UNIDAD 4: DERIVADAS.

PARTE 1: DEFINICIÓN DE DERIVADA.

PARTE 2: REGLAS DE DERIVACIÓN.

PARTE 1: DEFINICIÓN DE DERIVADA.

La derivada de una función está representada gráficamente como una **línea recta superpuesta sobre cualquier curva** (función), el valor de esta **pendiente** respecto al eje sobre el cual está siendo estudiada la función recibe el nombre de **Derivada**.

Partimos de la definición de TASA DE VARIACIÓN MEDIA, **pues la tasa de variación media es el primer paso para que puedas empezar a entender qué es una derivada.**

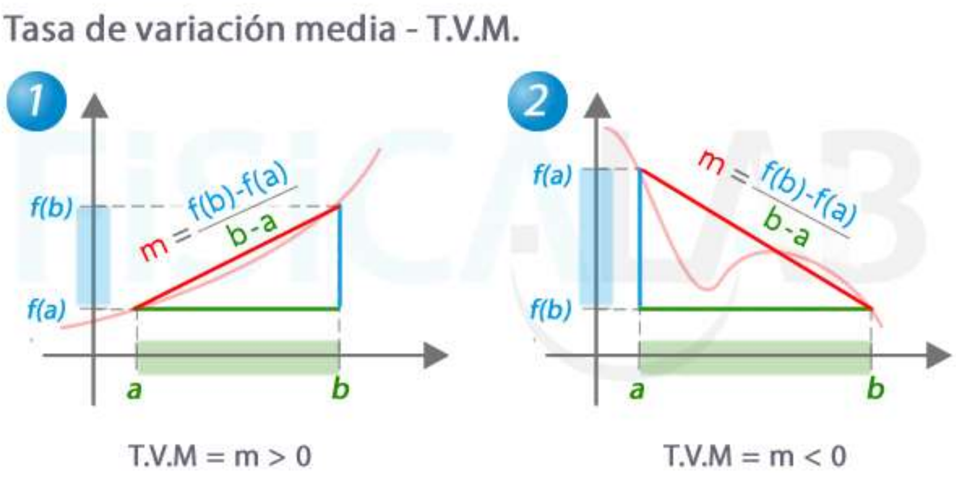
La tasa de variación media de una función en un intervalo nos permite **estudiar el cambio** que experimenta dicha función en el intervalo. Sería ver el incremento que sufre y o f(x) con respecto al incremento que sufre x.

$$T.V.M\,[a,\ b] = \frac{\text{Variación de } y}{\text{Variación de } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

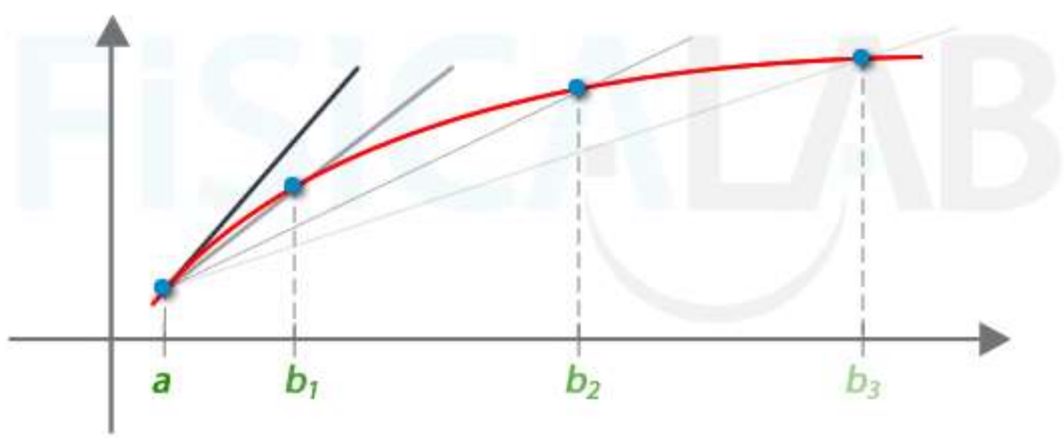
Pero como nosotros conocemos la función f(x) la variación en y la vamos a expresar de otra manera, entonces definimos ***Tasa de variación media de f en el intervalo [a,b] como:***

$$T.V.M\,[a,\ b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geométricamente, la tasa de variación media es la **pendiente de la recta** que pasa por los puntos *(a,f(a))* y *(b, f(b))*.



Partiendo de la definición de Tasa de variación media vamos al concepto de tasa de variación instantánea que sería la tasa de **variación en un punto** concreto.



Si queremos conocer la variación de la función en un punto a podemos comenzar buscando la variación media en un intervalo, por ejemplo (a, b), y **haciendo este cada vez más pequeño, aproximando b a a**.

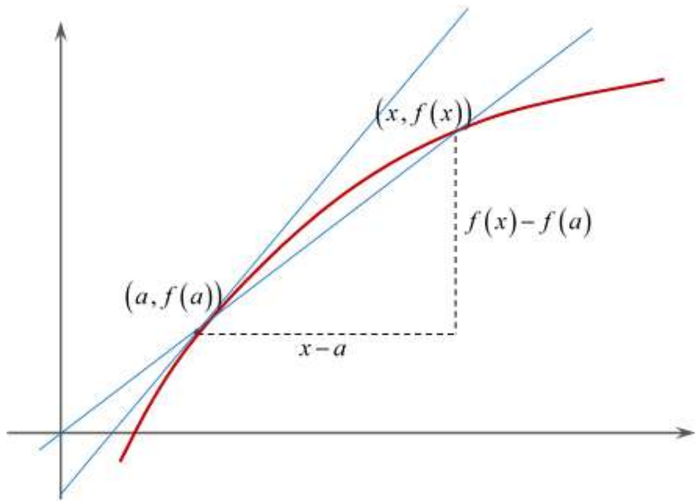
La tasa de variación media nos daba el crecimiento en un intervalo, por tanto, haciendo el intervalo infinitamente pequeño obtenemos la **variación o *rapidez de cambio*** en el punto, que es precisamente lo que andamos buscando.

Con esto ya podemos pasar a la definición de derivada. Partíamos ya de esta frase entonces sólo queda pasarla a términos matemáticos teniendo en cuenta la definición de tasa de variación media e instantánea.

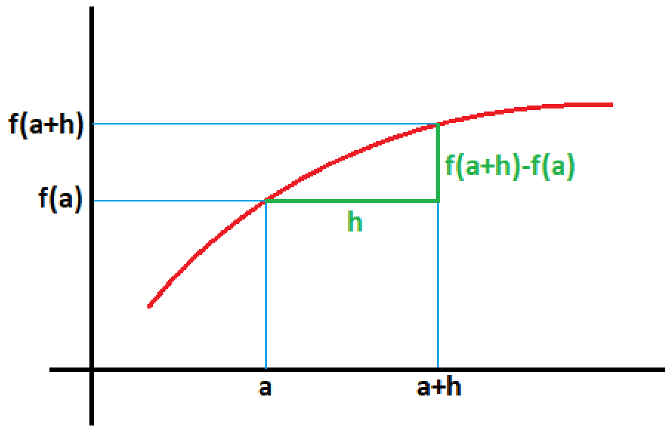
Definición: Se llama **función derivada de *f(x)* en el punto *a***, o simplemente **derivada de f en a**, y se denota normalmente como ***f'(a)***, al límite:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si este límite existe y es finito decimos además que f es derivable en x=a.



Pero ahora haremos un cambio, llamamos b=a+h o x=a+h. Como x se acercaba a ***a*** *entonces debe cumplirse que* ***h*** *se acerque a* ***cero*** *y además x-a sería h. Con esto rehacemos la definición de derivada:* $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$



Igualmente se dice que f es derivable en el punto x=a si existe el límite anterior y es finito.

Es indiferente usar esta definición de derivada que la otra, salvo que deseemos calcular la derivada en un punto genérico x, entonces es imprescindible usar esta.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Esta se llama **función derivada de *f(x)***, o simplemente **derivada de *f***, y se denota como ***f'(x).***

Ejemplo: Calcular por definición la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto x=3.

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3) \cdot (x+3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} x + 3 = 6$$

Calcular por definición la derivada de $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$$

Ejercicios 3 y 4 página 255

Interpretación geométrica de la función derivada

(2º bach)

Geométricamente, **la derivada de la función f en el punto x=a es el valor de la pendiente de la recta tangente a la función f en ese punto.**

$f'(a)$ **es la pendiente de la recta tangente a f en el punto x=a**