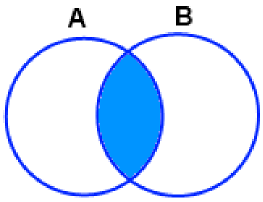
BLOQUE IV: PROBABILIDAD.

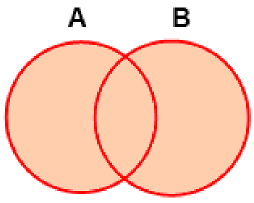
1.- Sucesos. Operaciones con sucesos.

Dados dos sucesos A y B denominamos:

- Suceso **UNIÓN,** $\boldsymbol{A \cup B}$**,** al suceso formado por todos los elementos de A y de B. Este suceso se verifica cuando se da uno de ellos, o ambos.
- Suceso **INTERSECCIÓN**, $\boldsymbol{A \cap B}$**,** al suceso formado por los elementos que son **a la vez** de A y de B. Se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B.

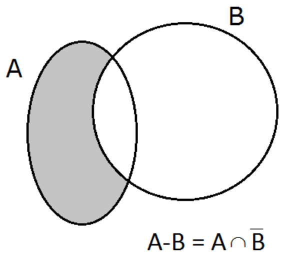


Suceso A∩B

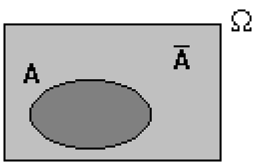


Suceso AUB

- Suceso **DIFERENCIA, A-B,** es el suceso formado por todos los elementos que son de A pero que NO son de B.



- Suceso **COMPLEMENTARIO O CONTRARIO,** $\boldsymbol{\bar{A}}$**,** de un suceso A es el que se verifica cuando no se da A.



- Sucesos **INCOMPATIBLES**: dos sucesos son incompatibles cuando no se pueden dar a la vez, no tienen nada en común. Es decir, $\boldsymbol{A \cap B} = \emptyset$

  En caso contrario, $\boldsymbol{A \cap B} \neq \emptyset$ se dice que los sucesos son **COMPATIBLES**.
- Algunas de las propiedades más importantes de sucesos son las **LEYES DE MORGAN**:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

- Finalmente conviene indicar además que si $A\ c\ B\ entonces\ A \cup B = B\ y\ A \cap B = A$

Ejemplos sencillos:

1.- Sean A, B, C sucesos de un espacio muestral E. Utilizando estos sucesos expresa:

a) Los tres sucesos suceden simultáneamente.

b) Ocurren A o B pero no C.

c) Ocurre alguno de los tres sucesos.

d) No ocurre ninguno de los tres sucesos.

2.- Tenemos una urna con 9 bolas enumeradas del 1 al 9. Sacamos una bola, miramos el número y la devolvemos. Sean los sucesos:

A=”salir número primo” B=”salir impar” C=”salir múltiplo de 3” Calcula:

a) $A \cap B$ b) $B \cap C$ c) $(A \cup B) \cap C$ d) $A \cap \bar{B}$ e) B-C f) $\overline{A \cup B}$

2.- Probabilidad

Ley de los grandes números: Recordamos que frecuencia absoluta de un suceso es el número de veces que se repite ese suceso y frecuencia relativa es la proporción de veces que ocurre.

Si repetimos un suceso un número indeterminado de veces podríamos observar que todas las frecuencias relativas tienden a estabilizarse por exceso o por defecto a un número. Precisamente, partiendo de estos experimentos se enunció la **ley de los grandes números** y dice: “La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número a medida que el número de pruebas crece indefinidamente y a este número se le llamará Probabilidad del suceso”

$\lim_{N \to \infty} f_r(S) =$P(S)

Pero como esta definición tenía un inconveniente de tipo práctico se demuestra posteriormente la conocida **Ley de Laplace** que dice que la probabilidad de un suceso es el cociente entre los casos favorables a que se de ese suceso y todos los casos posibles que existan.

$$\boldsymbol{P(S) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ suceso\ S}{Número\ de\ casos\ posibles}}$$

Pero no es suficiente con las definiciones anteriores si no que necesitamos más información sobre probabilidad y eso se indica en la **Definición axiomática de probabilidad**:

Ax 1. Para cualquier suceso A, $P(A) \geq 0$

Ax 2. La probabilidad de un suceso seguro o probabilidad total es 1, es decir, *P(E)*=1

Ax 3. Si A y B son sucesos **INCOMPATIBLES**, la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades.

Si $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset\ entonces\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

De estos axiomas se deducen varias propiedades muy necesarias:

P1. Probabilidad del suceso contrario: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

P2. Probabilidad del suceso imposible $P(\emptyset) = 0$

P3. Si A C B $P(A) \leq P(B)$

P4. Generalización del axioma 3 a sucesos incompatibles dos a dos, es decir, A, B, C sucesos tal que $A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset\ entonces\ P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ e incluso se podría generalizar a más sucesos.

P5. En caso de sucesos COMPATIBLES se verifica: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Ejercicio 1: Lanzamos una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que salga cruz?

Ejercicio 2: En una bolsa hay 3 bolas rojas y 2 blancas, calcula la probabilidad de que al elegir una bola salga blanca; y también de que salga roja.

Ejercicio 3: Se consideran dos sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio con P(A)=0,7 y P(B)=0,6. ¿Pueden A y B ser incompatibles?

Ejercicio 4: De una baraja española se extrae una carta. Si consideramos A="salir oro", B=" salir rey" y C="salir as de espadas" . Calcula: a) $P(A \cup B)$ b) $P(A \cup C)$

Ejercicio 5: Un aspirante a municipal hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la 1ª prueba es 0,6, la que pase la 2ª es 0,8 y la de que pase las dos es 0,5.

a) ¿Son los sucesos incompatibles?
b) Calcula la probabilidad de que pase al menos una prueba.
c) Calcula la probabilidad de que no pase ninguna prueba.

Ejercicio 6: Sea $\mathrm{P(A)} = 0{,}4$; $\mathrm{P(B)} = 0{,}7$; $\mathrm{P}(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}8$ Calcula:

a) $\mathrm{P}(\overline{A \cap B})$ b) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B)$ c) $\mathrm{P}(A \cup B)$ c)¿Son compatibles A y B?

Ejercicio 7: Dados $P(M \cap N) = 0{,}1$; $P(M \cup N) = 0{,}6$; $P(\bar{M}) = 0{,}7$ calcula *P(M)* y *P(N).*

Ejercicio 8: En una baraja se suprimen varias cartas. Entre las que quedan, se dan las siguientes probabilidades de ser extraídas: P(Rei)=0,15 P(Bastos)=0,3 P(Ni rey ni basto)=0,6.

a) ¿Está entre ellas el rey de bastos?
b) ¿Cuántas cartas hay?

Ejercicio 9: PAU set 2016

Ejercicio 10: En una empresa disponen de los tipos y las marcas de vehículos reflejados en la tabla.

	OPEL	RENAULT	SEAT
TURISMO	3	6	5
FURGONETA	1	2	8

Si las llaves están en una caja y elegimos una llave al azar, determinar cuál será la probabilidad de que:

a) Las llaves sean de un vehículo de la marca Seat.
b) Las llaves sean de una furgoneta de la marca Renaul.
c) Las llaves pertenezcan a un turismo que no sea Opel.
d) Las llaves no sean de una furgoneta, ni de un vehículo de la marca seat.

Ejercicio 11: El 35% de los vecinos de un barrio practica algún deporte. El 60% está casado y el 25% no está casado, ni hace deporte. Describe, en función de D y C, los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades.

a) Está casado y practica deporte.

b) Practica deporte, pero no está casado.
c) Está casado, pero no practica deporte.
d) No está casado.
e) No está casado, ni practica deporte.

3.- Probabilidad condicionada.

Dados dos sucesos A y B, se llama Probabilidad Condicionada de A respecto de B o condicionada a B al siguiente cociente:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \quad P(B) \neq 0$$

Análogamente:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}; \quad P(A) \neq 0$$

De las expresiones anteriores se podría despejar la probabilidad de la intersección:

$$P(A \cap B) = P\left(\frac{B}{A}\right) \cdot P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

Ejercicio 12: En Cee el 40% de la población tiene el pelo castaño, el 25% ojos castaños y el 15% ojos y pelo castaños. Calcula la probabilidad de que al encontrarte a alguien en la calle que tenga el pelo castaño tenga también los ojos.

Ejercicio 13: En una oficina hay 8 chicos y 9 chicas. De ellos, 4 chicos y 6 chicas llevan gafas. Si escogemos una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Se chica, sabiendo que lleva gafas.
b) Lleve gafas, sabiendo que es chico.

4.- Sucesos independientes.

Dados A y B sucesos con probabilidades no nulas, decimos que A y B son **INDEPENDIENTES** si:

$P(A/B) = P(A) \text{ o } P(B/A) = P(B)$, es decir, que no hay relación, no influye uno en el otro. De esto deducimos que:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

OJO, esto sólo se cumple si son independientes.

Ejercicio 14: En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica:

$$P(A \cap B) = 0{,}1 \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}6 \quad P(A/B) = 0{,}5$$

a) Calcula P(B)
b) Calcula $P(A \cup B)$
c) ¿Son A y B independientes?

Ejercicio 15:(Examen 2º bach) Se consideran los sucesos A ,B de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0{,}4$; $P[B/A] = 0{,}25$ $P(\overline{B}) = 0{,}75$

a) Estúdiese si los sucesos A y B son independientes.
b) Calcula $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$.
c) Finalmente, ¿Serán incompatibles los sucesos A y B?

Ejercicio 16: Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 3/4$;

$P(A/B) = 3/4$; $P(B/A) = 1/4$

a) Demuéstrese que los sucesos A y B son independientes pero no incompatibles.

b) Calcular $P(\bar{A}/\bar{B})$

Ejercicio 17: El 30% de los estudiantes de 1º de bachillerato de este Instituto practica el fútbol, el 40% practica el baloncesto y el 10% practica ambos deportes. Se elige un estudiante al azar. Calcula:

a) La probabilidad de que no juegue al fútbol ni al baloncesto.

b) Si juega al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al baloncesto?

c) ¿Son independientes jugar al fútbol y al baloncesto? Indica la razón de la repuesta.

Ejercicio 18: Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Se pide:

a) ¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?
b) Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?

5. Teorema de probabilidades totales

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles 2 a 2 y cuya unión es el espacio muestral ($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$) y B es otro suceso.

Resulta que:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \ldots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)$$

Ejemplos

Se dispone de tres cajas con bombillas. La primera contiene 10 bombillas, de las cuales hay cuatro fundidas; en la segunda hay seis bombillas, estando una de ellas fundida, y la tercera caja hay tres bombillas fundidas de un total de ocho. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una bombilla al azar de una cualquiera de las cajas, esté fundida?

Tenemos tres cajas de bombillas, C1, C1 y C3 y de ellas hay F=" bombillas fundidas" y B="bombillas buenas". Cogemos los datos:

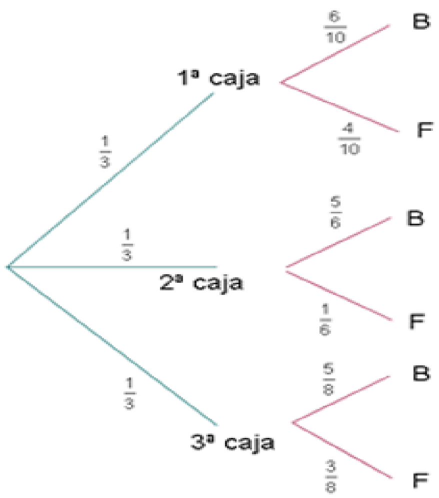
P(C1)=1/3 P(C2)=1/3 P(C3)=1/3 y ahora sabemos de cada caja el total y las fundidas:

$P\left(\frac{F}{C1}\right) = \frac{4}{10} \quad P\left(\frac{F}{C2}\right) = \frac{2}{6} \quad P(F/C1) = 3/8$

Y nos pide la probabilidad de elegir una bombilla fundida de entre todas:

$$P(F) = P\left(\frac{F}{C1}\right) \cdot P(C1) + P\left(\frac{F}{C2}\right) \cdot P(C2) + P\left(\frac{F}{C3}\right) \cdot P(C3) = 113/360$$

Con diagrama de árbol:



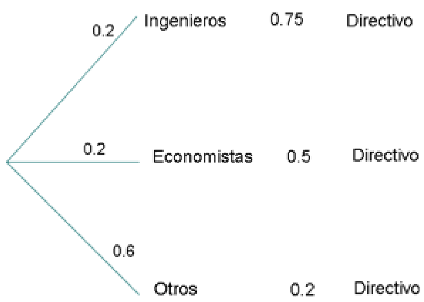
$$p\left(fundida\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{113}{360}$$

7. Teorema de Bayes

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son **Sucesos incompatibles** 2 a 2 y cuya **unión** es el **espacio muestral** ($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$) y B es otro suceso. Resulta que:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \ldots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)}$$

Ejemplo: El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que los no ingenieros y los no economistas solamente el 20% ocupa un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?



$$p\left(ingeniero\ /\ directivo\right) = \frac{0.2\cdot 0.75}{0.2\cdot 0.75 + 0.2\cdot 0.5 + 0.6\cdot 0.2} = 0.405$$