UNIDAD 4: 3ª PARTE: CONTINUIDAD

2ª PARTE: CONTINUIDAD

La idea de función continua es la de que "puede ser construida con un solo trazo". Pero en este curso vamos a aprender a estudiar la continuidad de manera analítica.

Definición:

Una función f(x) es continua en un punto x=a si se cumple que:

- **Existe *f(a)*, es decir, está definida en ese punto.**
- **Existe $\lim_{x \to a} f(x)$**
- $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

CONTINUIDAD DE FUNCIONES ELEMENTALES

- Las **funciones polinómicas** son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las **funciones racionales** no son continuas en los puntos que anulan el denominador.
- Las **funciones con radicales** de índice par no existen en los valores que hacen el radicando negativo. Si el índice es impar, son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las **funciones exponenciales** son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las **funciones logarítmicas** no son continuas en los puntos en los que el logaritmo es cero o un número negativo.
- De las **funciones trigonométricas**, la única función que no es continua es $f(x) = tg\, x$, ya que no existe en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

No son continuas en los puntos donde no están definidas, es decir en los puntos que no están en el dominio puesto que por definición de dominio, en el están aquellos puntos donde existe función ,en el resto no, por lo tanto no se cumple ya la primera premisa de la definición.

TIPOS DE DISCONTINUIDADES

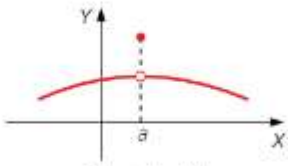
Discontinuidad evitable

Decimos que hay una discontinuidad evitable en *a* cuando existe $\lim_{x \to a} f(x)$, es decir, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$, pero ocurre una de estas dos condiciones:

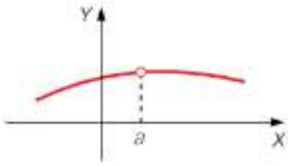
- El límite no coincide con el valor de la función en ese punto.

$$f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$$

- La función no está definida en ese punto.



$f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

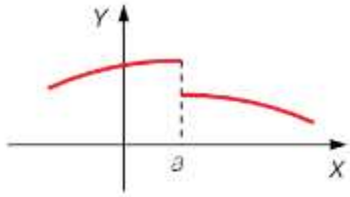


No existe $f(a)$.

Discontinuidad de salto finito

Se produce cuando en un punto, a, no existe $\lim_{x \to a} f(x)$ debido a que, aunque existen los límites laterales, estos no coinciden.

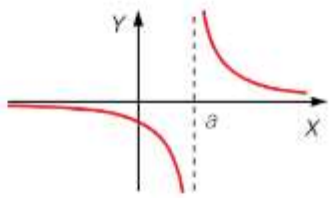
$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$



Discontinuidad de salto infinito

Existe cuando en un punto, a, la función tiene una asíntota vertical. Es decir, uno o los dos límites laterales son infinito.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \ \text{ o } \ \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$



- La discontinuidad evitable se llama así porque sería fácil de evitar redefiniendo la función con un valor de f en el punto en el que no está definida o es distinto. Ese valor sería el valor del límite.
- La discontinuidad de salto finito es muy frecuente en funciones definidas a trozos precisamente en los puntos donde la función cambia.
- Y en la discontinuidad de salto infinito siempre existe una asíntota vertical en x=a.

EJEMPLO

15 Estudia la continuidad de esta función y clasifica sus puntos de discontinuidad.

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \le -1 \\ \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

La función puede presentar puntos de discontinuidad en el punto de paso de una expresión a otra, $x = -1$, y en los puntos que anulan el denominador de la función racional, $x = 2$ y $x = -2$.

Para $x = 2$: $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{2-2}{2^2-4} \to \dfrac{0}{0} \to$ No existe $f(2)$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Discontinuidad evitable. $f(x)$ sería continua en $x = 2$ haciendo $f(2) = \dfrac{1}{4}$.

Para $x = -2$: $\lim_{x \to -2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{-2-2}{(-2)^2-4} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = -2$

Discontinuidad de salto infinito.

Para $x = -1$: $\lim_{x \to -1^-} (x+3) = -1+3 = 2$ $\quad \lim_{x \to -1^+} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{-1-2}{(-1)^2-4} = 1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim_{x \to -1^+} f(x) \to \text{Discontinuidad de salto finito}$$

Ejercicios:

Página 239, Ej 32 y 33 Pág 249 Ej 101 y de la misma página haremos en clase el 103 y posteriormente haréis el 104 e 105