UNIDAD 4: 1ª PARTE: LÍMITES

2ª PARTE: ASÍNTOTAS O RAMAS INFINITAS

3ªPARTE: CONTINUIDAD.

1ª PARTE: LÍMITES.

INTRODUCIÓN

Recordatorio. Definición de Sucesión: Una sucesión es un conjunto de números que se pueden enumerar. Cada uno de los números se llama término y cada sucesión viene dada por su término general que es aquel que te proporciona el valor del término sabiendo su posición. $\mathbf{a_1, a_2, \ldots\ldots a_n}$

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN: El límite de una sucesión de números reales de término general a_n es un número real "a" cuando para valores muy grandes de n, los términos de la sucesión se aproximan a "a".

Se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y se lee: *El límite cuando n tiende a infinito de a_n es a.*

Ahora bien, si consideramos la expresión algebraica de una función como una sucesión, los límites de las funciones cuando x tienden a infinito coinciden con el límite de la sucesión.

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN:

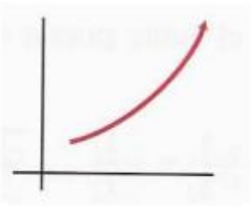
El **límite de una función** es un concepto fundamental del análisis matemático.

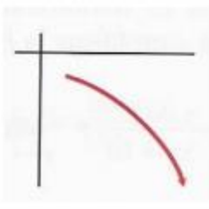
1. **Límite de una función en el infinito.**
   El límite de una función cuando x tiende a infinito puede ser + o – infinito o ser un número real ***L***.

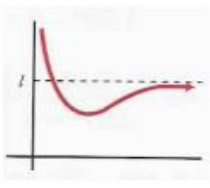
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ Se lee: El límite cuando x tiende a más infinito de f(x) es más infinito
Significa: la función toma valores grandes positivos cuando la x toma valores grandes positivos. (1° cuadrante)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ Se lee: El límite cuando x tiende a más infinito de f(x) es menos infinito.
Significa: la función toma valores grandes negativos cuando la x toma valores grandes positivos. (4° cuadrante)

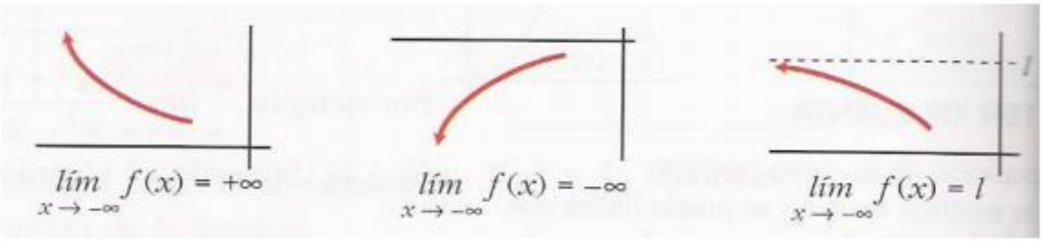
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ Se lee: El límite cuando x tiende a más infinito de f(x) es ℓ
Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x toma valores muy grandes positivos: $y = \ell$ es una asíntota horizontal







$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	Se lee: El límite cuando x tiende a menos infinito de f(x) es más infinito Significa: la función toma valores grandes positivos cuando la x toma valores grandes negativos. (2º cuadrante)
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	Se lee: El límite cuando x tiende a menos infinito de f(x) es menos infinito. Significa: la función toma valores grandes negativos cuando la x toma valores grandes negativos. (3º cuadrante)
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$	Se lee: El límite cuando x tiende a menos infinito de f(x) es ℓ Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x toma valores muy grandes negativos: $y=\ell$ es una asíntota horizontal



CÁLCULO DE LÍMITES

Antes de empezar con límites de funciones concretas vamos a ver cuánto es:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

Pensadlo!!

1.1.- Límite de una potencia.

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} +\infty & \text{si } k>0 \\ 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k<0 \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} k^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } k>1 \\ 0 & \text{si } -1<k<1 \\ \text{No existe} & \text{si } k<-1 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$\boldsymbol{a)}\ \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty \quad \boldsymbol{b)}\ \lim_{x\to\infty} x^{-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \quad \text{c)}\ \lim_{x\to\infty} 3^x = \infty \quad \boldsymbol{d)}\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$$

1.2.- Límite de un polinomio.

$$\lim_{n\to\infty} (a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0) = \lim_{n\to\infty} a_k n^k = a_k \cdot \lim_{n\to\infty} n^k$$

$$\lim_{x\to\infty} ax^n + bx^{n-1} + \cdots + p = \lim_{x\to\infty} ax^n = a\lim_{x\to\infty} x^n = a\cdot\infty = \begin{cases} -\infty & si\ a<0 \\ +\infty & si\ a>0 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$a)\ \lim_{x\to\infty} 3x^3 + 4x^2 - 6 = 3\cdot\lim_{x\to\infty} x^3 = +\infty \qquad b)\ \lim_{x\to\infty} -5x^3 + 4x^2 - 6 = -\infty$$

1.3.- Límite de un cociente de polinomios.

En este caso es donde nos podemos encontrar con la primera **INDETERMINACIÓN** $\frac{\infty}{\infty}$

Una indeterminación es una expresión que no nos permite calcular el límite, ni siquiera saber si existe o no. En estos casos hay que buscar alternativas para resolverlas.

Ejemplos:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2-6}{4x^2-6} = \frac{\infty}{\infty} = Ind \qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2-6}{5x^3-4x^2-6} = \frac{\infty}{\infty} = Ind$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-6}{3x^3+4x^2-6} = \frac{\infty}{\infty} = Ind$$

INDETERMINACIÓN $\frac{\infty}{\infty}$ Para solucionarla se comparan los grados de los polinomios. Grado del numerador$\delta(Num)$ y grado del denominador $\delta(Den)$.

1º) Si Grado (Num)>Grado (Den) entonces la solución es: + o - ∞

2º) Si Grado (Num) <Grado (Den) entonces la solución es : Cero;0

3º) Si Grado (Num)=Grado (Den) entonces la solución es: $\frac{Coef\ principal\ del\ Num}{Coef\ principal\ del\ Den}$

Ejemplos: $a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2-6}{4x^2-6} = +\infty \qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2-6}{5x^3-4x^2-6} = \frac{3}{5} \qquad c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-6}{3x^3+4x^2-6} = 0$

Otra forma más tediosa de resolver esta indeterminación es dividiendo todas las expresiones entre la mayor potencia de n o x dependiendo si os hablan de sucesión o función. Hay veces que cuando hay raíces se usa esta forma para evitar fallos de grados habituales en el alumnado.

Ejemplos: $a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-6}{3x^4+4x^2-6} = \frac{\infty}{\infty} = Ind\ \rightarrow Potencia\ del\ Num\ \boldsymbol{x^3}\ ,potencia\ del\ denominador\ \boldsymbol{x^4}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{6x^3-6}}{\mathbf{3x^4+4x^2-6}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{6x^3}/_{\mathbf{x^4}}-\mathbf{6}/_{\mathbf{x^4}}}{3\mathbf{x^4}/_{\mathbf{x^4}}+\mathbf{4x^2}/_{\mathbf{x^4}}-\mathbf{6}/_{\mathbf{x^4}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{6}/_{\mathbf{x}}-\mathbf{6}/_{\mathbf{x^4}}}{3+\mathbf{4}/_{\mathbf{x^2}}-\mathbf{6}/_{\mathbf{x^4}}}=\frac{0}{3}=0$$

$b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2-1}{\sqrt{n^3+6n+1}}=\frac{\infty}{\infty}=Ind$ Grado Num? Grado Den?? ¿Cuál es la solución?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-1}{\sqrt{n^3+6n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6n^2-1}{n^2}}{\frac{\sqrt{n^3+6n+1}}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6-{}^1/_{n^2}}{\sqrt{{}^{n^3}/_{n^4}+{}^{6n}/_{n^4}+{}^1/_{n^4}}}=\frac{6}{0}=\infty$$

Página 229 Ej 11, 12. Página 244 Ej 47, 48

INDETERMINACIÓN $\infty-\infty$

Esta indeterminación aparece al calcular límites de diferencia de cocientes de polinomios o diferencia de radicales.

- Si es diferencia de cociente de polinomios se realiza la operación algebraica y se obtiene un cociente de polinomios ya estudiado.

Ejemplo: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n}-\frac{n^2}{n+1}\right)=??$

- Si la indeterminación procede de una resta de radicales se soluciona multiplicando y dividiendo por el conjugado.

Ejemplo: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-2}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n-2}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n-2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n-2}+\sqrt{n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-2-n^2}{(\sqrt{n-2}+\sqrt{n})}=\cdots$

Página 230 Ej 13, 14. (Ap a) son os exemplos) Página 244 Ej 49, 50

INDETERMINACIÓN $\mathbf{1^\infty}$

Se conoce como la indeterminación del ***número e*** porque se utiliza la sucesión cuyo término general cuando n se acerca a infinito es el ***número e***.

La sucesión $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es una sucesión creciente cuyos términos 2; 2,25; 2,37037… se acercan al número 2,718281. Este número se denomina ***Número e***

Es por esto que para solucionar la indeterminación $\mathbf{1^\infty}$ se buscará encontrar una expresión genérica del tipo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}}=\boldsymbol{e}$

Ejemplo: $a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/5}$ $\quad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{2n}$ $\quad c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n+2}$

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{1/5}=e^{1/5}$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{n}}\right)^{2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{n}}\right)^{\frac{n^2+1}{n}\frac{n}{n^2+1}\cdot 2n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\cdot 2n}=e^{???}$$

$$c)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n-1}-1\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{??}{n-1}\right)^{n+2}=??$$

Página 231 Ej 15) 16) Página 244 Ej 51

2. Límite de una función en un punto finito. LÍMITES LATERALES

El límite de la función $f(x)$en el punto a, es el valor al que se acercan las imágenes ($y=f(x)$) cuando los puntos del dominio (las x) se acercan al valor a.

Definición: Decimos que **el límite de *f(x)* cuando *x* tiende al punto *a* es *L*** si la función toma valores cada vez más cercanos a *L* cuando *x* toma valores cada vez más cercanos al punto *a*.

Lo expresamos mediante:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

Ejemplo: Sea $f(x)=x^2-1$ calcular $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)=2^2-1=3$

No siempre es tan fácil calcular los límites de una función en un punto. Para saber enfrentarse a todos es importante conocer la definición de **límites laterales**.

LÍMITES LATERALES

Se trata do observar lo que ocurre cuando nos acercamos a un número por su derecha, se designará con un superíndice +, y lo que ocurre cuando nos acercamos por su izquierda, se designará con un superíndice - .

- El límite de una función f(x) cuando x se acerca a un punto c por la izquierda es un nº real L, cuando para valores de x próximos a pero más pequeños que el, la función se aproxima a L.

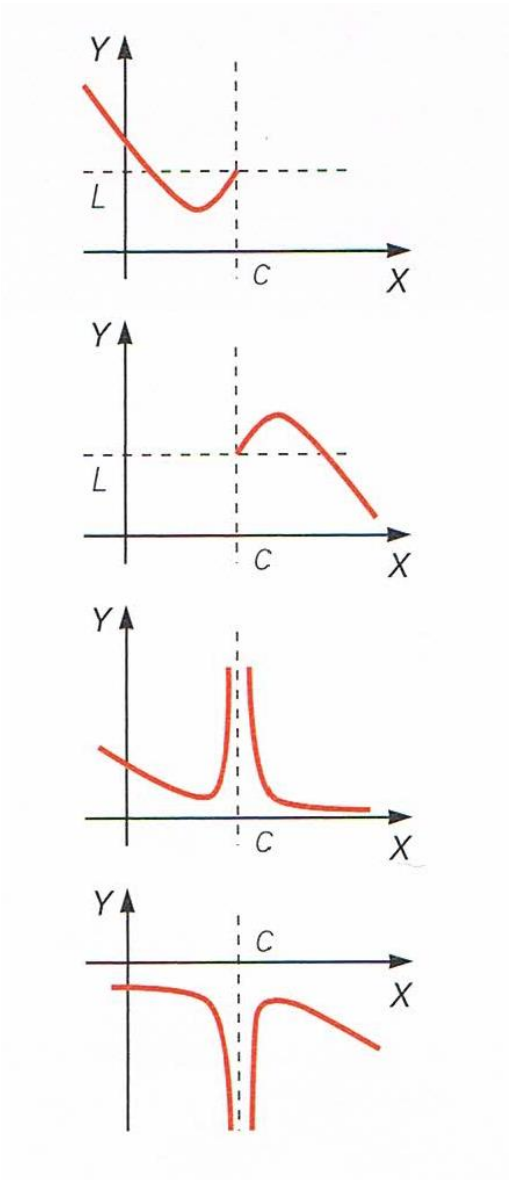
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

- El límite de una función f(x) cuando x se acerca a un punto c por la derecha es un nº real L, cuando para valores de x próximos a c pero más grandes que el, la función se aproxima a L.

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

- Los límites laterales también pueden dar como resultado + o – infinito, cuando al acercarse x al punto por la derecha o por la izquierda el valor de f crece o decrece cada vez más.

Finalmente decimos que **EXISTE** límite cuando x tiende a c y su valor es L, $\lim_{x \to c} f(x) = L$**, cuando existen los límites laterales y son iguales.**



El ejemplo más claro para entender los límites laterales es con funciones definidas a trozos.

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 \ \ si\, x \leq 0 \\ -x \ \ si\, 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{x-1} \ \ \ si\, x > 2 \end{cases}$ Calcular $\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{f}(\mathbf{0})\, \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{f}(\mathbf{2})\ \boldsymbol{b})\ \lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$; $\boldsymbol{c})\ \lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$;

Antes de seguir con las indeterminaciones vamos a ver este vídeo que luego concretaremos