una torre se ve el extremo de ésta con ángulos de inclinación de 34º30´ y 22º15´. Si la distancia entre estos dos puntos es de 30 m, hallar la altura de la torre.
8. El triángulo ABC tiene un área de 21 cm2. Los lados b y c tienen una longitud de 11 cm y 6 cm, respectivamente. Hallar los dos posibles valores de la longitud del lado a.
9. Calcular el área del cuadrilátero $ABCD$:



10. Calcular el área de un triángulo de lados a = 31 cm, b = 42 cm y c = 21 cm.
11. En una circunferencia de radio 20 cm, una cuerda mide 32 cm. Calcular la longitud del arco limitado por la cuerda.
12. Calcular el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero de 67 cm de lado.
13. Calcular el área de un pentágono regular de 60 cm de lado.
14. Obtener el valor exacto de cos 75°.
15. Calcular cos 3α en función de cos α.
16. Calcular el área del triángulo de lados a = 38 cm, b = 16 cm, c = 27 cm.
17. Calcular las soluciones de la ecuación: $2\operatorname{sen} x + \operatorname{cosec} x = 3$ con $x \in [-\pi, \pi]$
18. Demostrar la identidad: $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$
19. Se considera la siguiente figura



Los lados del triángulo equilátero ABC tienen longitudes de 1 m. P es el punto medio de [AB]. El arco de circunferencia AB tiene por centro M, el punto medio de [CP].

a. Hallar AM.
b. Hallar el ángulo AMP en radianes.
c. Hallar el área de la región sombreada.

FICHA II TRIGONOMETRÍA: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

1. Quiero calcular la altura de una casa. Desde la calle me pongo frente al edificio y me alejo para tener una buena perspectiva, marco con una x roja el lugar. Dirijo mi mirada a lo más alto del edificio y mido un ángulo de 27°, observo que en lo alto hay una antena, dirijo mi mirada al punto más alto de la antena y obtengo 31°. Entro y subo a la terraza del edificio y mido la antena que tiene 3 metros. Me pego a ella y observo que desde allí, en línea recta con la x roja que marqué antes, hay 2 metros hasta el borde del edificio. Con estos datos calcula la altura de la casa. Ten en cuenta que mis ojos están a una altura de 1,6 metros.

2. Estoy viendo desde lejos cómo va a despegar y subir un globo en el que viaja un amigo mío. Él quiere que en un momento determinado averigüe a qué altura está. En un momento me llama al móvil y me dice:

   - *no te muevas en ningún momento de donde estás y mide tu ángulo de visión hacia mi globo en este momento* - lo hago y es de 25º

   - *Bien, ahora voy a subir 20 metros*

   - *mide de nuevo tu ángulo de visión* - lo mido y es de 32º.

   - *Muy bien, ahora calcula a qué altura estoy*

   a. dibuja un esquema con los triángulos necesarios

   b. Averigua la altura teniendo en cuenta que mis ojos están a una altura de 1,6 metros del suelo.

3. Demuestra de forma rápida y sencilla que el área de cualquier triángulo se ajusta a la fórmula:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{a \cdot b \cdot sen\boldsymbol{\gamma}}{2}$$

$$donde\ \boldsymbol{a}\ y\ \boldsymbol{b}\ son\ dos\ lados\ cualquiera\ del\ triángulo$$

$$\boldsymbol{\gamma}\ es\ el\ ángulo\ que\ forman\ entre\ sí\ los\ lados\ \boldsymbol{a}\ y\ \boldsymbol{b}$$

4. Utilizando la fórmula anterior resuelve el siguiente problema: Un señor quiere comprarse una finca en un cierto pueblo. Uno de los habitantes le ofrece dos posibles fincas A y B. Las dos tienen forma de triángulo irregular y son colindantes (están pegadas una a otra) y son al mismo precio por m2 (pide por cualquiera de ellas el mismo precio por metro cuadrado) Miden ambas fincas por la longitud de las vallas y observan que:

   a. la finca A tiene unas medidas de 18x24x28 (en metros) siendo el lado de 28 metros el que está pegado a la finca B

   b. la finca B tiene unas medidas de 20x19x30 (en metros) siendo el lado de 30 metros el que está pegado a la finca A.

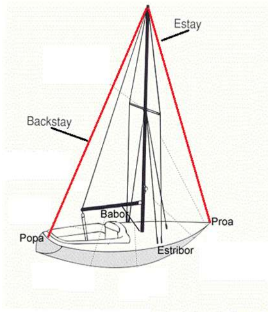
   Se pide:

   a. Haz un esquema de los triángulos.

   b. Calcula los ángulos de las esquinas opuestas al linde compartido

c. Averigua cuál es la finca más cara

5. En un barco de vela se coloca el mástil principal, en alto y vertical, sujetándolo con dos cables de acero en tensión: el stay o estay (se admiten las dos formas) y el backstay. El stay va desde lo alto del mástil hasta el extremo de la proa y el backstay hasta la popa, mirar el dibujo para hacerse una idea. Miguel tiene un velero en el que el stay mide 17,43 m y el backstay 16,44 m, ambos forman entre sí un ángulo de 34° 11’ 8,8”. Calcular: La eslora del barco de Miguel (la eslora es la longitud del barco, de proa a popa) La altura del mástil



6. Un barco a motor se encuentra en cierto punto del mar. La situación de los viajeros es dramática ya que en este momento les queda combustible para recorrer 400 metros. El capitán del barco observa en este punto la luz de un faro con un ángulo de elevación de 8º. Después de recorrer 250 metros en dirección hacia el faro, el ángulo que forma la luz con la horizontal del mar es ahora de 22º. ¿Qué altura tiene el faro? ¿Llegará el barco a tierra?

7. Juan ha heredado una finca de su abuelo en la aldea. Está en un terreno horizontal y tiene la forma de un cuadrilátero irregular. Desea saber el área de dicha finca, para ello denomina a los cuatro vértices de la misma con las letras A, B, C, y D, en el sentido de las agujas del reloj y mide las siguientes magnitudes:

   a. Lado AB, 200 metros.
   b. Desde A ve el punto C, desde el lado AB con un ángulo de 30º, y el punto D con 50º.
   c. Desde B observa el punto C, desde el lado AB con un ángulo de 125º y el punto D con 80º.

   Se pide:

   a. Las longitudes BC, AC, AD y CD y un esquema de la finca.
   b. Como Juan no sacó buenas notas en matemáticas de primero, no sabe cómo calcular el área de la finca. Ayúdale, calcula dicha área. (Pista: calcula las áreas de los triángulos ABC y ACD y súmalos).

8. Arturo es ingeniero forestal y quiere calcular la distancia que existe entre dos puntos A y B separados por un bosque muy frondoso, a través del cual no se pueden usar aparatos que midan dicha distancia. Para hacer la medición, encuentra un punto C desde el que se ven los dos puntos A y B y mide las siguientes magnitudes:

   a. Distancia AC 450 metros
   b. Distancia CB 325 metros.
   c. Ángulo ACB 70º (es decir el ángulo en C).

   Calcula la distancia AB.

9. Margarita ha terminado sus estudios de topografía y le han encargado que mida la altura de una torre situada en lo alto de una colina inaccesible desde donde se encuentra ella. Se le ocurre el siguiente procedimiento. Llama C a la parte alta de la torre y D a su base. Encuentra dos puntos sobre un terreno horizontal A y B separados 50 metros aptos para tomar mediciones de ángulos. Desde la horizontal AB obtiene las siguientes mediciones: Desde A visualiza C con un ángulo de 40º y D con un ángulo de 10º. Desde B observa a C con un ángulo de 60º y D con un ángulo de 20º.

   Con estos datos, ¿conseguirá Margarita resolver el problema?, justifícalo con un esquema. Si el problema tiene solución calcula tú la altura de la torre y la altura de su base sobre el lado AB. Haz un esquema del problema.

10. Carmen es la capitana del barco “Stella Maris”, acaba de salir de una tormenta, los aparatos de navegación no funcionan y no sabe a qué distancia está de la costa. Divisa en el horizonte un faro, que llamaremos F y mide el ángulo que forman su visual al faro con el rumbo del barco, resultando un ángulo de 30º. Mantiene el mismo rumbo durante 15 minutos a una velocidad de 20 km/h, dejando atrás el faro. En ese momento vuelve a medir el ángulo que forman su visual al faro (ahora ya a su espalda) con el rumbo del barco, el ángulo es de 50º. Calcula la distancia a la que se encuentra el “Stella Maris” de la costa (tomamos el faro como referencia de costa) y a qué distancia estaba cunado tomó la primera medición.

11. Una vez que Carmen ha conseguido calcular la distancia a la costa sigue navegando con normalidad con el deseo de alcanzar su puerto de destino P. En cierto momento divisa el siguiente faro G, la distancia entre los dos faros es de 19 Km, en ese momento su barco está a 20 Km del primer faro F y a 4,5 km del segundo, G. El ángulo que forman FGP es de 135º y el faro G está a 5 km del puerto. Si navega a 15 km/h en dirección al puerto ¿cuánto tiempo tardará en llegar a su destino?

12. En su siguiente travesía el “Setella Maris” desde un punto que llamaremos A recibe una señal de petición de auxilio de la radiobaliza de un barco, llamaremos al punto en el que se encuentra el barco naufragado, C. Esta señal la recibe también el “Furia del Mar”, que se encuentra en el punto B cuyo capitán es Uxío. Puestos es comunicación Uxio y Carmen, estiman que el “Stella Maris” y el “Furia del Mar” están separados 10 km. Desde el punto A, por la señal de radio, saben que el ángulo BAC es de 40º, mientras que desde el punto B el ángulo ABC es de 48º. Como es su obligación ambos barcos parten al rescate. Si el “Stella Maris” navega a 20 Km/h y el “Furia del Mar a 15 km/h, ¿quién de ellos llegará primero?

13. Una vez con los náufragos a bordo (ya habrás averiguado que barco llegó primero), hay que tomar la decisión de a qué puerto llevarlos, es decir, encontrar el puerto más cercano. Los posibles puertos son D y E. Desde el puerto D transmiten por radio que observan al barco con un ángulo de 50º, respecto a la línea DE. Desde el puerto E, la medición es de 35º. Sin embargo, el capitán responde que con esos datos no puede tomar la decisión. ¿Es correcta la respuesta del capitán? Justifícalo. Una vez averiguado qué puerto es el más cercano ¿qué dato pedirías para saber la distancia a la que estás del puerto más próximo?

14. Paseando con un amigo por el monte vemos a lo lejos una torre. Queremos averiguar a qué distancia se encuentra sin tener que llegar hasta ella. Mi compañero se aleja en dirección a la torre, 100 metros. Medimos el ángulo que nuestra visual con la torre y obtenemos 25° y 140°. Calcula a qué distancia estoy de la Torre.

15. Dos de los lados, de una finca de forma triangular miden 20 m y 15 m, respectivamente. El ángulo comprendido entre estos dos lados es de 70º.

    a. Si deseáramos vallar la finca, ¿cuántos metros de valla necesitaríamos?

    b. Si el metro lineal de valla cuesta 20 €, ¿tendremos suficiente con 1000 €? Razona tu respuesta.

16. Un pintor está trabajando en la fachada de una casa. Para hacerlo utiliza una escalera de 11 metros que tiene apoyada sobre la pared y forma un ángulo de 40º con el suelo. En un determinado momento la escalera resbala, pero sin caerse. Sigue apoyada en la pared, pero ahora su altura ha bajado 2m.

    a. ¿Qué ángulo formará la escalera con el suelo después del resbalón?

    b. ¿Qué espacio habrá retrocedido el punto de apoyo con el suelo?

17. De un triángulo conocemos dos de sus lados y un ángulo, a = 10 cm, b = 20 cm y A=30º. Calcular los demás datos del triángulo y su área

18. Estamos en el campo y en lo alto observamos a un halcón que vuela a 120 m de altura sobre el suelo, nuestro ángulo de visión con respecto al halcón en ese momento de 60º. Vemos también a una perdiz que está a 100 metros de altura sobre el suelo, nuestro ángulo de visión respecto a la perdiz es de 30º. El buitre lo ha vista y se lanza a por él ¿lo cazará? Tener en cuenta que e buitre sólo logrará alcanzar a la perdiz si la distancia entre ellos es menor de 150m, en otro caso a la perdiz le dará tiempo de esconderse entre los matorrales y la perderá. Es obligatorio hacer un esquema de la situación

19. Calcular sin utilizar la calculadora, el resto de razones trigonométricas (seno y coseno) de un ángulo α sabiendo que tgα=1/2 y que α pertenece al primer cuadrante.

20. Los alumnos de 1º de Bach estáis de excursión donde habéis ido a montar en globo, en una llanura enorme. Iván acaba de descender de uno de los globos y observa a Tania con sus prismáticos, que está subiendo a otro globo en ese momento, por la lectura de su aparato de observación sabe que él y Tania están a una distancia de 8 km. En el aire hay otro globo en el que viajan Alba y Joel, Iván los observa bajo un ángulo de 20º, en cambio Tania los ve bajo un ángulo de 35º. ¿A qué distancia está Tania del globo de Alba y Joel?

FICHA III TRIGONOMETRÍA: PROBLEMAS DE REFUERZO

21. Quiero calcular la altura de una torre a la que no me puedo acercar. Para ello dirijo mi mirada hasta el punto más alto de la torre y obtengo un ángulo de 27,25°. Me acerco todo lo que puedo (10 metros) y vuelvo a medir mi ángulo de visión, obteniendo 42,71°, Calcula la altura de la torre sabiendo que mis ojos están a una altura de 1,6 metros del suelo.

22. Un coche se dirige por una larga recta cuando el conductor divisa a su izquierda un pequeño torreón, en ese momento su ángulo de visión con respecto al pie de la torre es de 30°. Continúa por la misma recta durante 1 Km y en ese momento su ángulo de visión es de 45°5'24".

    a. Calcula la distancia a la que está el coche de la Torre desde su última posición.

    b. Si a 100 metros hay un cruce que le lleva directamente a la Torre, calcula el tiempo que tarda en llegar a ella si su velocidad es de 50Km/h

23. Calcula el área de un pentágono regular de 4 cm de lado. ¿y si fuese un polígono regular de 7 lados?

24. Queremos calcular la altura de un torreón cuya base es inaccesible y del que sabemos que estamos a una distancia de 50,4 metros. Para ello medimos el ángulo que forma la horizontal con nuestra línea de visión al punto más alto de la torre 37,38° y lo mismo pero con respecto a la base del torreón 6,79°.

25. Queremos calcular la altura de un torreón de base inaccesible, desconocemos nuestra distancia al torreón y para medir los ángulos nos subimos a un pequeño montículo de 3,6 metros de frente a la torre. Medimos nuestro ángulo de visión al punto más alto de la torre 55° y lo mismo al punto más bajo 16°. Tened en cuenta que mis ojos están a una altura de 1,4 metros.

26. No hay, es un error de las soluciones, donde pone ejercicio 26 es en realidad la continuación del problema 25

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

FICHA ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Resuelve las siguientes ecuaciones calculando las familias completas de soluciones y teniendo en cuenta la relación entre los ángulos de diferentes cuadrantes. Debe trabajarse en radianes.

1) $2\, sen\, x\, cos\, x = sen\, x$

2) $\cos(3x) + cos\, x = \cos(2x)$

3) $cos^2 x + 2\, sen\, x = 2$

4) $sen\, x + \cos x = 1$

5) $\cos x + \sqrt{3}\, senx = 0$

6) $4\, sen\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

7) $\cos\ (2x) + sen\, x = 4\, sen^2 x$

8) $\begin{cases} sen\ (x - y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\ (x + y) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

9) $\begin{cases} sen\, x\ \cos y = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos x\ \ sen\, y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

10) $\begin{cases} sen\, x + \cos y = \sqrt{3} \\ x - y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

11) $sen\ 2x = sen\, x$

12) $\cos x - sen\, x = 0$

13) $\begin{cases} sen\, x\ \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x\ sen\, y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

ANÁLISIS MATEMÁTICO

TEMA 4: FUNCIONES ELEMENTALES Y GRÁFICAS

CONCEPTOS BÁSICOS

¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?

Una función es una correspondencia entre dos conjuntos (en nuestro caso sólo consideramos el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$) que a cada número del primer conjunto le asigna UNO Y SÓLO UNO de los números del segundo conjunto, al que llamaremos *imagen*.

Un punto, por tanto, NUNCA PUEDE TENER MÁS DE UNA IMAGEN.

¿QUÉ ES EL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN?

Definición en lenguaje matemático: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \quad / \exists y \in \mathbb{R} \ tal\ que\ y = f(x)\}$ (no hay que sabérselo, es sólo para que os vayáis familiarizando con este lenguaje y lo sepáis "traducir" correctamente)

En lenguaje corriente lo que dice literalmente es: *"conjunto de los números reales que tienen imagen mediante f"*.

Ejemplo:

La función $f(x) = \frac{1}{x}$ está definida para cualquier nº real EXCEPTO para el cero, ya que $\frac{1}{0} = \pm\infty \notin \mathbb{R}$

¡Ojo! el infinito SÍ existe, pero NO ES UN NÚMERO y por tanto, **no pertenece** a $\mathbb{R}$, así que:

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Lo que en lenguaje ordinario quiere decir *"todos los números reales, excepto el cero"*

NOTA: Es importante que distingáis entre el símbolo $\nexists$ que significa "NO EXISTE" y el símbolo $\notin$ que significa "NO PERTENECE". Sé que los símbolos se parecen y para un disléxico sería fácil confundirlos pero significan cosas completamente diferentes y es importante no confundirlos nunca.

¿QUÉ ES EL RECORRIDO O RANGO DE UNA FUNCIÓN?

Es el conjunto de las imágenes, el conjunto de los números que son imagen de otro.
Lo mismo, escrito en lenguaje matemático: $Img(f) =: \{y \in \mathbb{R} \quad / \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}$

¿QUÉ ES LA ECUACIÓN DE UNA FUNCIÓN?

Es la relación que indica, en lenguaje matemático, las operaciones que hay que hacer para transformar x en y

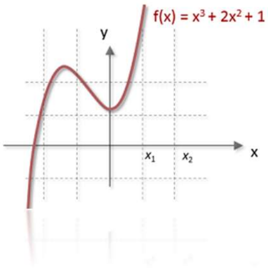
Ejemplo:
La función "Sumar 3" se escribe en matemáticas $f(x) = x + 3$

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN: REPRESENTACIÓN Y DESCRIPCIÓN

Llamamos GRÁFICA de la función, al dibujo o representación sobre un plano que resulta de dibujar sobre un par de ejes cartesianos (X e Y) los pares de valores $(x, f(x))$ que obtenemos de una tabla de valores.

DESCRIPCIÓN

En general, estas son las cosas que se indican cuando te piden describir la gráfica de una función:



1. Le ponemos "nombre" (función polinómica, de qué grado, racional, irracional, hipérbola, trigonométrica, a trozos, valor absoluto, etc., etc.)
2. Calculamos su **DOMINIO**
3. **CONTINUIDAD**, en caso de discontinuidad tipo de discontinuidad (por ahora no lo hemos dado)
4. **DERIVABILIDAD** mientras no demos derivadas nos limitamos a ver: que sea continua (**DONDE NO ES CONTINUA TAMPOCO ES DERIVABLE**) y si tiene "esquinas"
5. **PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES**:
   a. Con el eje X
   b. Con el eje Y
6. **SIMETRÍA** (cuando proceda)
7. **CURVATURA**: si es cóncava o convexa, intervalos de curvatura (cuando proceda)
8. **CRECIMIENTO** e intervalos de crecimiento (cuando proceda)
9. **MÁXIMOS Y MÍNIMOS** (cuando proceda)
10. **PUNTOS DE INFLEXIÓN** (cuando proceda)
11. **ASÍNTOTAS Y RAMAS PARABÓLICAS** *(por ahora y mientras no demos límites, lo hacemos mirando la gráfica, en cualquier caso, sólo se dan en curvas, no en rectas)*
12. **IMAGEN**, rango o recorrido *(por ahora mirando la gráfica)*
13. **PERIODICIDAD** (cuando proceda)
14. A continuación se dibuja su gráfica sobre un par de ejes coordenados, teniendo en cuenta las características que acabamos de describir.

FUNCIONES POLINÓMICAS

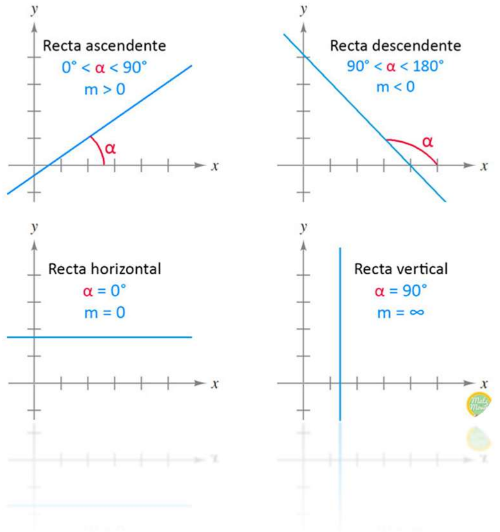
RECTAS (FUNCIONES POLINÓMICAS DE GRADO 1)

En general, una recta es la **gráfica de una función polinómica de grado uno.**

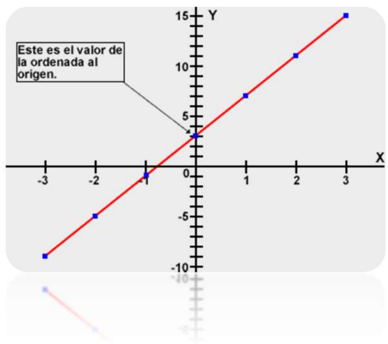
Se expresa mediante la ecuación $y = mx + n$ siendo:

- ***m*** pendiente o grado de inclinación de la recta. Se calcula como la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo del eje X o eje de abscisas: $m = \operatorname{tg} \alpha$.

  Obvio que cuando m>0 la recta es creciente y cuando m<0 la recta es decreciente



- ***n*** ordenada en el origen, es decir lo que vale "y" cuando la "x" vale 0



Para dibujar cualquier recta **son necesarios y suficientes dos puntos**.

Casos especiales:

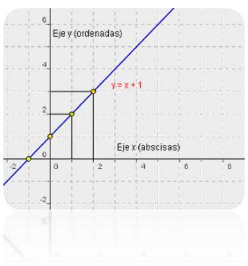
- Las rectas paralelas al eje X o **funciones constantes**, tienen pendiente 0, son constantes y su ecuación es de la forma: $\boldsymbol{y = n}$
- Las rectas paralelas al eje Y, NO SON FUNCIONES (**es la única excepción**) y vienen dadas por una ecuación del tipo $\boldsymbol{x = k}$, en este caso la pendiente es ∞ (forman un ángulo de 90° con el eje X)
- Las rectas que pasan por el origen de coordenadas o punto (0,0) se llaman **funciones lineales** y su gráfica es de la forma $y = mx$

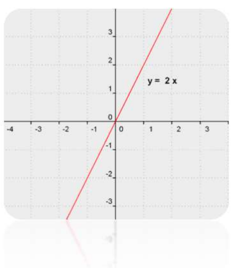
- Las demás rectas se llaman **funciones afines** y su ecuación es la ya indicada: $y = mx + n$

Descripción

1. Le ponemos "nombre":
   a. si pasa por el (0,0) , *función lineal*
   b. si no, *función afín*
   c. y si es el caso especial de una recta paralela al eje X, se llama *función constante*
2. Como es una función polinómica se cumple que: $Dom(f) = \mathbb{R}$
3. Además por ser función polinómica es continua en todo $\mathbb{R}$
4. También por ser función polinómica es derivable (no tiene "esquinas") en todo $\mathbb{R}$
5. **Puntos de corte con los ejes**:
   a. El punto de corte con el eje X es $\left(-\frac{n}{m}, 0\right)$
   b. El punto de corte con el eje Y es $(0, n)$
6. **Simetría**: cualquier recta es simétrica con respecto a cualquiera de sus puntos. ¿Qué quiere decir esto? Dibuja un recta cualquiera, elige un punto de la recta y márcalo bien, traza una cruz que tenga su centro en ese punto, ahora hazle dos dobleces al folio justo por esa cruz: fíjate bien los tramos de la recta se han superpuesto uno a otro.
7. **Curvatura** (no procede en este caso por ser una recta)
8. **Crecimiento**: (calculamos m, su pendiente)
   a. Si $\mathrm{m} > 0 \Rightarrow$ es creciente
   b. Si $\mathrm{m} < 0 \Rightarrow$ es decreciente
   c. Si $\mathrm{m} = 0$ escribimos $\Rightarrow$ es constante y paralela al eje X
9. No tienen máximos, ni mínimos
10. Puntos de inflexión (no procede en este caso por ser una recta)
11. **Asíntotas y ramas parabólicas** (no procede en este caso por ser una recta)
12. $Img(f) = \mathbb{R}$
13. **Periodicidad:** no tiene
14. A continuación se dibuja su gráfica. Pasos para representar o dibujar la GRÁFICA de una recta:
    1. Calculada su pendiente m
    2. Calculada su ordenada en el origen n
    3. Calculado el punto de corte con el eje X.
    4. Dibujamos esos valores en un par de ejes coordenados y los unimos trazando una línea recta con una regla

Ejemplos:

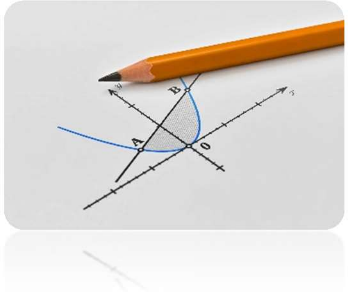




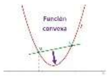
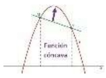
FUNCIÓN CUADRÁTICA: PARÁBOLAS (FUNCIONES POLINÓMICAS DE GRADO 2)

Una parábola es la gráfica de una función polinómica de grado 2, su fórmula es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ \ , donde\ a, b, c\ \in \mathbb{R}$$



Descripción

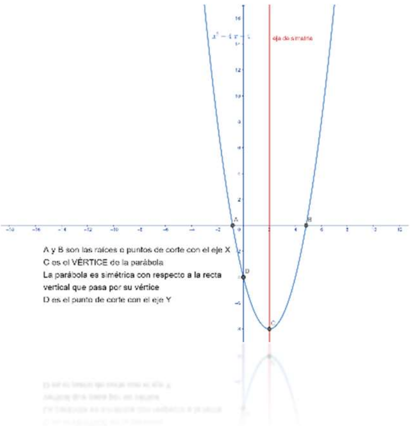
1. Indicamos su nombre: parábola
2. Como es una función polinómica se cumple que: $Dom(f) = \mathbb{R}$
3. Por ser función polinómica es continua
4. Por ser función polinómica es derivable (no tiene "esquinas") en todo $\mathbb{R}$
5. Puntos de corte con los ejes:
   a. Puntos de corte con el eje X: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
   b. Punto de corte con el eje Y: igualando la $x = 0$ obtenemos el punto de corte: (0,c)
6. Simetría: calculamos su vértice $x = \frac{-b}{2a}$, todas las parábolas son simétricas con respecto a la recta vertical que pasa por su vértice.
7. Curvatura
   a. Si $a > 0 \Rightarrow$ CONVEXA 
   b. Si $a < 0 \Rightarrow$ CÓNCAVA 
8. Crecimiento: indicamos los intervalos en los que la función es creciente y decreciente
9. Máximos y mínimos:
   a. Si la parábola es convexa $\Rightarrow$ tendrá un mínimo absoluto en su vértice
   b. Si la parábola es cóncava $\Rightarrow$ tendrá un máximo absoluto en su vértice
10. Punto de inflexión: no tiene, las parábolas no cambian de curvatura: o son cóncavas o son convexas.
11. Ramas infinitas: Asíntotas y ramas parabólicas
    a. Ramas parabólicas:
       i. Si la parábola es convexa $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
       ii. Si la parábola es cóncava $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
    b. Asíntotas: no tiene
12. Calculamos su rango $Img(f)$
    a. Si la parábola es convexa $\Rightarrow$ $\text{Img(f)} = \left[-\frac{b}{2a}, \infty\right[$
    b. Si la parábola es cóncava $\Rightarrow$ $\text{Img(f)} = \left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$
13. Periodicidad: no tiene
14. A continuación se dibuja su gráfica. Los pasos para representarla:
    a. Calculados los puntos de corte con los ejes
    b. Calculado el vértice
    c. Teniendo en cuenta su curvatura, representamos esos puntos sobre los ejes coordenados y los unimos teniendo en cuenta que es una curva, no tiene "esquinas"

Ejemplos

1. Parábola convexa $y = x^2 - 4x - 4$
2. Parábola cóncava $y = -x^2 + 2x + 6$
3. Parábola que no corta al eje X, convexa: $y = x^2 - 4x + 7$
4. Parábola que no corta al eje X, cóncava: $y = -x^2 - 4x - 5$

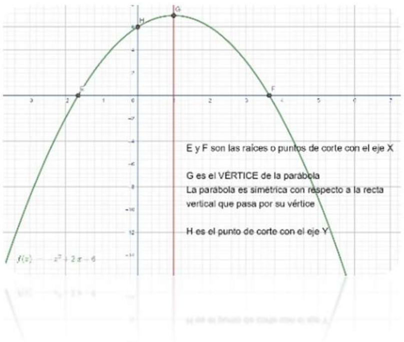
Ejemplo 1

Parábola convexa que corta al EJE X



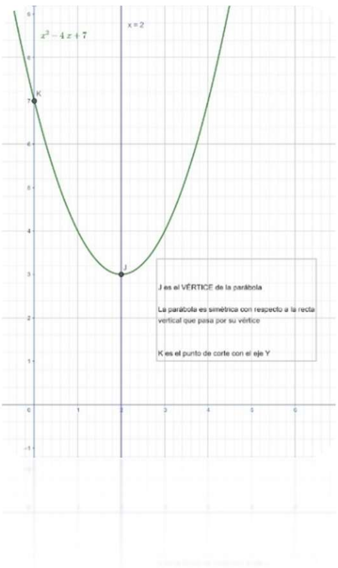
Ejemplo 2

Parábola cóncava que corta al EJE X



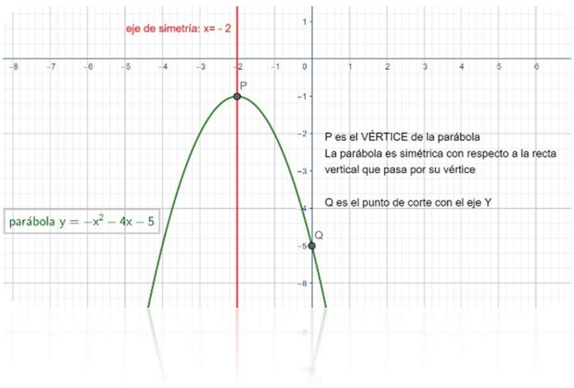
Ejemplo 3

Parábola convexa que NO corta al EJE X



Ejemplo 4

Parábola cóncava que NO corta al EJE X



FUNCIONES POLINÓMICAS DE GRADO 3

No tienen ningún nombre "especial". Su fórmula es $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

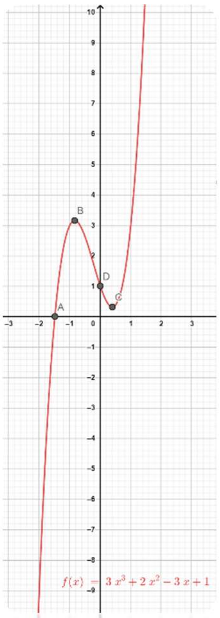
Para calcular sus puntos de corte tenemos necesariamente que aplicar al menos una vez Ruffini o sacar factor común x (en el caso de que no esté el término independiente) para poder reducirla a una ecuación de segundo grado.

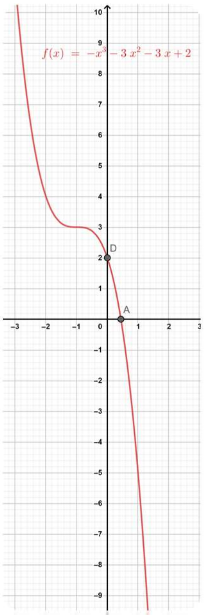
Su característica fundamental es que la mitad de la gráfica es convexa (o cóncava) y en la otra se invierte la curvatura, pasando de convexa a cóncava y viceversa. Son simétricas con respecto a su punto de inflexión (el punto en el que cambia su curvatura) y derivables (sin "esquinas")

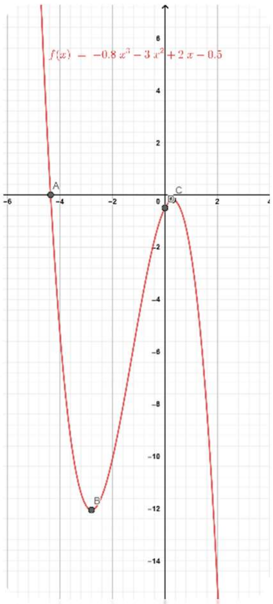
Descripción

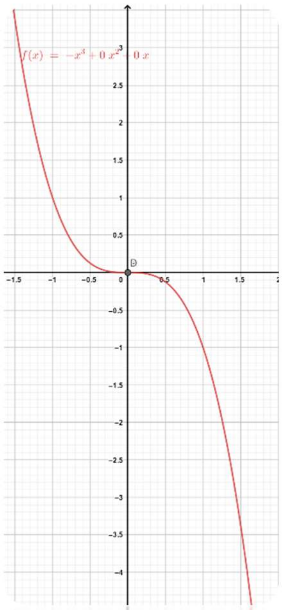
1. Indicamos su nombre: función polinómica de grado 3
2. Como es una función polinómica se cumple que: $Dom(f) = \mathbb{R}$
3. Por ser función polinómica es continua en todo $\mathbb{R}$
4. Por ser función polinómica es derivable (no tiene "esquinas") en todo $\mathbb{R}$
5. Puntos de corte con los ejes:
    a. Puntos de corte con el eje X: Para calcular sus puntos de corte tenemos necesariamente que aplicar al menos una vez Ruffini o sacar factor común x (en el caso de que no esté el término independiente) para poder reducirla a una ecuación de segundo grado.
    b. Punto de corte con el eje Y: igualando la $x = 0$ obtenemos el punto de corte: (0 , d)
6. Simetría: simétricas con respecto a su punto de inflexión (por ahora no tenéis herramientas para calcularlo así que, salvo que se vea a simple vista, os conformaréis con eso).
7. Curvatura: podemos dividir su gráfica en dos tramos, uno cóncavo y otro convexo, separados por su punto de inflexión.
8. Crecimiento: indicamos los intervalos en los que la función es creciente y decreciente
9. Máximos y mínimos:
    a. En el tramo convexo ⇒podría tener un mínimo RELATIVO en su vértice (para calcularlo se necesita saber derivar así que por ahora, salvo que se vea a simple vista, lo dejaréis así)
    b. En el tramo cóncavo ⇒ podría tener un máximo RELATIVO en su vértice (para calcularlo se necesita saber derivar así que por ahora, salvo que se vea a simple vista, lo dejaréis así)
10. Punto de inflexión: tiene uno entre el tramo cóncavo y el convexo, salvo que se vea a simple vista, lo dejaréis así.
11. Ramas infinitas: Asíntotas y ramas parabólicas
    a. Ramas parabólicas:
        i. Si pasa de convexa a cóncava $\backsim\!\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
        ii. Si pasa de cóncava a convexa $\backsim\!\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
    b. Asíntotas: no tiene
12. Rango $Img(f) = \mathbb{R}$
13. Periodicidad: no tiene
14. A continuación se dibuja su gráfica. Los pasos para representarla:
    a. Calculados los puntos de corte con los ejes
    b. Si tenemos el punto de inflexión (por ahora no tenéis herramientas para calcularlos, así que, de pedir eso en un ejercicio o en un examen en este momento, tendría que daros yo los puntos y alguna pista sobre la curvatura o no podríais hacerlo, obviamente en el examen del lunes como mucho podréis representar la función $f(x) = x^3$)
    c. Representamos esos puntos sobre los ejes coordenados y los unimos teniendo en cuenta que es una curva, no tiene "esquinas"

Ejemplos:





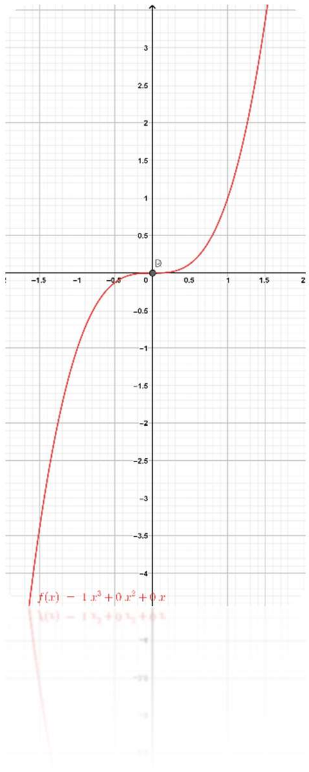




En el siguiente enlace podéis ver cómo cambia la gráfica de una función polinómica de grado tres haciendo variar los valores a, b, c, y d

https://www.edu.xunta.gal/centros/iesafonsoxcambre/aulavirtual/mod/geogebra/view.php?id=11037

Ejemplo práctico: Gráfica y descripción de $f(x) = x^3$



1. Función polinómica de grado 3Por ser función polinómica $\Rightarrow Dom(f) = \mathbb{R}$
3. Por ser función polinómica es continua en todo $\mathbb{R}$
4. Por ser función polinómica es derivable (no tiene "esquinas") en todo $\mathbb{R}$
5. Puntos de corte con los ejes:
    a. Puntos de corte con el eje X: $igualamos\ y = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0\ ;\ punto\ (0,0)$

    b. Punto de corte con el eje Y: $igualamos\ x = 0 \Rightarrow 0^3 = 0 \Rightarrow y = 0\ ;\ punto\ (0,0)$

6. Simétrica con respecto a su punto de inflexión, se puede ver en la gráfica que es el punto (0,0)
    a. Curvatura: pasa de cóncava a convexa, $en\ (-\infty, 0)\ es\ cóncava$ y $en\ (0, \infty)\ es\ convexa$
7. Crecimiento: ver en la gráfica que es creciente en todo $\mathbb{R}$
8. Máximos y mínimos: no tiene
9. Punto de inflexión: (0,0) se ve en la gráfica.
10. Ramas infinitas: Asíntotas y ramas parabólicas (se ve en la gráfica)
    a. Ramas parabólicas: $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\ ;\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

    b. Asíntotas: no tiene
11. Rango $Img(f) = \mathbb{R}$
12. Periodicidad: no tiene

FUNCIONES RACIONALES

Llamamos funciones racionales a aquellas cuya ecuación viene definida por fracciones algebraicas (cocientes de funciones polinómicas)

Pasos para calcular el dominio de cualquier función racional:

1. Observamos el denominador (la parte de debajo de la fracción) y buscamos los puntos conflictivos, igualándolo a 0

2. El dominio estará formado por todos los números reales excepto aquellos en los que se anula el denominador (los que calculamos antes)

HIPÉRBOLAS

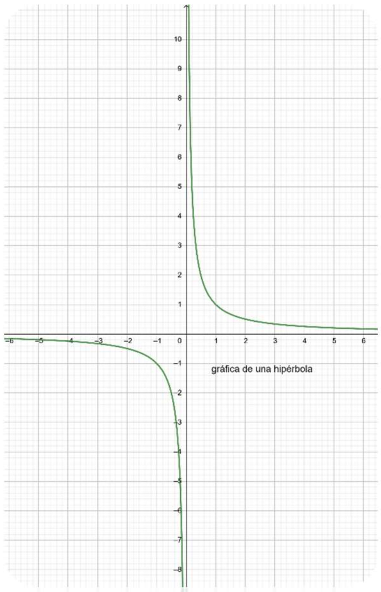
Es el caso particular de funciones racionales de grado 1. Su ecuación viene definida de la forma:

$$f(x) = \frac{a}{mx + n} + b \quad donde\ a, b, m\ , n \in \mathbb{R}$$

A continuación se puede ver cómo es su gráfica y cómo va cambiando según sus parámetros: https://www.geogebra.org/graphing/sswmmtxh

Ejemplo

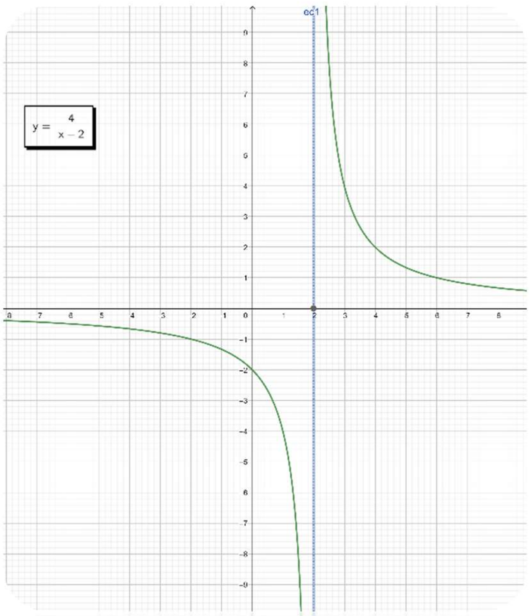
Dibuja y describe la gráfica de la función: $f(x) = \frac{1}{x}$



1. Es una hipérbola
2. $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
3. Es continua en su dominio $\mathbb{R} - \{0\}$ y discontinua en el 0, en el que presenta un salto infinito *(más adelante veremos que a esto se le llama discontinuidad Tipo I, pero por ahora no hay que saberlo)*
4. Es derivable en su dominio, es decir en $\mathbb{R} - \{0\}$ *(mientras no demos derivadas nos limitamos a ver que no tiene "esquinas")*
5. Puntos de corte con los ejes:
    a. Con el eje X: no tiene
    b. Con el eje Y: no tiene
6. En la gráfica podemos ver que es simétrica con respecto al punto (0,0)
    a. La gráfica está dividida en dos ramas: En $(-\infty, 0)$ es cóncava y en $(0, \infty)$ es convexa
7. Es decreciente en todo su dominio.
8. Máximos y mínimos: no tiene
9. Puntos de inflexión: no tiene, aunque la función cambia drásticamente su curvatura en el 0, no alcanza ese punto ya que el $0 \notin Dom(f)$
10. Asíntotas
    a. Asíntota horizontal en el eje X, esto en lenguaje matemático se escribe así $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ $y\ además$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ *(Por ahora no hay que saberlo)*
    b. Asíntota vertical en el eje Y, esto en lenguaje matemático se escribe así:

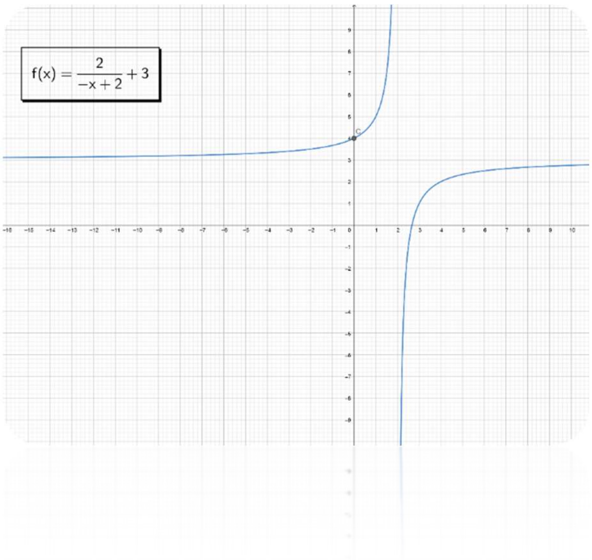
    $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $y\ además$ $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = \infty$ *(Por ahora no hay que saberlo)*
11. Imagen, rango o recorrido: $Img\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R} - \{0\}$
12. No es periódica

Otros ejemplos de gráficas de hipérbolas



1. Hipérbola
2. $\mathrm{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{2\}$
3. Continua en $\mathrm{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{2\}$
4. Derivable en $\mathrm{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{2\}$
5. Puntos de corte con los ejes (0,4) y (8/3, 0)
6. Simétrica con respecto al punto (2,3)
7. Convexa en (-∞,2) y cóncava en (2,∞)
8. Creciente en $\mathrm{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{2\}$
9. No tiene máximos ni mínimos
10. Puntos de inflexión: no tiene
11. Asíntota horizontal en y=3, asíntota vertical en x=2
12. $Img\left(\frac{2}{-x+2} + 3\right) = \mathbb{R} - \{3\}$
13. No es periódica

1. Hipérbola
2. $\mathrm{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{2\}$
3. Continua en $\mathrm{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{2\}$
4. Derivable en $\mathrm{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{2\}$
5. Puntos de corte con los ejes: (-2,0)
6. Simétrica con respecto al punto (2,0)
7. Cóncava en (-∞,2) y convexa en (2,∞)
8. Decreciente en $\mathrm{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{2\}$
9. No tiene máximos ni mínimos
10. Puntos de inflexión: no tiene
11. Asíntota horizontal en y=0, asíntota vertical en x=2
12. $Img\left(\frac{4}{x+2}\right) = \mathbb{R} - \{0\}$
13. No es periódica



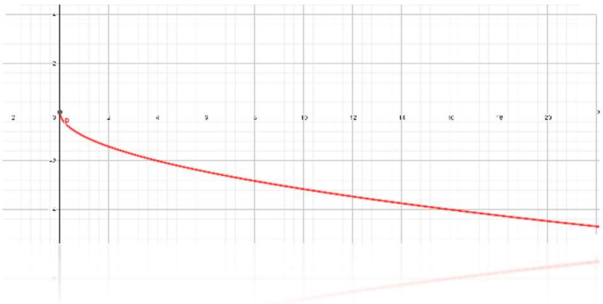
FUNCIONES RADICALES O IRRACIONALES

Funciones en las que x aparece dentro de una raíz de índice PAR

Antes de nada aclarar que $y = \pm\sqrt{x}$ NO ES UNA FUNCIÓN sino, en realidad, DOS FUNCIONES DIFERENTES:

$f(x) = +\sqrt{x}$ y la función $g(x) = -\sqrt{x}$. Pasa lo mismo para cualquier raíz de índice par.

Sus gráficas serían:



Ambas gráficas son simétricas una de la otra con respecto al eje X

1. Función radical
2. $\mathrm{Dom(f)} = [0, \infty)$
3. $\mathrm{Img}(\sqrt{x}) = [0, \infty)$
4. Continua en su dominio $\mathrm{Dom(f)} = [0, \infty)$
5. Derivable en su dominio $\mathrm{Dom(f)} = [0, \infty)$
6. Punto de corte con los ejes: $(0,0)$
7. Simetría: no tiene
8. Cóncava en su dominio $\mathrm{Dom(f)} = [0, \infty)$
9. Creciente en su dominio $\mathrm{Dom(f)} = [0, \infty)$
10. No tiene máximos, tiene un mínimo absoluto en $(0,0)$
11. Puntos de inflexión: no tiene
12. Asíntotas: no tiene. Rama parabólica, toda ella, $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$
13. No es periódica

1. Función radical
2. $\mathrm{Dom(f)} = [0, \infty)$
3. $\mathrm{Img}(-\sqrt{x}) = (-\infty, 0]$
4. Continua en su dominio $\mathrm{Dom(f)} = [0, \infty)$
5. Derivable en su dominio $\mathrm{Dom(f)} = [0, \infty)$
6. Punto de corte con los ejes: $(0,0)$
7. Simetría: no tiene
8. Convexa en su dominio $\mathrm{Dom(f)} = [0, \infty)$
9. Decreciente en su dominio $\mathrm{Dom(f)} = [0, \infty)$
10. Tiene un máximo absoluto en $(0,0)$. No tiene mínimos
11. Puntos de inflexión: no tiene
12. Asíntotas: no tiene. Rama parabólica, toda ella, $\lim_{x\to\infty} -\sqrt{x} = -\infty$
13. No es periódica

Otros ejemplos:

1) $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{3}$

2) $y = \sqrt{3x-2} + 3\sqrt{2x-3}$

3) $y = \dfrac{x-\sqrt{x}}{2}$

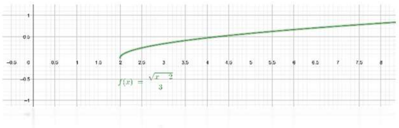
4) $y = -\dfrac{x+\sqrt{x}}{5}$

5) $y = \sqrt{-x+2} - 5$

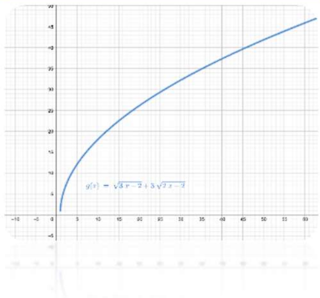
Lo que siempre hay que hacer con estas funciones es **calcular primero su dominio**: aquellos puntos en los que el radicando (lo de dentro de la raíz) es positivo, **resolviendo** para ello **la inecuación correspondiente**.

A continuación se muestran las gráficas de las 5 funciones de los ejemplos anteriores:

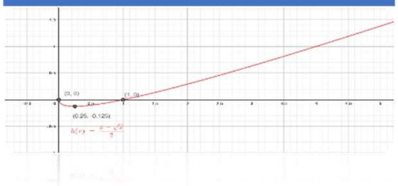
Ejemplo 1



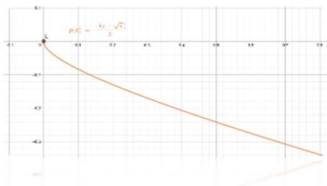
Ejemplo 2



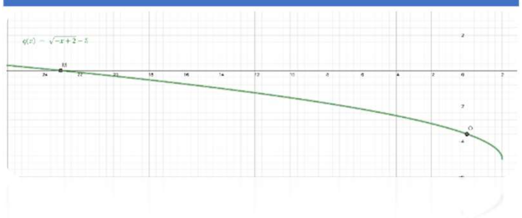
Ejemplo 3



Ejemplo 4



Ejemplo 5



Todas ellas tienen en común que son continuas en su dominio y derivables en su dominio, todas están formadas por una única rama parabólica, no hay asíntotas y pueden ser ó cóncavas ó convexas (una cosa o la otra, pero no ambas cosas), sin tener puntos de inflexión.

Pueden ser ó crecientes ó decrecientes (una cosa o la otra, pero no ambas), y pueden tener extremos relativos en su nacimiento.

FICHA INECUACIONES

Calcula los intervalos de solución de las siguientes inecuaciones:

1. $-\frac{x-1}{4}+1<\frac{3x-3}{2}$
2. $\frac{x-2}{3}-\frac{x-1}{4}>\frac{x-3}{2}-1$
3. $x^2-8x+12\le 0$
4. $x^2+x-6>0$
5. $\begin{cases}\frac{4x-1}{3}-\frac{x}{2}\ge 5\\ \frac{x-5}{3}+\frac{x}{2}>1\end{cases}$
6. $\begin{cases}\frac{x+3}{2}-2x>\frac{5x-3}{3}-2\\ \frac{x-2}{3}+1<\frac{x+3}{2}+x\end{cases}$
7. $x+3y\le 0$
8. $\begin{cases}x-y>0\\ 3x-y<4\\ x+y>0\end{cases}$
9. $|1-3x|<5$
10. $|x^2-4x|>0$
11. $\frac{x+2}{x-3}<0$
12. $\frac{1}{x+1}\le 1+\frac{2}{x-1}$

FICHA DE DOMINIOS I

Calcula el dominio de las siguientes funciones:

FRACCIONES ALGEBRAICAS

1) $y=\frac{3-x}{3x-x^2}$

2) $y=\frac{x-3}{x^2-9}x$

3) $y=\frac{2+x}{x^2}$

4) $y=\frac{x-1}{x^2+1}$

5) $y=\frac{1}{x-2}-\frac{x}{x+2}$

6) $y=\frac{(x-1)}{2x^3+2x+x^2+1}$

IRRACIONALES (CON RAÍCES)

7) $y=\sqrt{x^2-1}$

8) $y=\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-2}$

9) $y=\sqrt{3x-2}+3\sqrt{2x-3}$

10) $y=\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-1}$

11) $y=\frac{x+\sqrt{x}}{x^2+1}$

12) $y=\frac{x+1}{\sqrt[3]{-2x}}$

13) $y=\frac{1}{x-3}+\sqrt{x+2}$

14) $y=\frac{3}{\sqrt{x-2}-x}$

15) $y = \dfrac{\sqrt{2x} - x}{x - 2}$

16) $y = \sqrt{\dfrac{5x}{x - 3}}$

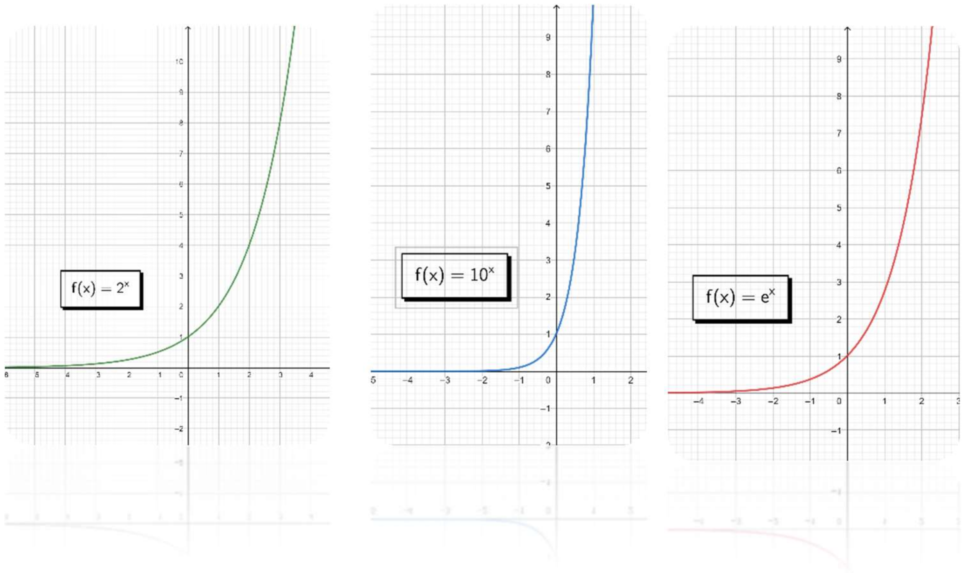
17) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x - 3}}$

18) $y = \dfrac{3\sqrt{x - \pi}}{1 - \cos x}$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

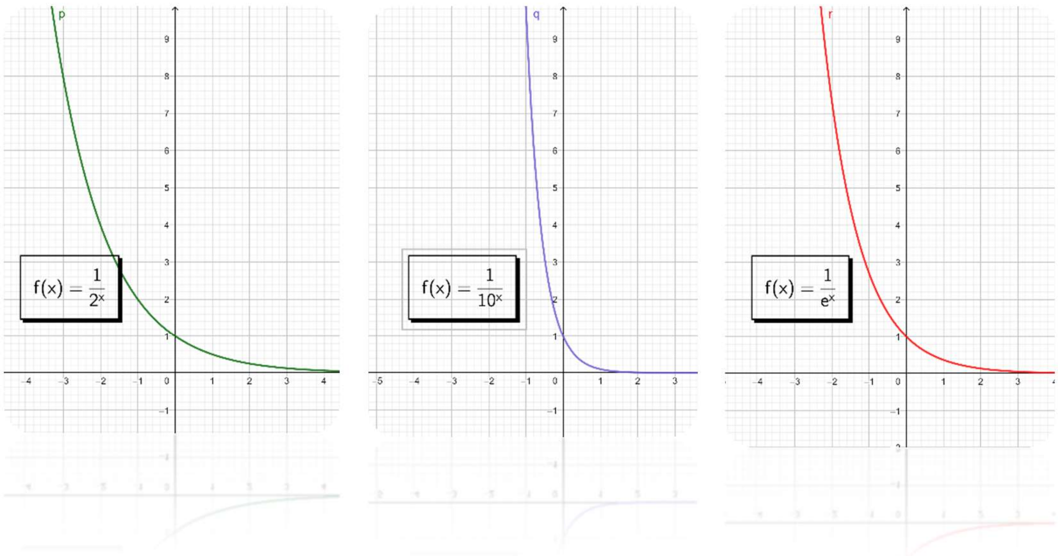
Llamamos así a cualquier función donde la variable independiente figura como exponente de una potencia. Se ajusta a la fórmula $f(x) = a^{g(x)} + k, donde\ a > 0, a \neq 1\ y\ a, k \in \mathbb{R}$

Por ahora las gráficas que trataremos son las básicas o elementales, aquellas en las que el exponente sea un polinomio de grado 1, de la forma $f(x) = a^{mx+n} + k, donde\ a > 0\ , a \neq 1\ y\ a, k, m\ , n \in \mathbb{R}$



Las más habituales son las que son en base 2, 10 y *e*

- Todas son CONVEXAS
- Si a>1 son crecientes.
- Si 0<a<1 son decrecientes.



Es fácil comprobar que las gráficas: $a^x\ y\ \frac{1}{a^x}$ con 1<a son simétricas una de la otra con respecto al eje Y

DESCRIPCIÓN DE LAS GRÁFICAS $f(x) = a^x$ (RECORDEMOS QUE $a > 0\ y\ a \neq 1$ SIEMPRE)

1. Función exponencial
2. $Dom(f) = \mathbb{R}$
3. Continua en todo $\mathbb{R}$
4. Derivable en todo $\mathbb{R}$
5. Puntos de corte con los ejes: (0,1)
6. La gráfica de $f(x) = a^x$ es simétrica a la gráfica de $\frac{1}{a^x}$ con respecto al eje Y
7. Curvatura: Son todas convexas
8. Crecimiento:
    a. Si a>1 son crecientes.
    b. Si 0<a<1 son decrecientes.
9. Máximos y mínimos: no tienen
10. Puntos de inflexión: no tienen
11. Asíntotas y ramas parabólicas:
    a. Asíntota horizontal en el eje X
        i. Si a>1 $\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$
        ii. Si a<1 $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} a^x = 0$
    b. Asíntota vertical: no tienen
    c. Ramas parabólicas:
        i. Si a>1 $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} a^x = \infty$
        ii. Si a<1 $\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$
12. Imagen, rango o recorrido: $Img(a^x) = (0, \infty)$
13. No es periódica

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

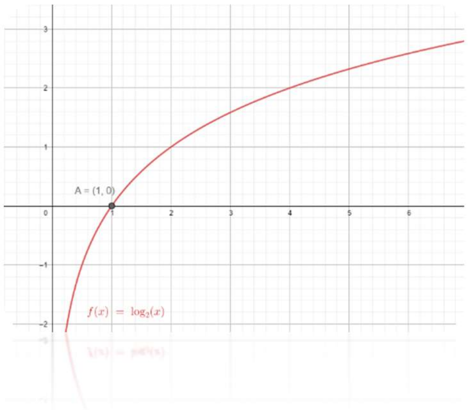
DEFINICIÓN DE FUNCIÓN LOGARÍTMICA

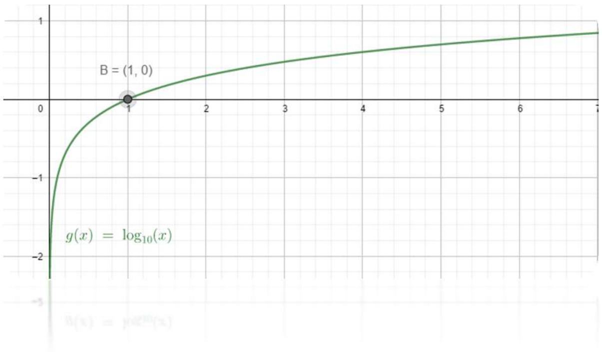
Para cualquier número real $a \in \mathbb{R}, con\ a > 0\ y\ a \neq 1$ definimos la función logarítmica en base a como:

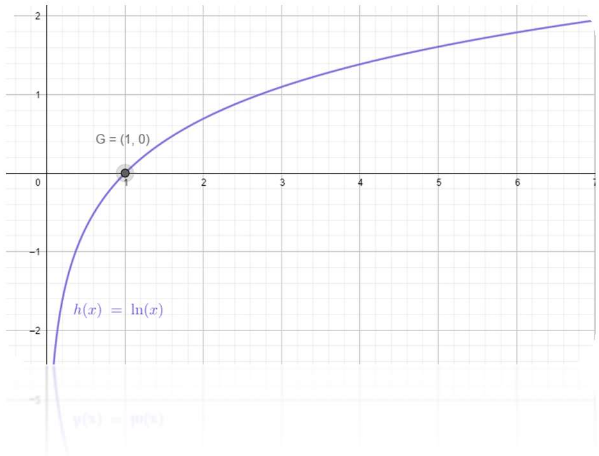
$$f(x) = \log_a x = y\ \ ; y\ es\ el\ exponente\ al\ que\ hay\ que\ elevar\ a\ para\ obtener\ x, es\ decir: a^y = x$$

Las bases más habituales son 2, 10 y e. Mostramos a continuación sus gráficas. **Todas las gráficas donde a>1 son semejantes.**

DESCRIPCIÓN DE LA GRÁFICA DE CUALQUIER FUNCIÓN LOGARÍTMICA CON BASE a>1







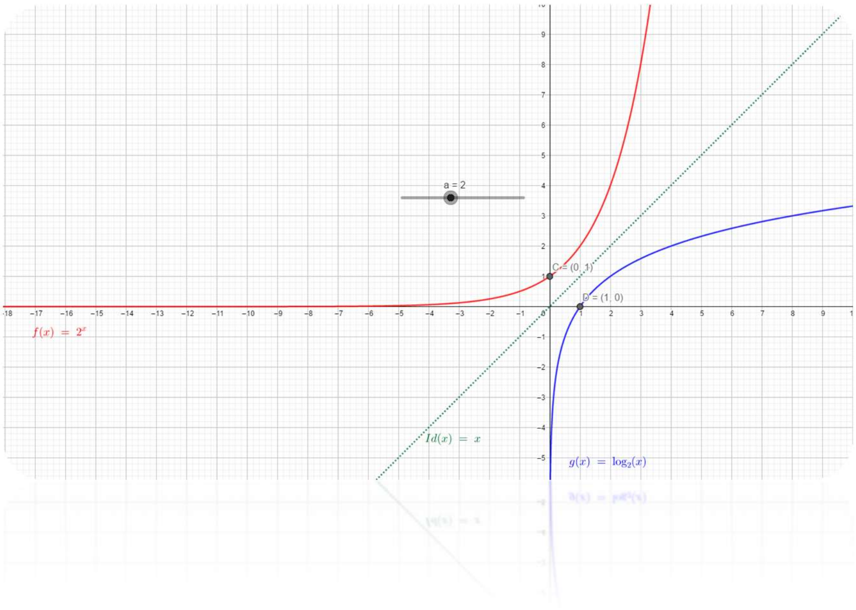
1. Función logarítmica
2. $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$
3. Continua en su dominio $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$
4. Derivable en su dominio $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$
5. Punto de corte con los ejes: (1,0)
6. Simetría: no tiene
7. Cóncava en su dominio $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$
8. Creciente en su dominio $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$
9. No tiene máximos ni mínimos
10. No tiene puntos de inflexión
11. Asíntotas y ramas parabólicas:
    a. Tiene una asíntota vertical en el eje Y $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$
    b. Tiene una rama parabólica $\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty$
12. $Img(\log_a x) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
13. No es periódica

SIMETRÍAS ENTRE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Si comparamos esta gráfica con la de $y = a^x$ observamos que ambas son simétricas una de otra con respecto a la recta $y = x$ (más adelante, explicaremos lo que son las funciones inversas o recíprocas y veremos que estas dos funciones son una la inversa de la otra)

En el siguiente enlace puedes ver cómo se modifican las gráficas $a^x\ y\ \log_a x$ según variamos a (teniendo en cuenta que $a > 0\ , a \neq 1\ SIEMPRE$

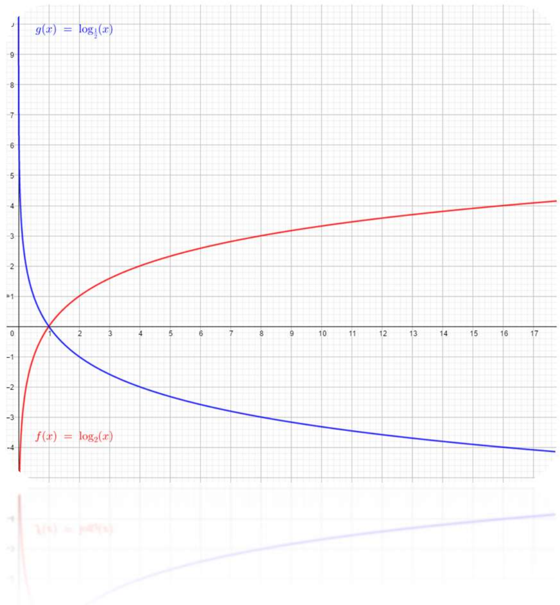
https://www.geogebra.org/graphing/mny9sfrv



SIMETRÍA ENTRE LAS FUNCIONES $\log_a x$ Y $\log_{\frac{1}{a}} x$, DONDE a>1

En el siguiente ejemplo se muestran las gráficas $\log_2 x$ y $\log_{\frac{1}{2}} x$ ambas son simétricas una de la otra con respecto al eje Y.

DESCRIPCIÓN DE LA GRÁFICA $\log_{\frac{1}{2}} x$



(En la imagen es la gráfica de color azul)

1. $\mathrm{Dom(f)} = (0, \infty)$
2. Continua en su dominio $\mathrm{Dom(f)} = (0, \infty)$
3. Derivable en su dominio $\mathrm{Dom(f)} = (0, \infty)$
4. Punto de corte con los ejes: (1,0)
5. Simetría: es simétrica con respecto a $y = \log_2 x$ con respecto al eje X
6. Convexa en su dominio $\mathrm{Dom(f)} = (0, \infty)$
7. Decreciente en su dominio $\mathrm{Dom(f)} = (0, \infty)$
8. No tiene máximos ni mínimos
9. No tiene puntos de inflexión
10. Asíntotas y ramas parabólicas:
    a. Tiene una asíntota vertical en el eje Y $\lim_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{a}} x = \infty$
    b. Tiene una rama parabólica $\lim_{x \to \infty} \log_a x = -\infty$
11. $Img\left(\log_{\frac{1}{a}} x\right) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
12. No es periódica

En el siguiente enlace puedes ver la misma simetría para cualquier valor de a>1 simplemente tirando del valor a
https://www.geogebra.org/graphing/sunggfqf

FICHA DE DOMINIOS II

Calcula el dominio de las siguientes funciones:

LOGARÍTMICAS

1) $y = \log_2(x-7)$

2) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$

3) $y = x\ln(x-1)$

4) $y = \ln(3x^2+x-2)$

5) $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2-4}$

6) $y = \dfrac{x^2-1}{\ln(x-2)}$

7) $y = \ln(1-x^2)$

EXPONENCIALES

26) $y = 2x + e^{-x}$

27) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

28) $y = \dfrac{3^{x-2}}{x^2+4}$

29) $y = \dfrac{3^{\frac{2}{x}}}{x^2+4}$

FICHA DE PROBLEMAS DOMINIOS

1. Lanzamos una piedra verticalmente hacia arriba a una velocidad de 20 m/s. La altura, h, medida en metros, a la que se encuentra en cada instante, t, medido en segundos, viene dada por la función:
$$h(t) = 20t - 5t^2$$
   a. Haz una representación gráfica
   b. Calcula el dominio de definición en el contexto del problema
   c. ¿En qué momento alcanza la altura máxima?
   d. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?
   e. ¿En qué momento cae la piedra al suelo?

2. Una población de insectos crece según la función $y = 1 + 0{,}5 \cdot 2^{0{,}4x}$ donde *x* es el tiempo medido en días e *y* es el número de insectos en unidades de millar)
   a. ¿Cuál es la población inicial de insectos del experimento?
   b. ¿Cuál es la población al cabo de 5 horas?
   c. Calcula cuánto tiempo tarda en duplicarse su población

3. En un experimento de laboratorio se cultivan bacterias. La función que nos da el número de bacterias **N** en función del tiempo **t** (medido en horas) viene dada por la ecuación:
$$N(t) = 5000 + 4000t - 1000t^2$$
   a. ¿Cuál es el número inicial de bacterias?
   b. ¿Cuántas bacterias hay al cabo de 1 hora?

c. Dibuja la gráfica en el intervalo [0,5]

d. ¿En qué momento desaparece la población?

e. ¿En qué momento la población de bacterias es máxima?

4. La relación entre la sensación o percepción de estímulos de una persona sana depende de la intensidad de dichos estímulos y se aproxima a una función del tipo $S(I) = k\sqrt[3]{I}$ Dibuja una gráfica aproximada, clasifica la función y calcula dominio y recorrido en el contexto.

5. Con una jeringa vacía de 8 cm taponamos el orificio de salida con un dedo y apretamos el émbolo de forma que el aire se comprima en el interior. La relación entre la presión P (medida en atmósferas) y la longitud l (medida en cm) del aire comprimido dentro de la jeringuilla viene dada por la expresión $l(P) = \frac{8}{P+1}$. Se pide dibujar la gráfica, estudiar dominio y recorrido en el contexto.

6. Durante la enfermedad de un paciente se observó la evolución de su temperatura T (medida en °C) en relación con los días que estuvo ingresado y se observó que se ajustaba a la fórmula:

$$T(t) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37°\text{C}$$

Al paciente se le da el alta cuando su temperatura vuelve a los 37°C. Se pide: Gráfica aproximada, dominio y recorrido de la función en el contexto real (no se puede devolver al paciente muerto ni congelado…por favor)

7. Sabiendo que una habitación rectangular tiene 16 metros de perímetro se pide:

a. Expresar la superficie en función de sus lados

b. Gráfica aproximada, ajustada al contexto

c. Describe la gráfica en el contexto del problema

d. ¿Cuál es la distribución más eficiente? (forma de la habitación para que el área sea máxima)

8. Partiendo de un residuo tóxico de 5gr de sustancia radioactiva se aproxima que la masa que queda al cabo de t años viene dada por la función:

$M(t) = 5 \cdot 0{,}76^t$ Donde t se representa de 1000 en 1000 años

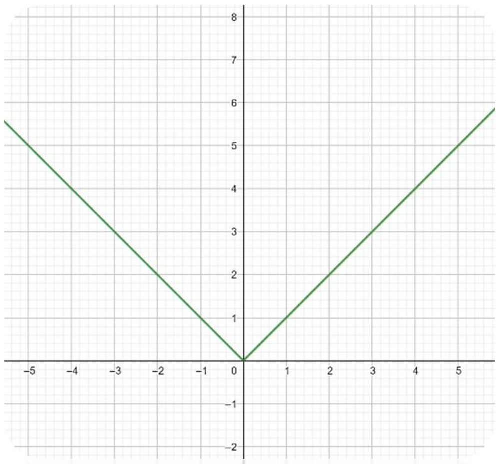
Hacer una gráfica aproximada, dominio y recorrido

9. Partiendo de la ley de Weber-Fecher que mide la relación entre la sensación y la intensidad de un estímulo $S(I) = k \cdot \log I$ se pide una gráfica aproximada, dominio y recorrido

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Definimos el valor absoluto de un nº como el valor numérico con signo positivo. La fórmula queda así: $|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

Si dibujamos su gráfica:



1. Función valor absoluto
2. $Dom(f) = \mathbb{R}$
3. Continua en todo $\mathbb{R}$
4. Derivable en todo $\mathbb{R} - \{0\}$, en el 0 NO es derivable, hace una esquina.
5. Puntos de corte con los ejes: (0,0)
6. La gráfica es simétrica con respecto al eje al eje Y
7. Curvatura: no procede (está formada por dos semi-rectas)
8. Crecimiento:
    a. Si x >0 creciente.
    b. Si x <0 decreciente
9. Tiene un mínimo absoluto en (0,0). No tiene máximo
10. Puntos de inflexión: no procede (no es una curva)
11. Asíntotas y ramas infinitas: No procede
12. Imagen, rango o recorrido: $Img(|x|) = [0, \infty)$
13. No es periódica

Otro ejemplo

$f(x) = |-x + 2| - |x|$
Lo primero que tenemos que hacer es romperla en trozos para tener una ecuación más manejable:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si\ x < 0 \\ -2x + 2 & si\ 0 \leq x < 2 \\ -2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

En el siguiente enlace puedes ver un vídeo de 4 minutos sobre cómo se calcula la ecuación de la función a trozos

https://www.edu.xunta.gal/centros/iesafonsoxcambre/aulavirtual/mod/resource/view.php?id=11120

1. Función relacionada con el valor absoluto
2. $Dom(f) = \mathbb{R}$
3. Continua en todo $\mathbb{R}$
4. Derivable en todo $\mathbb{R}$ menos en los puntos (0,2) y (2,-2) donde NO es derivable, hace "esquinas".
5. Puntos de corte con los ejes: (0,2) y (1,0)
6. La gráfica es simétrica con respecto al punto (1,0)
7. Curvatura: no procede (no es una curva sino que está formada por tres semi-rectas)
8. Crecimiento:
    a. Si $x < 0$ constante e igual a 2
    b. Si $0 \leq x < 2$ decreciente
    c. Si $x \geq 2$ constante e igual a -2
9. La gráfica está comprendida entre 2 y -2 por lo que está acotada siendo 2 su valor máximo y -2 el mínimo
10. Puntos de inflexión: no procede (no es una curva)
11. Asíntotas y ramas infinitas: No procede (no es una curva)
12. Imagen, rango o recorrido: $Img(|x|) = [-2,2]$
13. No es periódica

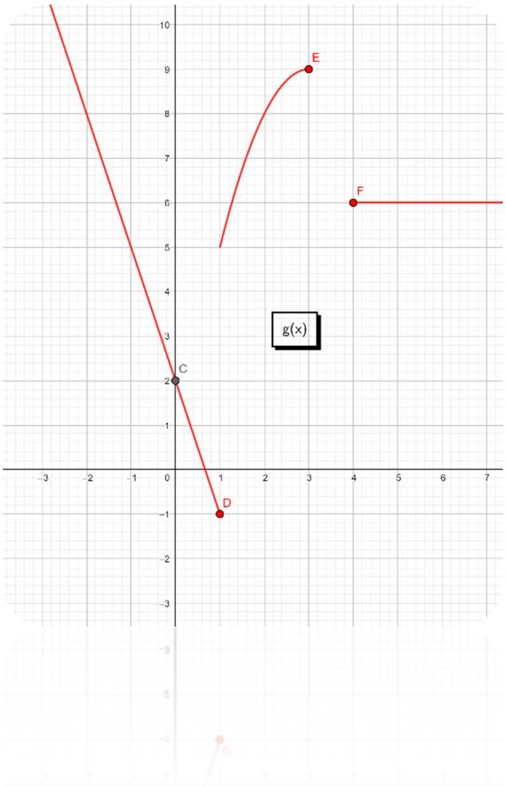
FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Llamamos así a aquellas funciones que vienen definidas por diferentes ecuaciones según el intervalo en el que se encuentre la x.

Un claro ejemplo es la función absoluto: $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ que ya vimos anteriormente.

En estas funciones hay que dibujar cada "trozo" en donde esté definido.

Ejemplo: $g(x) = \begin{cases} -3x+2 & si\ x \leq 1 \\ -(x-3)^2+9 & si\ 1 < x \leq 3 \\ 6 & si\ x < 4 \end{cases}$



1. Función definida a trozos. Tiene 3 tramos: en el 1º es una semi-recta decreciente, en el 2º un fragmento de parábola y en el 3º una semi-recta constante
2. $Dom(f) = \mathbb{R} - (3\,,4]$ *o lo que es lo mismo*: $(-\infty, 3] \cup (4, \infty)$ porque **en el intervalo $(\mathbf{3}\,,\mathbf{4}]$ no está definida**
3. Discontinua en:
   a. x=1 (el valor a su izquierda y a su derecha son distintos (da un salto de magnitud 6)
   b. En el intervalo $(3\,,4]$ porque ahí no está definida
4. Donde no es continua no puede ser derivable, en el resto sí por ser fragmentos de funciones polinómicas.
5. Punto de corte con los ejes: (0,2)
6. Simetría: ninguna
7. Curvatura: en el 1º y 3º tramo no tiene (son dos semi-rectas), en el 2º tramo es cóncava
8. Crecimiento:
   a. 1º tramo $(x \leq 1) \Rightarrow$ decreciente
   b. 2º tramo $(1 < x \leq 3) \Rightarrow$ creciente
   c. 3º tramo $(x < 4) \Rightarrow$ constante
9. Tiene un mínimo absoluto en (1,-1). No tiene máximo absoluto, sí tendría un máximo relativo en E=(3,9)
10. Puntos de inflexión: no procede
11. Asíntotas y ramas infinitas: no tiene
12. Imagen, rango o recorrido: $Img(g) = [-1, \infty)$
13. No es periódica

FICHA DOMINIOS III

FUNCIONES A TROZOS

1) $y = \begin{cases} e^{2x} \quad si\ x \leq 0 \\ x^2 + 2x + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x + 1 \quad si\ x < 0 \\ (x-1)^2\ si\ x \geq 0 \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} \dfrac{(\cos x)^2 - 1}{\operatorname{sen} x} \quad si\ x < 0 \\ 2x - \dfrac{3}{x^2+1} \quad si\ x \geq 0 \end{cases}$

REPRESENTACION GRÁFICA DE FUNCIONES

A la hora de representar "manualmente" una gráfica tenemos estas opciones:

1. Que sea una función elemental básica cuya gráfica tenemos visualmente memorizada. Por cierto: es **obligatorio** saber dibujar, a mano alzada, de forma aproximada, las siguientes funciones:

    - Cualquier tipo de recta y parábola
    - $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$
    - $y = \frac{1}{x}$
    - $y = 2^x$, $y = \frac{1}{2^x}$, $y = e^x$, $y = \frac{1}{e^x}$
    - $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\ln x$, $\log_{\frac{1}{e}} x$
    - $\mathrm{y} = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ $(hay\ un\ ejercicio\ más\ adelante)$

2. Que partiendo de una gráfica elemental como las anteriores, podamos obtener la que nos piden mediante sencillas traslaciones, simetrías y/o dilataciones y contracciones

3. Si se trata de una función más "complicada" necesitaremos su descripción para poder dibujarla.

    NO nos ponemos a hacer tablas de valores "a lo loco".

    La descripción o bien nos la dan (ahora mismo es la única opción que tenéis) o la buscamos utilizando las herramientas de: inecuaciones, ecuaciones, límites y derivadas (estas dos últimas se ven más adelante)

4. Tablas de valores: Sólo para rectas y parábolas.

1. Partiendo de una función elemental

Si sabemos dibujar las gráficas elementales básicas (ver punto 1 de antes), podemos dibujar fácilmente infinidad de gráficas simplemente desplazándolas por los ejes y también estirándolas o aplastándolas.

Veamos cada cosa con ejemplos a continuación.

SIMETRÍAS

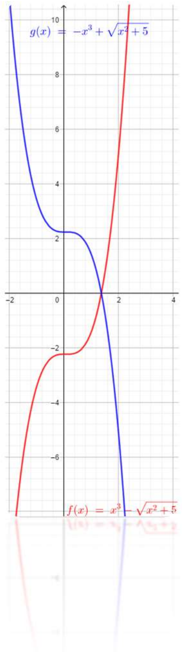
Una simetría es un movimiento básico en el que "reflejamos" un objeto (como en un espejo). Pueden ser de varios tipos pero lo habitual es con respecto a una recta (eje de simetría) o con respecto a un punto.

SIMETRÍA CON RESPECTO A UNA RECTA

En este caso la recta es el eje de simetría y reflejamos una curva sobre ella como si de un espejo se tratase. Ya hemos visto varios ejemplos:

SIMETRÍA CON RESPECTO AL EJE X:

Para cualquier función $f(x)$ si "doblamos" su gráfica sobre el eje X obtenemos la gráfica de su función opuesta $-f(x)$.

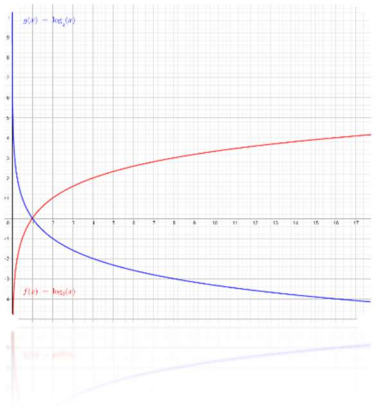


Por ejemplo, tomemos la función:
$f(x) = -x^3 + \sqrt{x^2+5}$
Su función opuesta (multiplicar todo por -1) será:

$-f(x) = +x^3 - \sqrt{x^2+5}$
Dibujemos ambas gráficas con geogebra, se ve perfectamente que si doblamos la hoja por el eje X, la gráfica azul se superpone sobre la roja.

En resumen:

> $f(x)$ y $-f(x)$ son simétricas con respecto al eje X, sea quien sea f



Un caso especial: las funciones $\log_a x$ y $\log_{\frac{1}{a}} x$, donde $a > 1, a \in \mathbb{R}$ son simétricas una de otra con respecto al eje X

Si imprimimos este folio y lo "doblamos" por el eje X, vemos que se superponen las gráficas azul y roja.

Así que:

$$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$$

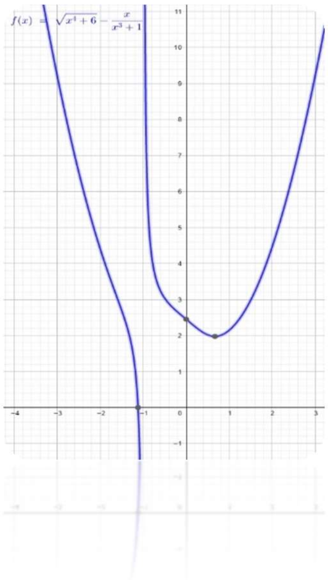
SIMETRÍAS CON RESPECTO AL EJE Y

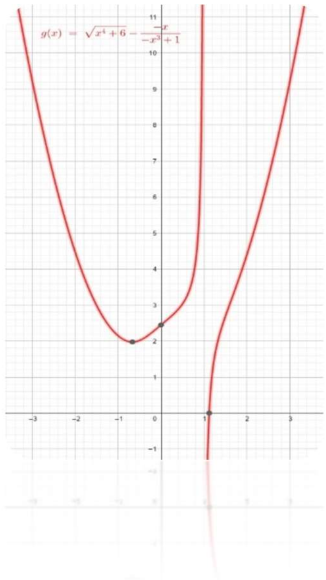
Si doblamos la gráfica de cualquier función $f(x)$ por el eje Y obtenemos la gráfica del opuesto $f(-x)$ (NO confundir con el caso anterior)

Por ejemplo, consideremos la función: $f(x) = \sqrt{x^4+6} - \frac{x}{x^3+1}$, la función del opuesto sería:

$$f(-x) = \sqrt{x^4+6} - \frac{-x}{-x^3+1}$$

Dibujamos ambas gráficas con geogebra y podemos comprobar con facilidad que son simétricas con respecto al eje Y





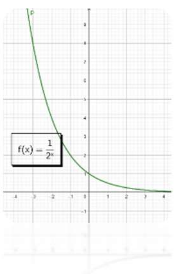
Fíjate en la imagen de la izquierda, si doblas por el eje Y verás que la gráfica azul y la roja se superponen

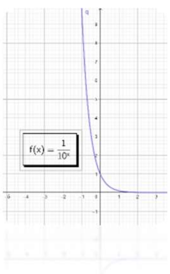
En resumen:

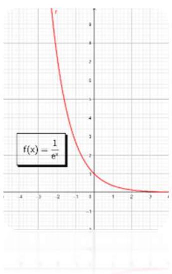
$f(x)$ y $f(-x)$ son simétricas con respecto al eje Y, sea quien sea f

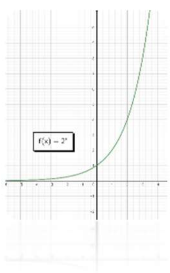
Ejemplos

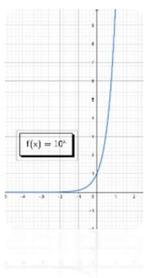
Las funciones exponenciales: a^x y $\frac{1}{a^x}$ con $a > 1$ son simétricas una de la otra con respecto al eje Y (fijarse en los colores

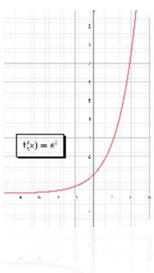












de las gráficas)

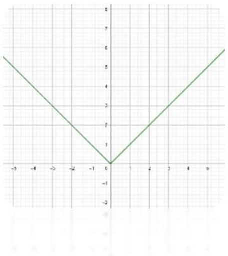
¿Por qué? Obviamente porque $si\ f(x) = a^x \Rightarrow f(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ así que ambas son simétricas con respecto al eje Y

FUNCIONES PARES

Cuando una función es simétrica consigo misma con respecto al eje Y, se le llama **función PAR,** en ese caso se cumple que:

$$f(x) = f(-x)$$

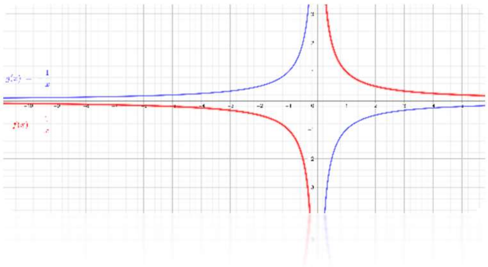
Ejemplos:



La función valor absoluto es simétrica consigo misma, con respecto al eje Y, y es por tanto una función PAR. Si la doblamos por el eje Y, sus dos ramas se superponen, así que generalmente nos ahorramos el esfuerzo de darle muchos valores para dibujarla, simplemente dibujamos la primera rama y la otra la trazamos a ojo por simetría

Le pasa lo mismo a las parábolas que tienen el vértice en x=0.

Un ejemplo muy especial son las hipérbolas $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = -\frac{1}{x}$ que son simétricas una de la otra con respecto al eje Y y también son simétricas con respecto al eje X.



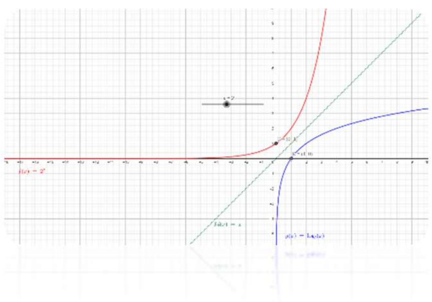
Si doblo la hoja por el eje X la parte roja se solapa con la azul

Si doblo la hoja por eje Y la parte roja se solapa con la azul

Si hago las dos dobleces seguidas todas las ramas se superponen.

SIMETRÍA CON RESPECTO A OTRO TIPO DE RECTA

Las funciones exponencial y logarítmica (en la misma base) son simétricas con respecto a la recta $y = x$.



A este tipo de funciones (simétricas con respecto a la recta $y = x$ se les llama recíprocas, se explicará con más detalle cuando demos composición de funciones y función inversa)

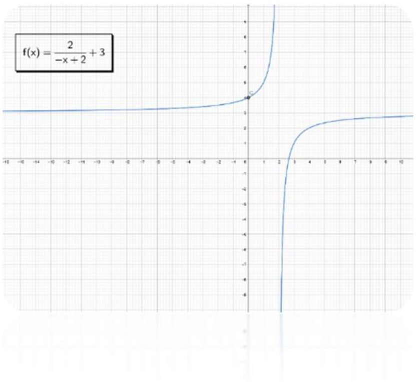
Otros ejemplos de simetría con respecto a una recta serían las parábolas, todas ellas son simétricas consigo mismas con respecto a la recta vertical que pasa por su vértice (haz tú el dibujo en un folio y compruébalo doblándolo)

SIMETRÍA CON RESPECTO A UN PUNTO

En la simetría con respecto a un punto reflejamos una gráfica dos veces, para que nos entendamos, imaginaros un folio, en él dibujada la gráfica, marcamos bien el punto de simetría y trazamos una cruz con centro en ese punto, ahora doblamos la hoja dos veces, una sobre la horizontal y otra por la vertical. La imagen reflejada que se obtiene es la simétrica con respecto a ese punto.

Ejemplos

Esta gráfica es simétrica consigo misma con respecto al punto (1,0).
Prueba a doblarla por el eje X y luego dóblala por la recta vertical x=1, verás que las dos ramas se superponen.



Cualquier hipérbola es simétrica consigo misma con respecto a su Foco
En la imagen de la izquierda la hipérbola que se muestra es simétrica consigo misma con respecto al punto (2,3) que es su punto focal.

CASO ESPECIAL: FUNCIONES SIMÉTRICAS CON RESPECTO AL ORIGEN DE COORDENADAS: FUNCIONES IMPARES

Si una función es simétrica con respecto al origen de coordenadas se cumple que

$$f(-x) = -f(x)$$

Y en ese caso se le llama FUNCIÓN IMPAR. Dibujarlas es fácil ya que nos limitamos a dibujar la primera rama y la otra la trazamos a ojo por simetría.
Dos ejemplos muy conocidos de funciones impares son: $y = \frac{1}{x}$ $\quad y = x^3$

TRASLACIONES

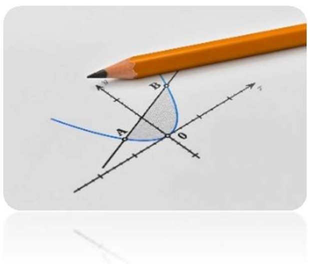
Ahora obtendremos gráficas a partir de otras simplemente moviéndolas por el plano. De forma esquemática:

Eje Y $\begin{cases} f(x) + a \leftrightarrow \text{"SUBIR" } a \text{ unidades} \\ f(x) - a \leftrightarrow \text{"BAJAR" } a \text{ unidades} \end{cases}$

Eje X $\begin{cases} f(x+a) \leftrightarrow a \text{ unidades a la IZQUIERDA} \\ f(x-a) \leftrightarrow a \text{ unidades A LA DERECHA} \end{cases}$

2. PARTIENDO DE LA DESCRIPCIÓN DE LA GRÁFICA

Lo único que se necesita es comprensión lectora, saber interpretar lo que nos dicen y dibujarlo.
Ejemplo: *“dibuja una parábola convexa que tiene su vértice en el (0,0)”*



Cuánto más complicada sea la gráfica más detallada necesitaremos la descripción.

GRÁFICAS, REPRESENTACIÓN Y DESCRIPCIÓN

FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Dibuja y describe las siguientes funciones:

1. $f(x)=\begin{cases}-3x+2 & si\ x\leq 1\\ -(x-3)^2+9 & si\ 1<x\leq 3\\ 6 & si\ x<4\end{cases}$

2. $y=\left|\dfrac{3x-4}{2}\right|$

3. $y=\left|\dfrac{x^2}{4}-4\right|$

4. $f(x)=\begin{cases}2x+1 & si\ x<1\\ -(x-2)^2+4 & si\ 1\leq x\leq 3\\ -3 & si\ x>5\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}x+2 & si\ x\leq 1\\ x^2-3 & si\ 1<x\leq 3\\ 6 & si\ x>3\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}3 & si\ x<-1\\ x^2+1 & si-1\leq x\leq 1\\ 4x-2 & si\ x>1\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}x+2 & si\ x\leq 1\\ 2x^2-3 & si\ 1<x\ \leq 3\\ 3x+6 & si\ x>3\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}x+2 & si\ x\leq 1\\ 2x^2-3 & si\ 1<x\ \leq 3\\ 3x+6 & si\ x>3\end{cases}$

8. $f(x)=|x+2|-|x|$

9. $f(x)=|x^3|$

10. $f(x)=\left|\dfrac{1}{x}\right|$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Dibuja las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente, y descríbelas detalladamente.

TEMA 5: LÍMITES

CONCEPTOS BÁSICOS

Límite LATERAL de una función por la IZQDA.

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

Es el valor al que tiende la función cuando x toma valores muy próximos a a pero **MENORES** que $\boldsymbol{a}$

Límite de una función

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Es el valor al que tiende la función cuando toma valores de x muy próximos a a

Límite LATERAL de una función por la DRCHA.

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

Es el valor al que tiende la función cuando x toma valores muy próximos a $\boldsymbol{a}$ pero **MAYORES** que $\boldsymbol{a}$

Para que el límite de $f(x)$ exista, deben existir los límites laterales en a y ser iguales

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Para calcular el valor del límite sustituimos x por el valor que nos den y operamos.

!!OJO¡¡ la expresión $\lim_{x \to a}$ la arrastramos todo el ejercicio HASTA QUE SUSTITUÍMOS x por su valor

TABLA DE INDETERMINACIONES (SON 7)

$\infty - \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0 \cdot \infty$
0^0	∞^0	$1^{\pm\infty}$	

NO SON INDETERMINACIONES

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty, \quad (+\infty)^{-\infty} = 0$$
$$(+\infty)^{k} = +\infty, \quad (k > 0)$$
$$(+\infty)^{k} = 0, \quad (k < 0)$$
$$k^{+\infty} = +\infty, \quad (k > 1)$$
$$k^{-\infty} = 0, \quad (k > 1)$$
$$k^{+\infty} = 0, \quad (0 < k < 1)$$
$$k^{-\infty} = +\infty, \quad (0 < k < 1)$$

$$-(+\infty) = -\infty$$
$$-(-\infty) = +\infty$$
$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$$
$$(-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$
$$k\cdot(+\infty) = +\infty, \quad (k > 0)$$
$$k\cdot(+\infty) = -\infty, \quad (k < 0)$$
$$k\cdot(-\infty) = -\infty, \quad (k > 0)$$
$$k\cdot(-\infty) = +\infty, \quad (k < 0)$$

$$\frac{k}{+\infty} = 0 \qquad \frac{k}{-\infty} = 0$$
$$\frac{k}{0} = \pm\infty \qquad \frac{-\infty}{0} = -\infty$$
$$\frac{\infty}{0} = \infty \qquad \frac{+\infty}{0} = +\infty$$
$$\frac{+\infty}{k} = +\infty, \quad (k > 0)$$
$$\frac{-\infty}{k} = -\infty, \quad (k > 0)$$

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty, \quad (+\infty)^{-\infty} = 0$$
$$(+\infty)^{k} = +\infty, \quad (k > 0)$$
$$(+\infty)^{k} = 0, \quad (k < 0)$$
$$k^{+\infty} = +\infty, \quad (k > 1)$$
$$k^{-\infty} = 0, \quad (k > 1)$$
$$k^{+\infty} = 0, \quad (0 < k < 1)$$
$$k^{-\infty} = +\infty, \quad (0 < k < 1)$$

LÍMITES CLASIFICADOS POR INDETERMINACIONES

LÍMITES EN UN PUNTO

TIPO $\frac{0}{0}$	Polinómicas	1º Factorizamos (Ruffini con el punto del límite, las veces que sea necesario) 2º Simplificamos 3º Recalculamos el límite
TIPO $\frac{0}{0}$	Con raíces	1º Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la raíz 2º Factorizamos y simplificamos 3º Recalculamos el límite
TIPO $\frac{0}{0}$	Otras	L'Hopital , fórmula: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f´(x)}{g´(x)}$
TIPO $\frac{k}{0}$		1º Calculamos límites laterales por separado, serán $+\infty$ ó $-\infty$ 2º Para el signo cogemos números próximos por la derecha y por la Izqda. 3º Si los límites laterales son iguales entonces existe el límite y será igual a ellos. En otro caso ∄lim
TIPO $0\cdot\infty$		1º Transformamos el producto en una fracción, dividiendo por la inversa de una de las funciones 2º Obtenemos $\frac{\infty}{\infty}$ 3º Aplicamos L´Hopital

LÍMITES EN EL $+\infty$

TIPO $\frac{\infty}{\infty}$	Polinómicas	Grado del numerador MAYOR	∞ ó -∞	El signo del cociente de los coeficientes principales
TIPO $\frac{\infty}{\infty}$	Polinómicas	Grado del numerador MENOR	Lim = 0	
TIPO $\frac{\infty}{\infty}$	Polinómicas	Grado numerador y denominador IGUAL	Lim = cociente de los coeficientes principales	
TIPO $\frac{\infty}{\infty}$	Con raíces	Como en polinomios pero **¡¡OJO!!** Debemos de tener en cuenta la influencia de la raíz para calcular el *"grado"* del numerador y denominador		
TIPO $\frac{\infty}{\infty}$	Otras	L´Hopital $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f´(x)}{g´(x)}$		
TIPO $\infty-\infty$	Sin raíces	Operamos y lo transformamos en una división de polinomios reduciéndolo al caso $\frac{\infty}{\infty}$		
TIPO $\infty-\infty$	Con raíces	Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la raíz		
TIPO $0\cdot\infty$	1º Transformamos el producto de funciones en una fracción, dividiendo por la inversa de una de las funciones 2º Obtenemos $\frac{\infty}{\infty}$ 3º Aplicamos L´Hopital			

LÍMITES EN EL $-\infty$

Transformamos en $x\to+\infty$ cambiando x por - x y recalculamos el límite

CASO ESPECIAL:, TANTO PARA LÍMITES EN UN PUNTO COMO PARA LÍMITES EN EL INFINITO

TIPO 1^{∞}	$\lim[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim[f(x)-1]\cdot g(x)}$

LÍMITES CON PARÁMETROS

Ver casos prácticos en la ficha de límites

FICHA LÍMITES

EJERCICIOS TEÓRICOS

Demuestra las siguientes igualdades, justificando razonadamente cada paso:

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0\ \ donde\ n\in\mathbb{N}$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0\ \ donde\ k\in\mathbb{R}\ con\ k\neq 0$

3) $\lim_{x\to\infty} a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=\lim_{x\to\infty} a_nx^n\ \ donde\ \ a_n,\ldots,a_1,a_0\ \in\mathbb{R}\ y\ n\in\mathbb{N}$

4) $\lim_{x\to\infty} a_nx^n=\begin{cases}+\infty\ si\ a_n>0\\ -\infty\ si\ a_n<0\end{cases}\ donde\ \ a_n\in\mathbb{R}, a_n\neq 0\ \ y\ n\in\mathbb{N}$

5) $Si\ P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\ \ y\ \ Q(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0\ \ son$ $polinomios\ reales\ de\ variable\ real, de\ grados\ respectivamente\ n\ y\ m\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m} & si\ n=m\\ 0 & si\ n<m\\ si\ n>m\Rightarrow & \begin{cases}+\infty & si\ \frac{a_n}{b_m}>0\\ -\infty & si\ \frac{a_n}{b_m}<0\end{cases}\end{cases}$$

LÍMITES DE POLINOMIOS Y DE COCIENTES DE POLINOMIOS EN EL ∞ Y -∞

Calcula:

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{(x-1)^2}$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{3-x}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x^2-1}$
4. $\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{x^3}$
5. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+2}$
6. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{1-x}$
7. $\lim_{x\to\infty}\frac{2-3x}{x+3}$
8. $\lim_{x\to\infty}\frac{3-2x}{5-2x}$
9. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-4x+8}{2x^3+9}$
10. $\lim_{x\to\infty} x^3-3x^2+25x$
11. $\lim_{x\to-\infty} x^3-3x^2+25x$
12. $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+5}$
13. $\lim_{x\to\infty}\frac{5-x}{x-5}$
14. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{7x-2}$
15. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1}{4x^2-3}$

16. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 - x^2}{x^2 + x^5}$

17. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{x^2 + 5}$

18. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5-x}{x-5}$

19. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 3}{7x - 2}$

20. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + 1}{4x^2 - 3}$

21. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - x^2}{x^5 + x^2}$

22. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5-x}{x+5}$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+3x}{x-1} - x\right)$

24. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2-4x}{x-2} - x\right)$

LÍMITES DE FUNCIONES EN UN PUNTO, INDETERMINACIONES DEL TIPO $\frac{0}{0}$

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{x^2 - 2x}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 3x}{x}$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

4. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2+x}$

5. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$

6. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$

7. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

8. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x^2}$

10. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2}{x^2+2x}$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2}$

12. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3}$

13. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$

15. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$

16. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$

17. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

18. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 3}{x^2 - 2x + 1}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$

20. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

21. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$

24. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

LÍMITES DE FUNCIONES IRRACIONALES (RAÍCES)

Calcula:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

4. $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$

5. $\lim_{x\to 5} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$

6. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{4+3x^2}-2}$

7. $\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

8. $\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

9. $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x+1}$

10. $\lim_{x\to 16} \frac{x-16}{4-\sqrt{x}}$

11. $\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{x-4}$

12. $\lim_{x\to 16} \frac{x+\sqrt{x}-20}{\sqrt{x}-4}$

13. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

14. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$

15. $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x}$

16. $\lim_{x\to \infty} \frac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}$

17. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^3+3x^2}}{x+5}$

18. $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x+5}-x\right)$

19. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2+x+2}}$

20. $\lim_{x\to 5} \frac{2x-10}{\sqrt{x+4}-3}$

21. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$

22. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2+x+2}}$

23. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2-2x}-x$

24. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2+x+4}-\sqrt{x^2-x}$

25. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$

LÍMITES DE SUCESIONES. FRACCIONES ALGEBEBRAICAS

Calcula:

1. $\lim_{n\to \infty} \left(\frac{4n^5-n^2}{2n^6+1}-\frac{3n^2+1}{n^2+1}\right)$

2. $\lim_{n\to \infty} \left(\frac{3n^2-1}{n^3}\cdot\frac{4n^4}{2n^4+3}\right)$

3. $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n^2+7}{2n}\right)$
4. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}+\frac{n-1}{n+1}\right)$
5. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3(1-n)}{2n^2-n-1}+\frac{4}{n^2}\right)$
6. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4+1}{2n^4+1}+\frac{-n^3}{3n^2+n+1}\right)$
7. $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n^3+1}{2n^3+n}\right)$
8. $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2}{n}\right)\frac{(n+1)(n-1)}{(n+1)^2}$
9. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^5-n^2}{2n^6+1}-\frac{3n^2+1}{n^2+1}\right)$
10. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2-1}{n^3}\cdot\frac{4n^4}{2n^4+3}\right)$

LÍMITES EXPONENCIALES

Calcula:

1. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-3}{4x}\right)^{3x}$
2. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2+1}{4x^2-2}\right)^{-2x+3}$
3. $\lim_{n\to\infty} 9^{\frac{2n^2-1}{n^2-1}}$
4. $\lim_{n\to\infty} 0{,}1^{\frac{n+1}{n^2}}$
5. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{n^2}}$
6. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+1}{2x^2+3}\right)^{x^2-2}$
7. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{x^2-3}$
8. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$
9. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{2x}$
10. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-5}\right)^{6x-2}$

LÍMITES CON PARÁMETROS

1. Calcula k para $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+kx+5} - \sqrt{x^2-3x}\right) = 4$
2. Calcula a para $\lim_{x\to\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right) = 1$

TEMA 6: CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

De forma intuitiva podríamos decir que una función es continua si podemos "dibujarla sin levantar el lápiz". Ahora daremos una definición formal.

CONTINUIDAD EN UN PUNTO

$f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si existe el valor de la función en ese punto y coincide con el límite $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

> La función SIEMPRE es discontinua en los puntos que NO pertenecen al dominio.

$f(x)$ es continua si lo es en todos los puntos de su DOMINIO

TIPOS DE DISCONTINUIDAD EN UN PUNTO

I. **SALTO INFINITO**. En este caso alguno de los límites laterales es infinito (obviamente el punto NO pertenece al dominio)

II. **SALTO FINITO**. En este caso los límites laterales son finitos pero distintos (a la diferencia entre ambos se le llama magnitud del salto)

III. **FALTA EL PUNTO**. Discontinuidad de tipo "evitable", en este caso existen ambos límites laterales y son finitos pero la función no está definida en ese punto.

IV. **PUNTO DESPLAZADO**. Discontinuidad de tipo "evitable", en este caso existen ambos límites laterales y son finitos pero no coinciden con el valor de la función en ese punto.

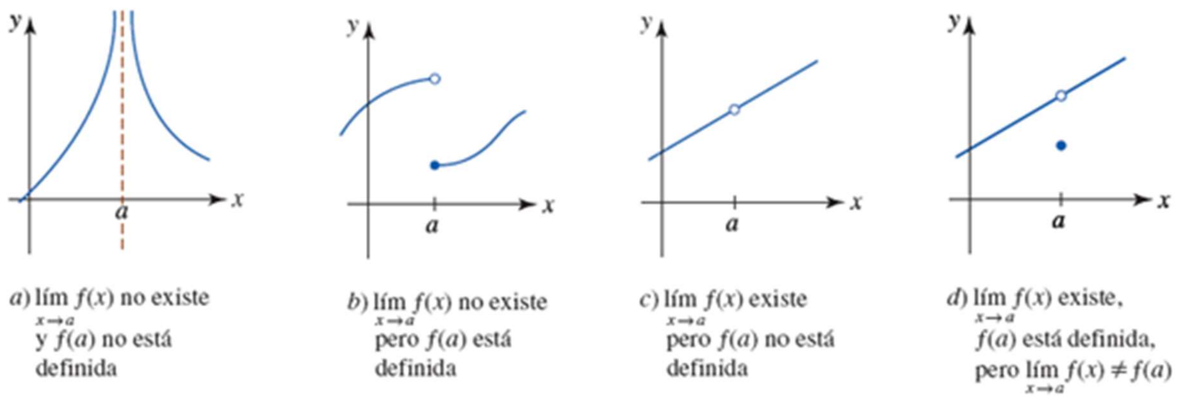


FIGURA 2.3.1 Cuatro ejemplos de f *no* continua en a

CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Todas las funciones elementales (ver tema 1) son continuas en su DOMINIO

ESTUDIO DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DEFINIDA A TROZOS

En las funciones definidas a trozos estudiamos por separado la continuidad de cada una de las funciones que la componen, después estudiamos la continuidad de la función en los puntos de unión de esos trozos, calculando los límites laterales en los mismos, teniendo en cuenta que a la derecha e izquierda la función es diferente.

ESTUDIO DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN CON VALOR ABSOLUTO

Primero tenemos que definir la función a trozos y luego hacemos lo mismo que en el caso anterior.

FICHA CONTINUIDAD

Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

1) $\dfrac{x-2}{-15x^4+3x^6+18x^2-x^5+5x^3-6x}$

2) $\dfrac{x}{x^2+4}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ x<1 \\ -2x+4 & si\ x\geq 1 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ x\leq 0 \\ 2x-1 & si\ 0<x<2 \\ x+5 & si\ x\geq 2 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1} & si\ x<0 \\ 3x+1 & si\ x\geq 0 \end{cases}$

6) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

7) $f(x)=\ |x-2|+1$

8) $f(x)=\begin{cases} -3x+2 & si\ x<0 \\ -2 & si\ x=0 \\ \dfrac{x}{x+2} & si\ x>0 \end{cases}$

9) $halla\ el\ valor\ de\ k\ para\ que\ la\ siguiente\ función\ sea\ continua\ en\ todo\ \mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & si\ x\leq -2 \\ kx & si\ x>-2 \end{cases}$$

10) $halla\ el\ valor\ de\ a\ y\ b\ para\ que\ la\ siguiente\ función\ sea\ continua\ en\ todo\ \mathbb{R}$

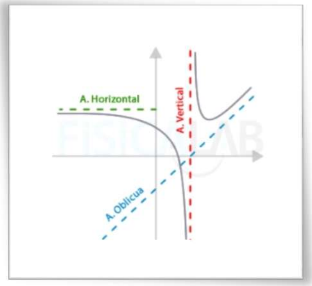
$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si\ x<-2 \\ ax^2+bx & si -2\leq x\leq 4 \\ x-4 & si\ x>4 \end{cases}$$

11) $halla\ el\ valor\ de\ a\ para\ que\ la\ siguiente\ función\ sea\ continua\ en\ todo\ \mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+a-1 & si\ x\leq 2 \\ \ln(x-1) & si\ x>2 \end{cases}$$

TEMA 7: ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

Las asíntotas de una función son líneas imaginarias hacia donde tiende la función pero sin llegar a tocarla. No siempre una función tiene asíntotas. La posición de la gráfica con respecto a las asíntotas es muy valiosa a la hora de dibujar la función.



ASÍNTOTAS VERTICALES

Son rectas verticales (no son funciones) y su ecuación es $x = b$, donde b es el valor que cumple que el límite de la función $f(x)$ o alguno de sus límites laterales es $+\infty$ ó $-\infty$

> Los posibles candidatos son los puntos que NO pertenecen al dominio

ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Son rectas horizontales (paralelas al eje X) tienen la forma $y = k$ donde k es un número que cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = k$$
$$y/o$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$$

ASÍNTOTAS OBLICUAS

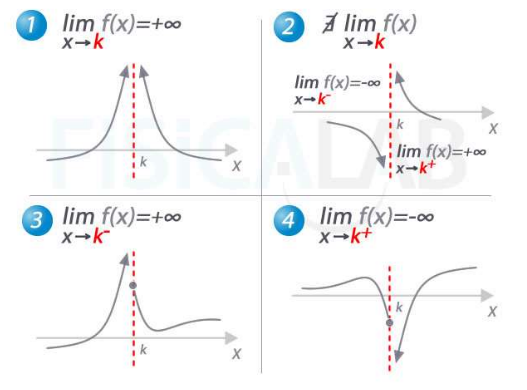
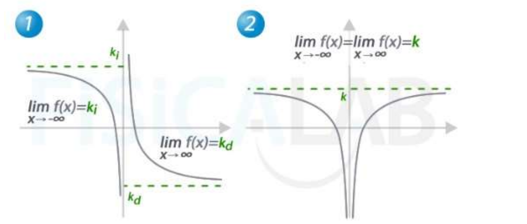
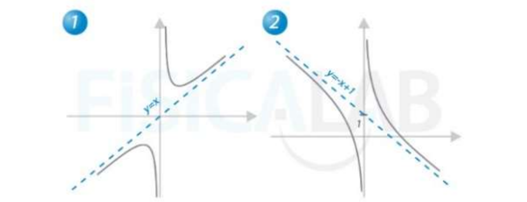
Una asíntota oblicua tiene la forma $y = mx + n$ siendo m la pendiente de dicha recta y n la ordenada en el origen, se obtienen mediante las fórmulas:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$$

TRUCOS A TENER EN CUENTA

- Si una función (que no sea por trozos) tiene asíntota horizontal, NO puede tener oblicua
- Si la función es un cociente de dos polinomios tendrá asíntota oblicua si el grado del numerador es uno más que el grado del denominador
- Hay que calcular los límites para las dos ramas ($\pm\infty$) por separado, siempre dentro del dominio de la función. En el caso de cocientes de polinomios no es necesario, ya que si existe será igual para ambas ramas

POSICIÓN RELATIVA DE LA FUNCIÓN CON RESPECTO A SU ASÍNTOTA

TIPO	DESCRIPCIÓN	CONDICIONES Y CÓMO SE CALCULAN	POSICIÓN RELATIVA DE $f(x)$ Y SUS ASÍNTOTAS	PASOS A SEGUIR	EJEMPLOS
ASÍNTOTA VERTICAL $x = k$	rectas verticales ecuación $\boldsymbol{x = k}$ k es nº real	1º Buscamos puntos de **NO DOMINIO**, puede ser $\boldsymbol{k \notin Dom(f)}$ o, si es a trozos, que no pertenezca al dominio de alguna de sus ramas. 2º miramos si se cumple alguna de las condiciones: $\lim_{x\to k} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to k^+} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to k^-} f(x) = \pm\infty$	Miramos el **signo** del límite infinito a la **IZQDA. y DERCHA. de $\boldsymbol{k}$**	Si $\lim_{x\to k^+} f(x) = +\infty$ la función se aproxima a la asíntota por la DRCHA. de k desde el $+\infty$	
				Si $\lim_{x\to k^+} f(x) = -\infty$ la función se aproxima a la asíntota por la DRCHA. de k desde el $-\infty$	
				Si $\lim_{x\to k^-} f(x) = +\infty$ la función se aproxima a la asíntota por la IZQDA. de k desde el $+\infty$	
				Si $\lim_{x\to k^-} f(x) = -\infty$ la función se aproxima a la asíntota por la IZQDA. de k desde el $-\infty$	
ASÍNTOTA HORIZONTAL $y = k$	rectas horizontale s ecuación $\boldsymbol{y = k}$ k es nº real	Calculamos los límites de la función en el $\pm\infty$ y miramos si nos da un número real k $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ y/o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$	1º Construimos la función $g(x) = f(x) - k$ 2º comprobamos $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ 3º Observamos para cada límite si $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0^+$ ó 0^-	Si el límite tiende a 0 por valores negativos 0^- la función estará por DEBAJO de la asíntota.	
				Si el límite tiende a 0 por valores positivos 0^+ la función estará por ARRIBA de la asíntota.	
ASÍNTOTA OBLICUA $y = mx + n$	Cualquier recta con $\boldsymbol{m \neq 0}$	1º calculamos $m \neq 0$ $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ 2º calculamos n $n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$	1º Construimos la función $g(x) = f(x) - k$ 2º comprobamos $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ 3º Observamos para cada límite si $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0^+$ ó 0^-	Si el límite tiende a 0 por valores negativos 0^- la función estará por DEBAJO de la asíntota.	
				Si el límite tiende a 0 por valores positivos 0^+ la función estará por ARRIBA de la asíntota.	

FICHA ASÍNTOTAS

Estudia las asíntotas de las siguientes funciones y la posición relativa de la función con respecto a sus asíntotas. En base a la información obtenida haz un boceto de la gráfica de la función.

1) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

2) $y = \frac{x^2-9}{x-3}$

3) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

4) $f(x) = (x-1) \cdot e^x$ (este es para más adelante, se hace por reglas de derivadas usando L´Hopital)

5) $f(x) = \frac{x^2+4}{x-1}$

6) $f(x) = \sqrt{4x^2+1}$

7) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

8) $f(x) = \frac{x^3}{4x^2-1}$

9) Halla los valores de a y b sabiendo que la gráfica tiene una asíntota vertical en $x = 2$ y una asíntota oblicua de pendiente 2, para la función:

$$f(x) = \frac{ax^2+3}{x+b}$$

TEMA 8: TEOREMAS DE CONTINUIDAD

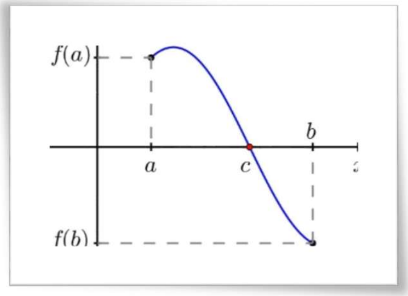
TEOREMA DE BOLZANO

Dada una función $f(x)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces:

$$\left.\begin{array}{c} si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \\ y\quad f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\ c \in (a,b)\ \ t.q.\ \ \boldsymbol{f(c) = 0}$$

Dicho de otra forma, si tenemos una función que opera sobre números reales y que devuelve un número real entonces se cumple que: si f es continua en un intervalo cerrado y en los extremos de dicho intervalo cambia de signo, entonces tiene que existir al menos un punto en el que la gráfica de la función corte el eje X.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

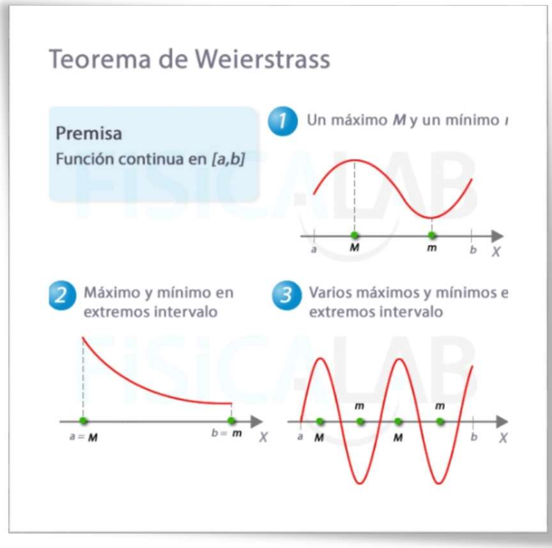


TEOREMA DE WEIERSTRASS

Tiene dos formas de expresarse:

$$Forma\ 1.\ \ Si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \Longrightarrow f(x)\ está\ acotada\ en\ ese\ intervalo$$
$$Forma\ 2.\ \ Si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \Longrightarrow f(x) alcanza\ sus\ máximos\ y\ mínimos\ absolutos\ en\ ese\ intervalo$$

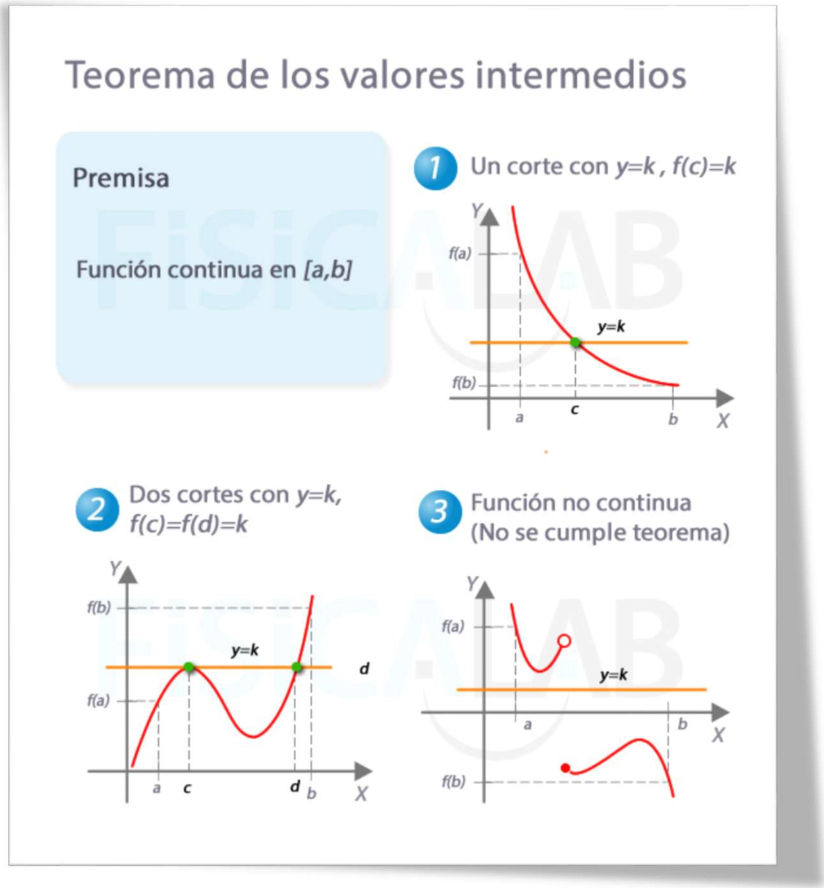
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



TEOREMA DE VALORES INTERMEDIOS, REGLA DE DARBOUX

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [a,b] \\ k \in (f(a), f(b)) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\ c \in (a,b)\ \ t.q.\ f(c) = k$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



FICHA BOLZANO

1. Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo (1,2)
2. Demostrar que la ecuación $x^{2009} - e^x + 2 = 0$ tiene alguna solución
3. Demostrar que las curvas $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ se cortan en algún punto del intervalo $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$
4. Justifica si las funciones siguientes están acotadas en el intervalo que se indica:

$$a)\quad f(x) = \frac{4}{x}\ en\ el\ intervalo\ [1,3] \qquad\qquad b)\quad f(x) = \frac{3x}{x-2}\ \ en\ el\ intervalo\ [0,3]$$

5. Sea la función $f(x) = 2x + 1$ ¿Se puede afirmar que toma todos los valores del intervalo $[1,5]$?

TEMA 9: DERIVADAS. REGLAS DE DERIVACIÓN

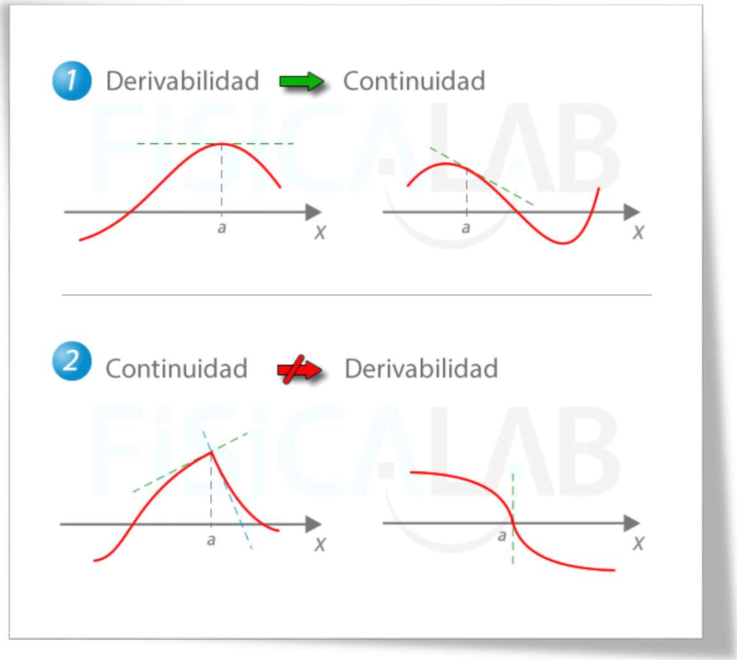
DEFINICIÓN DE DERIVADA

Se define la derivada de una función $f(x)$ en un punto a como $f´(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

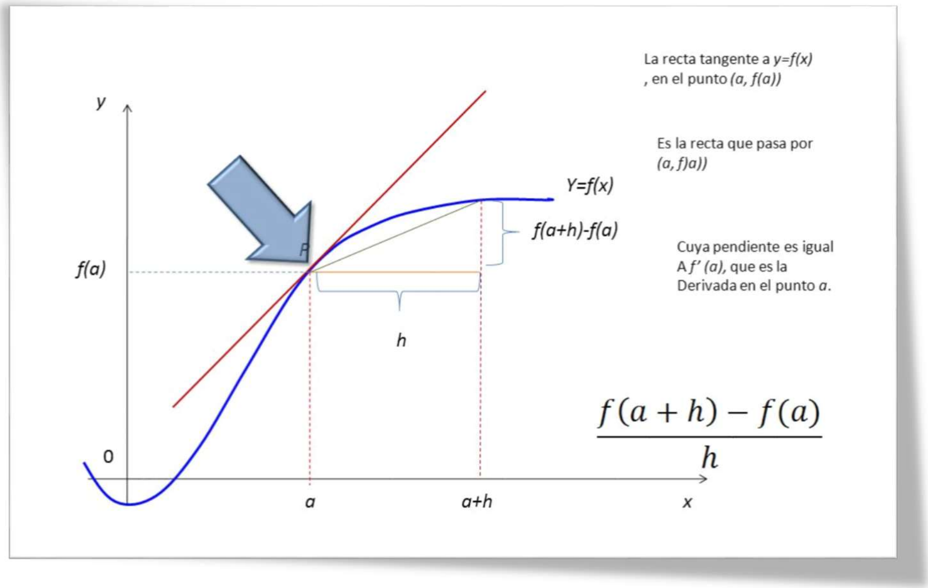
FUNCIÓN DERIVABLE

Una función se dice DERIVABLE en su dominio si existe su derivada en todos los puntos del dominio (el límite existe y es un nº real)

Para que una función sea derivable es necesario que sea continua



INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



REGLAS DE DERIVACIÓN

Donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones reales de variable real, $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$ son números

Polinomios	$a' = 0$	
	$x' = 1$	
	$(ax)' = a$	
	$(x^n)' = nx^{n-1}$	
Suma	$(u+v)' = u´ + v´$	
Resta	$(u-v)' = u' - v'$	
Producto	$(u \cdot v)´ = u´ \cdot v + u \cdot v'$	
Cociente	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	
Potencia	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	
Raíces	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
	$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	
Logaritmos	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u} \cdot \mathbf{log_a(e)}$
Exponenciales	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$
Potencias con exponenciales	$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot v' \cdot \ln u$	
Trigonométricas	$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$	$(arc \operatorname{sen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
	$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$	$(arc \cos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 u)$	$(arc \operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

TEMA 10: TEOREMAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

TEOREMA DE ROLLE

$$\left.\begin{array}{c} f\ continua\ en\ [a,b] \\ f\ derivable\ en\ (a,b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (a,b)\ t.q. f'(c)=0$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

$$\left.\begin{array}{c} f\ continua\ en\ [a,b] \\ f\ derivable\ en\ (a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (a,b)\ t.q. f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

FICHA DERIVADAS

1. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica

   $a)\quad y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

   $b)\quad y=\frac{x}{x+1}\operatorname{tag} x$

   $c)\quad y=\frac{sen^2x\ \cdot cos^2x - arccos\sqrt{x}}{3}$

   $d)\quad y=\ln(cosx)^2-\sqrt{4x^2-5x}+3\cdot 5^{6-3x^3}$

   $e)\quad y=\left(\frac{senx}{x}\right)^x$

2. Estudia la continuidad y derivabilidad de f(x)

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & si\ x\le 1 \\ -2x^2+6x & si\ x>1 \end{cases}$$

3. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} |x| & si\ x<1 \\ x\cdot e^{1-x} & si\ x\ge 1 \end{cases}$$

4. Calcula los valores de a y b para que la función $f(x)$ sea derivable en $x=2$

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+ax & si\ x\leq 2\\ bx^2+7x-4 & si\ x>2\end{cases}$$

5. Calcula los valores de a y b para que la función f(x) sea derivable en $x=1$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x} & si\ x\leq -1\\ \dfrac{x^2-b}{4} & si\ x>-1\end{cases}$$

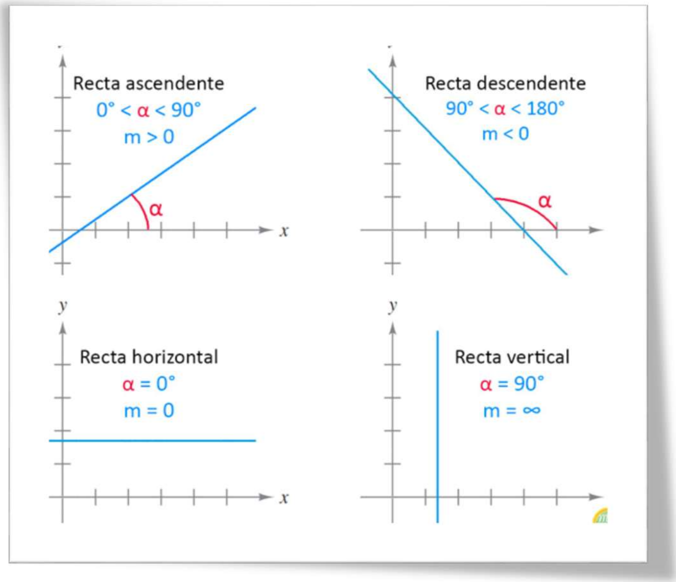
6. Demuestra que $x^3+6x^2+15-21=0$ tiene una única solución en el intervalo $[0,1]$

TEMA 11: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

1. RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA

PENDIENTE DE UNA RECTA

Es el grado de inclinación de la recta sobre el eje X, se puede calcular como $m = \text{tg}\,\alpha$ donde α es el ángulo que forma la recta con el semieje positivo OX.

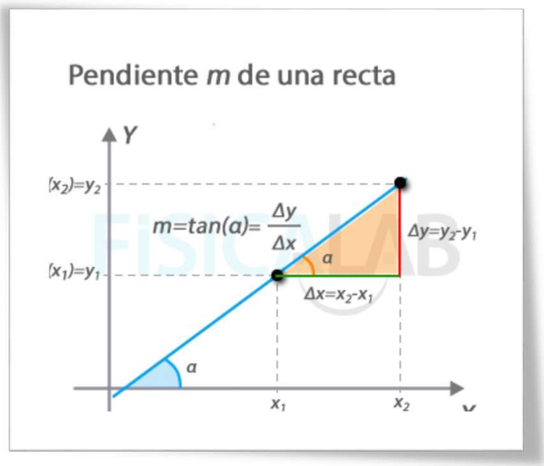


ECUACIÓN PUNTO PENDIENTE DE UNA RECTA

Sea $\boldsymbol{r}$ una recta que pasa por un punto $P(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ y tenga de pendiente $\boldsymbol{m}$. La ecuación de la recta viene dada por la fórmula:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

PENDIENTE DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS



Si consideramos una recta cualquiera que pase por dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ basta con aplicar la definición de tangente de un ángulo para obtener la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES (O NORMALES)

Sean dos rectas r y s con pendientes m y m' Entonces se cumple:

$$r \parallel s \iff m = m'$$
$$r \perp s \iff m = -\frac{1}{m'}$$

RELACIÓN ENTRE PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A LA CURVA Y DERIVADA

La pendiente de la recta tangente a una curva f en un punto a es

$$m = f'(a)$$

ECUACIONES DE RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA EN UN PUNTO

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \qquad \textit{recta tangente}$$
$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) \qquad \textit{recta normal}$$

FICHA RECTA TANGENTE Y NORMAL

BÁSICOS

1. Dada la curva de ecuación $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ halla las coordenadas de los puntos de dicha curva en los que la tangente forma con el eje OX un ángulo de 45°.
2. Dada la parábola $f(x) = x^2$ hallar los puntos en los que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Encuentra la ecuación de la recta tangente y normal en dichos puntos.
3. ¿En qué punto de la curva $y = \ln x$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos (1, 0) y (e, 1)?
4. Dada la función $f(x) = \operatorname{tg} x$, hallar el ángulo que forma su recta tangente en el origen, con el eje de abscisas.
5. Calcular los puntos en que la tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ es paralela al eje OX.
6. Se ha trazado una recta tangente a la curva $f(x) = x^3$ cuya pendiente es 3 y pasa por el punto (0,-2). Hallar el punto de tangencia.
7. Buscar los puntos de la curva$f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 + x + 1$ para los cuales la tangente forma un ángulo de 45° con el semieje 0X.

COMPLETOS

8. Calcular la ecuación de la tangente, y si es posible de la normal, a la curva $f(x) = \ln(\operatorname{tg} 2x)$en el punto de abscisa:$x = \pi/2$

9. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva: $9x^2 + y^2 = 18$ que sean paralelas a la recta: $3x - y + 7 = 0$. Calcula también las ecuaciones de las rectas normales correspondientes.

10. *Muy Completo (ideal para examen final)* Hallar el área del triángulo determinado por los ejes coordenados y la tangente a la curva $xy = 1$ en el punto $x = 1$.

CON PARÁMETROS (TÍPICOS ABAU)

11. Determinar los valores del parámetro b, para qué las tangentes a la curva $f(x) = b^2x^2 + 3x + 9$ en los puntos de abscisas $x = 1, x = 2$, sean paralelas.

12. Hallar los coeficientes de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por (0, 3) y por (2, 1), y en este último punto su tangente tiene de pendiente 3.

13. La gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (2, 3) y (3, 13), siendo la tangente a la misma, en el punto de abscisa 1, paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Hallar el valor numérico de a, b, c.

14. Dada $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determina a, b, c, d sabiendo que la curva pasa por los puntos (-1, 2) y (2, 3), y que rectas tangentes en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = -2$ son paralelas al eje OX.

2. CÁLCULO DE LÍMITES POR L'HOPITAL

Sean f y g dos funciones reales de variable real que cumplan las siguientes condiciones:

1º f y g deben ser continuas y derivables en un intervalo abierto al que pertenezca el punto a

2º $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

3º $g'(x) \neq 0$ *para cualquier x del intervalo*

4º Existe y es finito el $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces se cumple:

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

OBSERVACIONES

1º La regla de L´Hopital también se puede aplicar si $x \to \pm\infty$

2º Se puede utilizar para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

3º Si al aplicar L´Hopital una vez nos volvemos a encontrar con otra indeterminación igual, y las funciones siguen cumpliendo las condiciones, se puede volver a aplicar L´Hopital las veces que sea necesario.

4º Para resolver las indeterminaciones $\infty - \infty$ y $0 \cdot \infty$, también se puede utilizar L´Hopital pero primero habrá que transformar las funciones hasta conseguir una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ y luego aplicar L´Hopital

5º El resto de indeterminaciones ∞^0, 0^0 , $\frac{0}{0}$ se pueden acabar de resolver por L´Hopital si previamente hacemos el logaritmo del límite y tenemos en cuenta que $\lim \ln f(x) = \ln \lim f(x)$

FICHA LHOPITAL

BÁSICOS

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{3x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3}{x - \operatorname{sen} x}$

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x - e}{x^2 - 1}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - 2x - e^x + \operatorname{sen}(3x)}{x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2 - 1}{e^{2x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot e^{x^2}}{\cos x - 1}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

11) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log x}{\operatorname{cotg} x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{arcsen} x)$

TRANSFORMABLE

14) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

15) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\cdot \ln x)$

16) $\lim\limits_{x\to +\infty} [e^{-x}\cdot (x+3)]$

17) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

18) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x \cdot \ln x)$

19) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{e}{e^x - e}\right)$

20) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

21) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^x$

LOGARÍTMICO CON L´HOPITAL

22) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

23) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$

24) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\mathrm{co}}$

25) $\lim\limits_{x\to \infty} (2^x - 1)^{\frac{2}{x+1}}$

CON PARÁMETROS

26) Sabiendo que el límite existe y es finito calcula el valor del parámetro a y el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\cdot\operatorname{sen} x + x\cdot\cos(3x)}{x^2}$$

27) Halla a y b sabiendo que la siguiente función es continua en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \cos x - a\cdot e^x}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ b & si\ x = 0 \end{cases}$$

PARA 2º DE BACH

28) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\ln(2-e^x)}$

29) $\lim\limits_{x\to \pi} (1 - \cos 2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}}$

3. MONOTONÍA. INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO, MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Si $f'(x) > \mathbf{0} \Rightarrow f(x)$ **CRECIENTE**

Si $f'(x) < \mathbf{0} \Rightarrow f(x)$ **DECRECIENTE**

$$\left.\begin{array}{l} a \in Dom(f) \\ f'(a) = 0 \\ f \text{ DECRECIENTE a la izqda. de } a \\ f \text{ CRECIENTE a la drcha de } a \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene un } \textbf{MÍNIMO} \text{ relativo en } a$$

$$\left.\begin{array}{l} a \in Dom(f) \\ f'(a) = 0 \\ f \text{ CRECIENTE a la izqda. de } a \\ f \text{ DECRECIENTE a la drcha de } a \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene un } \textbf{MÁXIMO} \text{ relativo en } a$$

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

$$\left.\begin{array}{l} a \in Dom(f) \\ f'(a) = 0 \\ \boldsymbol{f''(a) < 0} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene un } \textbf{MÁXIMO} \text{ relativo en } a$$

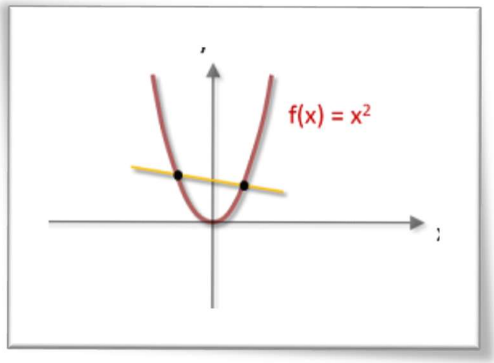
$$\left.\begin{array}{l} a \in Dom(f) \\ f'(a) = 0 \\ \boldsymbol{f''(a) > 0} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene un } \textbf{MÍNIMO} \text{ relativo en } a$$

4. CURVATURA. INTERVALOS DE CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.

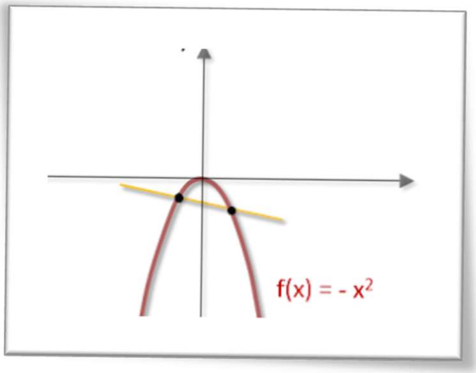
Si $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es CONVEXA

Si $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es CONCAVA

FUNCIÓN CONVEXA



FUNCIÓN CÓNCAVA



PUNTOS DE INFLEXIÓN

$$\left.\begin{matrix} f''(a) = 0 \\ f'''(a) \neq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow (a, f(a)) \text{ PUNTO DE INFLEXIÓN}$$

FICHA MONOTONÍA Y CURVATURA

1. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
   a. Calcula el valor de los parámetros sabiendo que tiene un extremo relativo en (0,1) y un punto de inflexión en (1,-1)
   b. Calcula el valor de los parámetros sabiendo que presenta un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$, que $(1,0)$ es un punto de inflexión y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3
2. Halla los valores de a, b y c sabiendo que la gráfica de la función siguiente tiene una asíntota oblicua de pendiente 2 y un extremo relativo de abscisa x=3

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x + c}$$

FICHA APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS PARA LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

En las siguientes funciones estudia sus características (dominio, puntos de corte, asíntotas, máximos, mínimos, curvatura etc.) y luego haz una gráfica aproximada de su gráfica según los resultados que has obtenido:

1. $f(x) = x^5 + x^3$

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{2-x^2}{x^2-1}$
7. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2+1}$
8. $f(x) = \dfrac{4x^2-5x}{2x^2+7}$
9. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-3}$
10. $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$

5. OPTIMIZACIÓN

PASOS A SEGUIR:

1. Hacemos un dibujo e identificamos las incógnitas.
2. Calculamos la expresión de la **FUNCIÓN QUE QUEREMOS OPTIMIZAR** (dependerá de dos variables x e y.
3. Expresamos la **CONDICIÓN** entre las variables que nos da el problema.
4. En la **CONDICIÓN** que acabamos de escribir (3), despejamos una de las variables en función de la otra.
5. La sustituimos en la **FUNCIÓN QUE QUEREMOS OPTIMIZAR** (2)
6. Derivamos **LA FUNCIÓN A OPTIMIZAR** e igualamos a cero.
7. Comprobamos, utilizando la segunda derivada, si se trata de máximo o mínimo
8. Resolvemos la otra variable en la **CONDICIÓN** y damos la solución al problema.

FICHA OPTIMIZACIÓN

1. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 5 cm. (sol:$\sqrt{50}cm$,$\sqrt{50}cm$)

2. Halla dos números tales que el cuadrado de uno multiplicado por el otro sea máximo, si la suma de dichos números es 40. (Sol:80/3, 40/3)

3. Averigua cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m2de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima. (sol: 60m,60m)

4. Con 1 m^2 de cartón cómo construirías una caja del mayor volumen posible. (sol: 2/3x2/3x1/6)

5. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que resulten hojas con un coste mínimo? (sol:5x10m)

6. Un agricultor sabe que si vende hoy su cosecha podrá recoger 50 000 kg, que le pagarán al precio de 20 céntimos por kg. Por cada día que espere, la cosecha disminuirá en 800 kg, pero el precio aumentará en 3 céntimos por kg. ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio? (sol: $\approx 28 días$)

7. Un vendedor de bolígrafos ha observado que si vende sus bolígrafos a 15 céntimos, es capaz de vender 1 000 unidades diarias, pero que por cada céntimo que aumente el precio, disminuye en 100 unidades la venta diaria de bolígrafos. Por otra parte a él le cuesta 7.5 céntimos fabricar un bolígrafo. Averiguar qué precio ha de poner para obtener el máximo beneficio.(sol: 12´5 cént)

8. Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 euros y el tramo vertical 30 euros. Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo. Determinar el coste del marco.(sol: 3m, 2m, 240€)

TEMA 12: CÁLCULO INTEGRAL

PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN

Sea $f(x)$ función, $F(x)$ es PRIMITIVA de f si se cumple $F'(x) = f(x)$, en ese caso $\int f(x)dx = F(x) + C$

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

	Sencilla	Con regla de la cadena	Vale para todo
Polinómicas	$\int k\ dx = kx + C$	$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int u^n\ du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
Logarítmicas	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln\lvert f\rvert + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln\lvert u\rvert + C$
Exponenciales	$\int e^x\ dx = e^x + C$	$\int e^f\ f'\ dx = e^f + C$	$\int e^u\ \ du = e^u + C$
	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^f\ f' dx = \frac{a^f}{\ln a} + C$	$\int a^u\ du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
Seno	$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$	$\int f'\ \sin f\, dx = -\cos f + C$	$\int \sin u\, du = -\cos u + C$
Coseno	$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int f'\ \cos f\ \ dx = \operatorname{sen} f + C$	$\int \cos u\ \ du = \operatorname{sen} u + C$
Tangente	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \operatorname{tg} f + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \operatorname{tg} u + C$
	$\int (1 + \operatorname{tg}^2 x)dx = \tan x + C$	$\int f'(1 + \operatorname{tg}^2 f)dx = \operatorname{tg} f + C$	$\int (1 + \operatorname{tg}^2 u)du = \operatorname{tg} u + C$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \operatorname{arcsen} f + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \operatorname{arcsen} u + C$
Arco coseno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = -\arccos f + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = -\arccos u + C$
Arco Tangente	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \operatorname{arctg} f + C$	$\int \frac{1}{1+u^2} du = \operatorname{arctg} u + C$

FICHA INTEGRALES INMEDIATAS

NÚMEROS Y POTENCIAS SENCILLAS

a) $\int 1\, dx$ b) $\int 2\, dx$ c) $\int \sqrt{2}\, dx$

d) $\int 2x\, dx$ e) $\int x\, dx$ f) $\int 3x\, dx$

g) $\int 7x\, dx$ h) $\int x^2\, dx$ i) $\int \frac{1}{2} x^2\, dx$

POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

a) $\int (-1)x^{-2}\, dx$ b) $\int x^{-2}\, dx =$

c) $\int \frac{5}{x^2}\, dx =$ d) $\int \frac{1}{x^3}\, dx$

e) $\int \frac{2}{x^3}\, dx$ f) $\int \frac{5}{(x-3)^3}\, dx$

LAS RAÍCES TAMBIÉN SON POTENCIAS

a) $\int \frac{3}{2} x^{1/2}\, dx$

b) $\int \frac{3}{2}\sqrt{x}\, dx =$

c) $\int 7\sqrt{x}\, dx =$

d) $\int \frac{1}{2} x^{-1/2}\, dx$

e) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx =$

f) $\int 5\sqrt{x^3}\, dx =$

¿RECUERDAS QUE $D(\ln x) = \frac{1}{x}$?

a) $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|$ b) $\int \frac{1}{5x}\, dx =$

c) $\int \frac{1}{x+5}\, dx = \ln|x+5|$ d) $\int \frac{3}{2x+6}\, dx$

ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

a) $\int \cos x \, dx$

b) $\int 2\cos x \, dx$

c) $\int \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx$

d) $\int \cos 2x \, dx$

e) $\int (-\operatorname{sen} x) \, dx$

f) $\int \operatorname{sen} x \, dx$

g) $\int \operatorname{sen}(x - \pi) \, dx$

h) $\int \operatorname{sen} 2x \, dx$

i) $\int (1 + tg^2\, 2x) \, dx$

j) $\int tg^2\, 2x \, dx$

ALGUNAS EXPONENCIALES

a) $\int e^{x-1} \, dx$

b) $\int e^{2x+1} \, dx$

PRIMITIVAS. EJERCICIOS BÁSICOS

1 Halla:

a) $\int x^4\,dx$ b) $\int (5x^3 - 8x^2 + 2x - 3)\,dx$ c) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ e) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ f) $\int \frac{3}{x^2}$

g) $\int \frac{5}{6x^4}\,dx$ h) $\int \frac{\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{3x}}\,dx$ i) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}\,dx$

j) $\int (\sqrt{5}x - 3)^4\,dx$ k) $\int \sqrt[3]{(7x-6)^2}\,dx$ l) $\int \frac{5x^3 + 6x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{3}}{x}\,dx$

m) $\int \frac{2x^4 - 6x^3 + 5x}{x+2}\,dx$ n) $\int \frac{5dx}{6-4x}$ ñ) $\int \frac{2x^4 + 6x - 3}{x-2}\,dx$

o) $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2}\,dx$

2 a) $\int (3x - 5\,tg\,x)\,dx$ b) $\int (5\cos x + 3^x)\,dx$ c) $\int (3\,tg\,x - 5\cos x)\,dx$ d) $\int (10^x - 5^x)\,dx$

3 a) $\int \frac{3}{x^2+1}\,dx$ b) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ c) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$ d) $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}\,dx$

4 a) $\int sen^2\,x\,dx$ b) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$ c) $\int \frac{dx}{1+8x^2}$

d) $\int \frac{dx}{25+9x^2}$ e) $\int \frac{dx}{3+2x^2}$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-8x^2}}$ h) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$ i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$

j) $\int e^{5x-2}\,dx$

INTEGRALES NO INMEDIATAS IMPORTANTES (PARA 2º)

$$\int f' \ln f \, dx = f(\ln f - 1) + C$$

$$\int f' \cdot \operatorname{tg} f \, dx = -\ln|\cos f| + C$$

$$\int \frac{f'}{\operatorname{tg} f} dx = \ln|\operatorname{sen} f| + C$$

INTEGRALES RACIONALES

Las llamamos así cuando estén formadas por el cociente de dos polinomios $\int \frac{D(x)}{d(x)} dx$

Distinguimos tres casos en función del grado:

A) SI $\partial D \geq \partial d$

Dividimos los dos polinomios y aplicamos la regla $D = d \cdot C + R$ (Dividendo = divisor por cociente más resto) Si divimos esa expresión por el divisor, d, nos queda:

$$\frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$$

Aplicándolo en la integral, obtenemos integrales inmediatas:

$$\int \frac{D}{d} = \int C + \int \frac{R}{d}$$

B) SI $\partial D < \partial d$ Y d TIENE TODAS SUS RAÍCES SIMPLES

Descomponemos en factores $d(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$ y planteamos:

$\frac{D}{d} = \frac{A}{(x-\alpha_1)} + \frac{B}{(x-\alpha_2)} + \cdots + \frac{N}{(x-\alpha_n)}$ calculamos los números $A, B, \dots, N$ y los aplicamos a la integral, que queda así dividida en integrales inmediatas:

$$\int \frac{D}{d} = \int \frac{A}{(x-\alpha_1)} + \int \frac{B}{(x-\alpha_2)} + \cdots + \int \frac{N}{(x-\alpha_n)} = A \ln|x - \alpha_1| + B \ln|x - \alpha_2| + \cdots + N \ln|x - \alpha_n|$$

C) SI $\partial D < \partial d$ Y d TIENE ALGUNA RAÍZ REAL MÚLTIPLE

Descomponemos en factores $d(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)^k$ (la última se repite k veces) y planteamos:

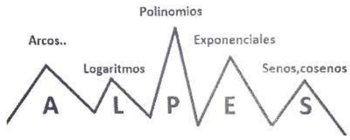
$$\frac{D}{d} = \frac{A}{(x-\alpha_1)} + \frac{B}{(x-\alpha_2)} + \cdots + \frac{N_1}{(x-\alpha_n)} + \frac{N_2}{(x-\alpha_n)^2} + \cdots + \frac{N_k}{(x-\alpha_n)^k}$$

Calculamos los números $A, B, \dots, N_1, \dots, N_k$ y resolvemos integrales logarítmicas y polinómicas.

INTEGRALES POR PARTES

Se aplica la regla $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (**u**n **d**ía **vi** un **v**iejo **v**estido **d**e **u**niforme)

Seguimos los pasos:



1. Elegimos como u la función que aparezca primero en la palabra y la otra será dv
2. Calculamos du derivando u (ponemos dx al final ya que estamos derivando con respecto a x)
3. Calculamos v por la integral de dv
4. Aplicamos la fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
5. Se repite el procedimiento con la nueva integral hasta llegar a una integral inmediata

EJEMPLOS DE ELECCIÓN ENTRE u Y dv

	La integral original $\int u\,dv$	Elegimos variables	Calculamos las recíprocas	Aplicamos fórmula $uv - \int v\,du$
Tipo I	$\int (x^2-4x)\cos 2x\,dx$ $\boldsymbol{P}olinomio \cdot \boldsymbol{S}eno\ o\ cos\ldots$	$u = x^2 - 4x$ $dv = \cos 2x\,dx$	$du = (2x-4)dx$ $v = \int \cos 2x\,dx = \frac{\sin 2x}{2}$	$(x^2-4x) - \int \frac{\sin 2x}{2}(2x-4)dx$ En este caso hay que repetir la regla con la nueva integral, cada vez se reduce 1 el grado del polinomio (en el siguiente paso ya se termina)
Tipo II	$\int (x+5)e^x dx$ $\boldsymbol{P}olinomio \cdot \boldsymbol{E}xponencial$	$u = x+5$ $dv = e^x dx$	$du = dx$ $v = e^x$	$(x+5)e^x - \int e^x dx = (x+5)e^x - e^x + C$
Tipo III	$\int x^2 \ln x\,dx$ $\boldsymbol{P}olinomio \cdot \boldsymbol{E}xponencial$	$u = x^2$ $dv = \ln x\,dx$	$du = 2x\,dx$ $v = x(\ln x - 1)$	$x^2 x(\ln x - 1) - \int x(\ln x - 1)2x\,dx$ repetir la regla con la nueva integral, cada vez se reduce 1 el grado del polinomio (en el siguiente paso ya se termina)
Tipo IV	$\int \operatorname{arctg} x\,dx$ $\boldsymbol{A}rcotg \cdot \boldsymbol{P}olinomio$	$u = \operatorname{arctg} x$ $dv = 1\,dx$	$du = \frac{1}{1+x^2}dx$ $v = x$	$\operatorname{arctg} x \cdot x - \int x \frac{1}{1+x^2}dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C$
Tipo V	$\int e^x \cdot \cos x\,dx$ $\boldsymbol{E}xponencial \cdot \boldsymbol{S}eno\ o\ cos..$	$u = e^x$ $dv = \cos x\,dx$	$du = e^x dx$ $v = \operatorname{sen} x$	$e^x \operatorname{sen} x - \int (\operatorname{sen} x)e^x dx$ Cíclica, repetimos y en siguiente paso volvemos a obtener la del principio, despejamos y obtenemos el resultado

INTEGRALES POR CAMBIO DE VARIABLE

Consiste en sustituir una parte del integrando por otra función o variable de forma que podamos resolver la integral por alguno de los métodos anteriores.

CÓMO ELEGIR LA VARIABLE ADECUADA

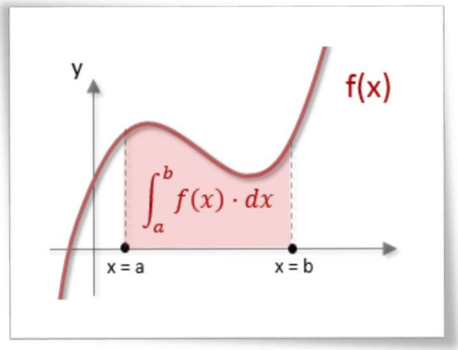
Si en el integrando aparecen	Sugerencia	
Raíces cuadradas	$t = \sqrt{Polinomio}$	
Raíces no cuadradas	$t = \sqrt[n]{polinomio}$	Siendo n = mínimo común índice de las raíces
Funciones exponenciales	$t = e^{nx}$	Siendo n = menor índice de los exponentes del integrando
Funciones logarítmicas	$t = \ln x$	

PASOS A SEGUIR

1. Elegir el cambio de variable adecuado (ver tabla)
2. Despejar x en la ecuación anterior
3. Derivar ambos lados de la ecuación
4. Sustituir t, x, dt en la integral original y ordenarla (la x debería desaparecer y quedar la integral dependiendo sólo de t)
5. Resolver la integral por los métodos anteriores (por partes, racional etc.)
6. Volver a ponerlo todo en función de x deshaciendo el cambio de variable en la integral ya resuelta.

INTEGRAL DEFINIDA

Definimos el valor absoluto de la integral entre dos límites como el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas, X, y las rectas $x = a$, $x = b$, incluido el signo. Como es un área, debemos tomar el valor absoluto (no tiene sentido hablar de áreas negativas) por eso es muy importante ver el recinto dibujado y elegir bien los límites de integración para evitar las áreas negativas o que se cancelen unas con otras.



Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

PROPIEDADES

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\int_a^a f = 0$$

$$\forall c \in (a,b) \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^a f$$

$$\int_a^b k \cdot f = k \cdot \int_a^b f$$

ÁLGEBRA

TEMA 13: INTRODUCCIÓN PARA 2º DE BACH

MATRICES

Una matriz es una “caja” de números ordenados en filas y columnas.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Diagonal principal}$$

Matriz cuadrada de 3 filas x 3 columnas. Las filas se miran en horizontal y las columnas en vertical. Se llama “cuadrada” porque el nº filas = nº columnas

Las que nos importan son las matrices cuadradas 3x3 y 2x2. Más adelante veremos que nos van a servir para solucionar sistemas de ecuaciones de forma rápida y sencilla. En los siguientes apuntes se trabaja siempre sobre FILAS (que suele ser lo más habitual) pero se podría hacer exactamente lo mismo con columnas. Eso sí, o trabajamos siempre con filas o siempre con columnas (no mezclar)

TIPOS DE MATRICES

FILA NULA

Si todos sus elementos son 0 (es decir, es una fila de ceros).

En el ejemplo siguiente la F_2 es nula: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

MATRIZ IDENTIDAD

Matriz cuadrada que tiene todo unos en la diagonal principal y el resto son ceros.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES BÁSICAS

MULTIPLICAR (O DIVIDIR) UNA FILA POR UN Nº

Hay que multiplicar TODOS los elementos de esa fila por ese nº.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\cdot F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

SUMAR (O RESTAR) DOS FILAS

Se suman elemento a elemento. El resultado se escribe en la 1ª fila que indicamos, por ejemplo si hago $F_3 + F_1$, sumo ambas filas y escribo el resultado de la suma en F_3 porque es la que se indicó de primera.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

INTERCAMBIAR FILAS

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

COMBINACIÓN LINEAL DE FILAS

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1-3F_3} \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 3\cdot(-1) & 2\cdot 2 - 3\cdot 2 & 2\cdot(-1) - 3\cdot(-1) \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

El resultado lo escribimos siempre en la fila que se indica primero, en este ejemplo F_1

RANGO DE UNA MATRIZ

Es el número de filas linealmente independientes.

> El rango de una matriz y el rango de la matriz transformada mediante combinaciones lineales es el mismo.

MÉTODO DE GAUSS PARA EL CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

Queremos transformar la matriz original en la matriz identidad, la idea es, mediante combinaciones lineales y permutaciones, llegar a transformarla haciendo unos en la diagonal principal y ceros en el resto.

Paso 1: fijamos la COLUMNA 1, C_1 (columna ¡ojo!, NO fila)

Paso 2: Hacemos 1 en el elemento correspondiente a la diagonal principal

Paso 3: Hacemos 0 en los otros dos elementos de esa columna

Paso 4: repetimos el mismo proceso en las otras columnas

> r(A) = nº de FILAS NO NULAS

SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES (TODAS LAS ECUACIONES DE GRADO 1)

A cualquier sistema de ecuaciones lineales, podemos asociarle dos matrices:

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ La matriz $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right)$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS 3X3 POR MATRICES

- Si r(A) = r(A*) = 3 = nº de incógnitas $\Longrightarrow$ S.C.D. existe una única solución
- Si r(A) = r(A*) = 2 < nº de incógnitas $\Longrightarrow$ S.C.I. existen infinitas soluciones
- Si r(A) $\neq$ r(A*) $\Longrightarrow$ S.I. NO tiene solución

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE GAUSS

1. Dado cualquier sistema lineal le asociamos una matriz y su matriz ampliada (la que se obtiene de añadir la columna de los términos independientes)
2. Por el método de Gauss intentamos diagonalizar la matriz, **incluyendo en las operaciones la columna de la ampliada.**
3. Por el número de filas nulas sabemos el rango de la matriz y podemos discutir el sistema.
4. En el caso de S.C.D. la solución se obtiene como la última columna (la del término independiente de la ampliada) una vez hayamos diagonalizado la matriz.

Ejemplo

Estudiar el sistema $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ y encontrar su solución, si la tiene

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 5F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$r(A) = r(A^*) = 3 = nº\ de\ incógnitas, Sistema\ Compatible\ y\ Determinado$$

$$la\ solución\ es\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En lugar de diagonalizar la matriz, el método se puede abreviar y triangularizar (haciendo ceros debajo de la diagonal principal)

FICHA SISTEMAS LINEALES POR GAUSS

1. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$ $solución\ x = -9, y = 4, z = 7$

2. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$ $solución\ x = 1, y = -1, z = -\frac{1}{2}$

3. $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ $solución: No\ tiene\ solución, S.I.$

4. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ 2x + 2y + 6z = 3 \end{cases}$ $solución: SCI\ (infinitas\ soluciones)\ \ x = 2 - 3\lambda, y = -\frac{1}{2}, z = \lambda, con\ \lambda \in \mathbb{R}$

5. $\begin{cases} y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ $solución: S.I., no\ tiene\ solución$

6. $\begin{cases} y + z = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ $solución: x = 1, y = 1, z = 0$

7. $\begin{cases} y + z = 1 \\ 2y + 2z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$ $SCI\ (infinitas\ soluciones) x = -\lambda, y = 1 - \lambda, z = \lambda, con\ \lambda \in \mathbb{R}$

8. $\begin{cases} 3x + y + 2z = 15 \\ 2x + 4y + z = 20 \\ x + 7y = 25 \end{cases}$ $solución: S.C.I. x = -5 - \lambda, y = 30 + \lambda, z = \lambda, con\ \lambda \epsilon \mathbb{R}$

9. $\begin{cases} x + y + z = 26 \\ 1{,}4x + 1{,}25y + 1{,}5z = 35{,}2 \\ 1{,}25y + z = 1{,}5z + y \end{cases}$ $solución: SCD, x = 8, y = 12, z = 6$

10. $\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 2x - y - 6z = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$ $solución: S.I. no\ tiene\ solución$