BOLETIN 1 ANÁLISIS: LÍMITES Y CONTINUIDAD

1.- Comprueba que la función $f(x) = -x^3 - x^2 + 2$ tiene al menos una raíz en el intervalo [1,2].

2.- Se ha investigado el tiempo, T en minutos, que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas, x en días, obteniéndose que:

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x+30} & si \quad 0 \leq x \leq 30 \\ \dfrac{1125}{(x-5)\cdot(x-15)} & si\ x > 30 \end{cases}$$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.

b) Por mucho que entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿y en menos de 2?

3.- Si *f(x)* es una función continua en el intervalo [-3,2] donde $f(-3) < 0\ y\ f(2) = 5$. ¿Se puede asegurar que la función *g(x)=f(x)-2* tiene al menos un cero en el intervalo [-3,2] ?

4.- Calcula ***k*** de modo que la siguiente función sea continua en todo R.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + |x| & si\ x < 0 \\ k \quad si & x = 0 \\ \dfrac{3}{2}x + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

5.- La función $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & si\ x \geq 0 \\ -x^2 - 1 & si\ x < 0 \end{cases}$ toma valores de signo contrario en el intervalo [-1,2] y sin embargo no tiene ninguna raíz en dicho intervalo. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

6.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} |3 - x| & si\ x \leq 5 \\ ln e^2 & si\ x > 5 \end{cases} \quad b)\ g(x) = |x^2 - 6x + 5| \quad c)\ f(x) = \begin{cases} -5 - \dfrac{|x|}{x} & si\ \ x \neq 0 \\ 5 \quad si & x = 0 \end{cases}$$

7.- Demostrar que la ecuación $x^3 + x = 5$tiene al menos una solución x=a de forma que 1<a<2.

8.- Calcula el valor de los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(x^5 \cdot e^{-x^2}\right) \quad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{sen\ x}{x} \quad c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{4x+2} \quad d)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x-3}}$$

9.- ¿Se puede asegurar, empleando el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = \tan(x)$tiene una raíz en el intervalo $[{}^{\Pi}/_{4}, {}^{3\Pi}/_{4}]$? Razona la respuesta y haz el esbozo de la funión en ese intervalo.

10.- Demuestra que la ecuación $x^2 \cdot e^x = 1$ tiene alguna solución en el intervalo [0,1]. Enuncia el resultado teórico empleado.

11.- Demostrar que la función $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2$ toma el valor π en el intervalo [1,2].