Ámbito científico tecnológico

Educación a distancia semipresencial

Módulo 2

Unidad didáctica 2

Geometría

Índice

1. **Introducción** 3
   - 1.1 Descripción de la unidad didáctica 3
   - 1.2 Conocimientos previos 3
   - 1.3 Criterios de evaluación 3
2. **Secuencia de contenidos y actividades** 5
   - 2.1 Triángulos rectángulos 5
     - 2.1.1 Teorema de Pitágoras. Ternas pitagóricas 5
     - 2.1.2 Aplicaciones del teorema de Pitágoras 7
   - 2.2 Semejanza. Razón de semejanza 9
     - 2.2.1 Relaciones de semejanza 10
     - 2.2.2 Escala en planos, mapas y maquetas 13
   - 2.3 Cuerpos geométricos 15
     - 2.3.1 Áreas y perímetros de figuras planas 15
     - 2.3.2 Clasificación de los cuerpos geométricos 17
     - 2.3.3 Poliedros regulares 18
     - 2.3.4 Prismas 20
     - 2.3.5 Pirámides 21
     - 2.3.6 Cuerpos de revolución 23
     - 2.3.7 Volumen de cuerpos geométricos 26
3. **Actividades finales** 32
4. **Solucionarios** 35
   - 4.1 Soluciones de las actividades propuestas 35
   - 4.2 Soluciones de las actividades finales 38
5. **Glosario** 41
6. **Bibliografía y recursos** 42
7. **Anexo. Licencia de recursos** 43

1. Introducción

1.1 Descripción de la unidad didáctica

Esta unidad nos acerca a la geometría a través del conocimiento del teorema de Pitágoras, su justificación geométrica y aritmética y sus aplicaciones a problemas en contextos de la vida real.

Estudiaremos también el concepto matemático de semejanza, así como los criterios para reconocerla, la razón de semejanza en mapas, planos, áreas y volúmenes.

Esta unidad de geometría se completa con el estudio de los cuerpos geométricos más sencillos, trabajaremos con ellos conociendo sus formas y sus propiedades; aprenderemos a calcular sus longitudes, las áreas y los volúmenes y veremos ciertas aplicaciones prácticas.

1.2 Conocimientos previos

Para afrontar con provecho el estudio de este tema será necesario manejar los conceptos siguientes:

- Proporcionalidad: unidad 1 del módulo 2 (ámbito científico-tecnológico).
- Dominio de las operaciones básicas con números naturales y enteros, fracciones y decimales, así como el uso de la calculadora para estas operaciones, que se han introducido y explicado en las unidades 1 de los módulos 1 y 2. Dominar estos aspectos es básico para la resolución de los problemas de la parte de geometría de la presente unidad.

1.3 Criterios de evaluación

- Reconocer el significado aritmético del teorema de Pitágoras (cuadrados de números y ternas pitagóricas) y su significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.
- Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.
- Analizar cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros,

conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras, desarrollos planos, secciones al cortar con planos, cuerpos obtenidos mediante secciones, simetrías etc.).

- Resolver problemas que lleven consigo el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.

2. Secuencia de contenidos y actividades

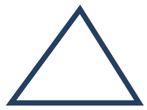
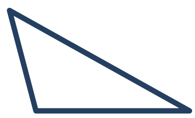
2.1 Triángulos rectángulos

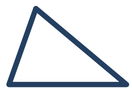
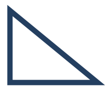
2.1.1 Teorema de Pitágoras. Ternas pitagóricas

Introducción

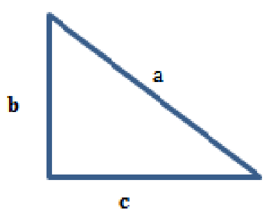
El teorema de Pitágoras establece una relación entre ciertos tipos de triángulos y sus lados. A este tipo de triángulos se les llama rectángulos por medir uno de sus ángulos 90º, lo que significa que es un ángulo recto.

Antes de enunciar este teorema vamos a recordar los tipos de triángulos que existen según sean sus lados y sus ángulos.

Clasificación según sus lados		
Equilátero	Tres lados iguales.	
Isósceles	Dos lados iguales.	
Escaleno	Tres lados desiguales.	

Clasificación según sus ángulos		
Acutángulo	Tiene todos sus ángulos menores de 90°.	
Rectángulo	Tiene un ángulo recto, mide 90°.	
Obtusángulo	Tiene un ángulo mayor de 90°.	

El teorema de Pitágoras se utiliza para reconocer triángulos rectángulos:

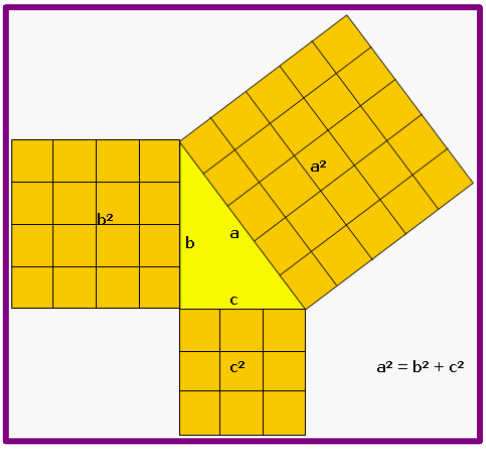


- Rectángulo: $a^2 = b^2 + c^2$
- Acutángulo: $a^2 < b^2 + c^2$
- Obtusángulo: $a^2 > b^2 + c^2$

Donde a es el lado mayor

En un triángulo rectángulo el lado de mayor longitud se llama **hipotenusa** y los otros dos, de menor longitud y perpendiculares entre sí, **catetos**. En general, llamaremos *a* a la hipotenusa y *b* y *c* a los catetos.

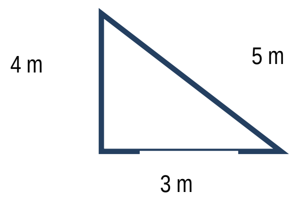
El **teorema de Pitágoras** afirma lo siguiente: $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$. Esto quiere decir que el área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos. Esta relación es cierta solo si el triángulo es rectángulo.



INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Actividad resuelta

Determine si el triángulo es rectángulo

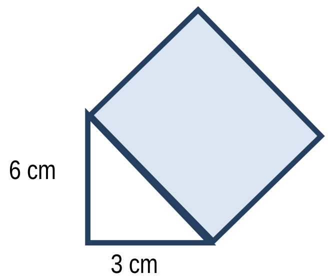


Si es rectángulo, entonces se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$5^2 = 4^2 + 3^2$$
$$25 = 25$$

Actividad propuesta

S1. Tres superficies cuadradas están colocadas de manera que entre ellas se forma un triángulo rectángulo, como se observa en la figura. ¿Cuánto mide el área de la superficie más grande?



Ternas pitagóricas

Si tres números naturales a, b, c cumplen $a^2 = b^2 + c^2$, es decir, si pueden ser las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, entonces se dice que forman una **terna pitagórica.**

Algunos ejemplos de ternas pitagóricas son:

$5, 4, 3$	$17, 15, 8$	$37, 35, 12$
$13, 12, 5$	$25, 24, 7$	$41, 40, 9$

Ocurre que si *a, b, c* es una terna pitagórica, también lo es *k.a, k.b y k.c*. Por ejemplo, $20,\ 16, 12$, obtenidos al multiplicar por 4 cada uno de los componentes de la terna $5, 4, 3$.

Actividad propuesta

S2. Compruebe que las seis ternas del cuadro anterior son pitagóricas

$5^2 = 4^2 + 3^2$		

2.1.2 Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Del teorema de Pitágoras se deducen las igualdades y cálculos siguientes:

- **Cálculo de la hipotenusa conociendo los dos catetos:**

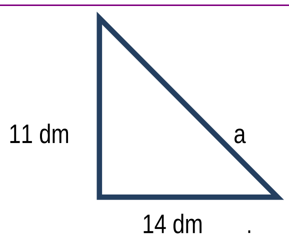
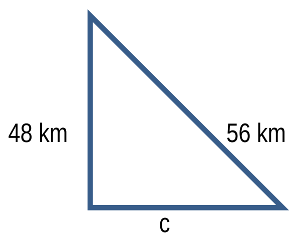
$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

- **Cálculo de un cateto conociendo el otro y la hipotenusa:**

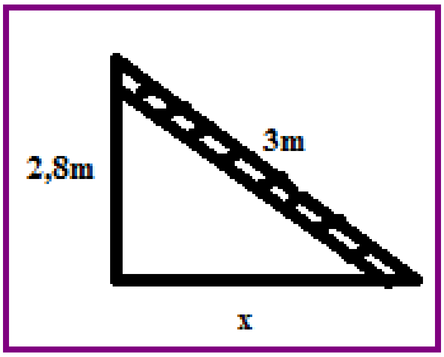
$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Actividades resueltas

Halle la hipotenusa y el cateto de los triángulos propuestos:

Cálculo de la hipotenusa	Cálculo del cateto
	
$a = \sqrt{14^2+11^2} = \sqrt{126 + 121} = \sqrt{317} = 17{,}8\ dm$	$c = \sqrt{56^2-48^2} = \sqrt{3136 - 2304} = \sqrt{832} = 28{,}84\ dm$

Una escalera que mide 3 metros se apoya en una pared y en un suelo horizontal alcanzando 2,8 metros sobre la pared vertical. ¿A qué distancia está el pié de la escalera de la base de la pared?



Dibujamos la escalera apoyada en la pared.

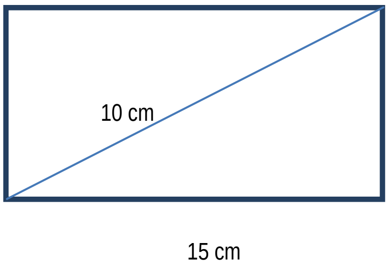
En el dibujo, la escalera representa la hipotenusa del triángulo rectángulo que forma con la pared y el suelo. La altura que alcanza la escalera en la pared es un cateto y la distancia entre el punto de apoyo de la escalera y la pared es el otro cateto (que tenemos que calcular). Así haremos:

$$x = \sqrt{3^2 - (2{,}8)^2}$$

$$x = \sqrt{9 - 7{,}84} = \sqrt{1{,}16}$$

$$x = 1{,}07\ m\ es\ la\ distancia\ de\ la\ escalera\ a\ la\ pared.$$

Calculamos la diagonal de un rectángulo de lados a = 10 cm y b = 15 cm.



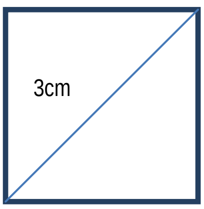
La diagonal del rectángulo es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por cada uno de los lados del rectángulo y la propia diagonal. Así calcularemos:

$$h = \sqrt{10^2 + 15^2}$$

$$h = \sqrt{100 + 225} = \sqrt{325}$$

$$x = 18{,}02\ cm\ mide\ a\ diagonal.$$

En un cuadrado la diagonal mide 3 cm, ¿cuánto mide su lado?



Los lados del cuadrado son los catetos del triángulo rectángulo formado por ellos mismos y la diagonal del cuadrado. La diagonal es la hipotenusa. Así calcularemos:

$$3^2 = x^2 + x^2$$

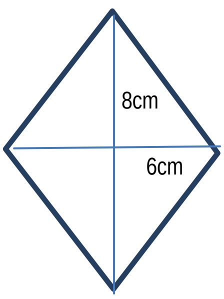
$$9 = 2x^2$$

$$\frac{9}{2} = x^2$$

$$4{,}5 = x^2$$

$$\sqrt{4{,}5} = x \Rightarrow x = 2{,}12\ cm\ mide\ el\ lado\ del\ cuadrado$$

Calcule el lado de un rombo cuyas diagonales miden 6 cm y 8 cm.



Las diagonales del rombo configuran cuatro triángulos rectángulos cuyos catetos miden la mitad de cada diagonal y la hipotenusa sería el lado del rombo. Así calcularemos:

$(3\ \text{cm})^2 + (4\ \text{cm})^2 = \text{x}^2$ $\qquad$ $9\ \text{cm}^2 + 16\ \text{cm}^2 = \text{x}^2$

$x^2 = 25\ \text{cm}^2$

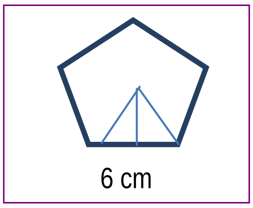
$x = \sqrt{25cm^2}$

x = 5 cm. El lado del rombo mide 5 cm

Actividades propuestas

S3. Si una escalera tiene 2,20 cm de longitud y se apoya en una pared de 1,80 cm de altura, ¿a qué distancia de la pared se sitúa la base de la escalera?

S4. ¿Cuál es el valor de la apotema de un hexágono regular de lado 6 cm?

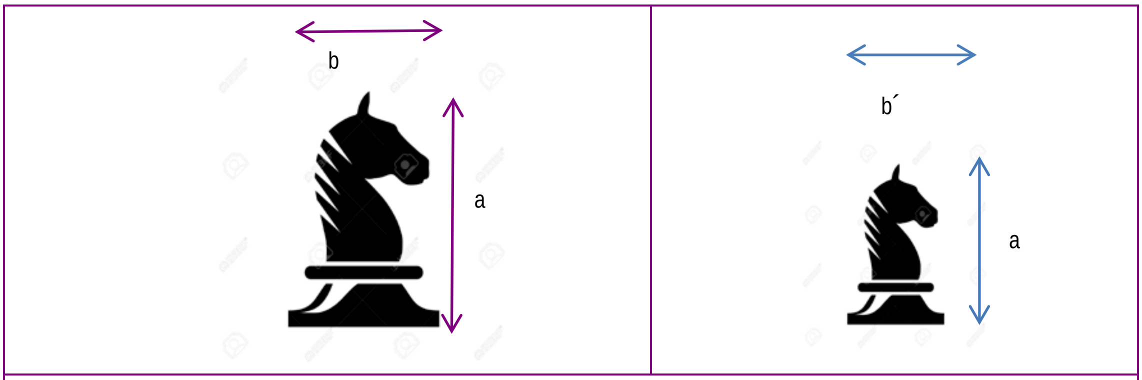


S5. El lado menor de un campo de cultivo rectangular mide 150 m y su diagonal 250 m. ¿Cuánto mide el lado mayor?

S6. Un edificio mide 150 m de altura y produce una sombra en el suelo de 200 m. ¿Qué distancia hay desde el punto más alto de la torre hasta el extremo de la sombra?

2.2 Semejanza. Razón de semejanza

- Dos figuras son **semejantes** cuando tienen la misma forma pero diferente tamaño, por ejemplo, un cuadro y su reproducción o un dibujo o figura y su copia reducida en la fotocopiadora. Así, podemos observarlo en las siguientes figuras:



Cuando dos figuras son semejantes, la razón entre los lados homólogos es una constante que se denomina **razón de semejanza**. Así, en la figura anterior podemos decir:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = r \quad \text{(razón de semejanza)}$$

Dos figuras son semejantes si se cumple lo siguiente:

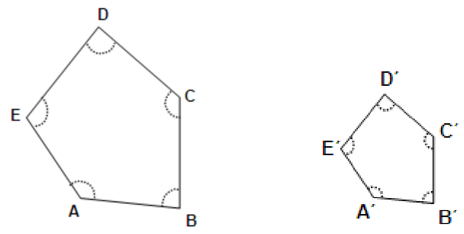
- Un ángulo medido en la primera = al ángulo correspondiente en la segunda.
- Una proporción en la primera = a la proporción correspondiente en la segunda.

Cuando dos polígonos son semejantes, se da entre sus lados una relación de proporcionalidad: el cociente entre lados homólogos tiene el mismo valor y recibe el nombre de *razón de semejanza*. Se dice también que los lados son *proporcionales*.

2.2.1 Relaciones de semejanza

RELACIÓN ENTRE POLÍGONOS SEMEJANTES

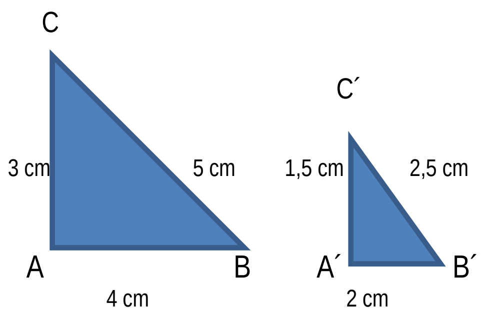
Para que dos polígonos sean semejantes tienen que tener los lados proporcionales y los ángulos iguales.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = k$$

$$\hat{A} = \hat{A'},\ \hat{B} = \hat{B'},\ \hat{C} = \hat{C'},\ \hat{D} = \hat{D'},\ \hat{E} = \hat{E'},$$

Actividad resuelta



Y la razón de semejanza es:

$$\frac{4}{2} = \frac{5}{2{,}5} = \frac{3}{1{,}5} = 2$$

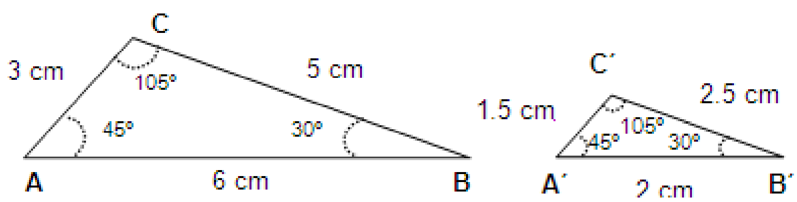
En general:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$$

Semejanza entre triángulos

Es particularmente interesante el estudio de la proporcionalidad en triángulos, ya que permite la resolución de problemas cotidianos de manera fácil.

Dos triángulos semejantes tienen proporcionales los lados homólogos e iguales los ángulos homólogos.

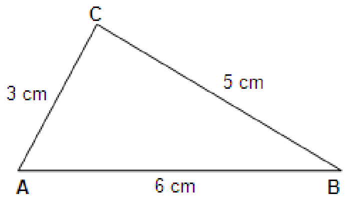


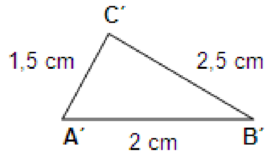
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$$

$\hat{A}\hat{A'}$ $\hat{B}\hat{B'}$ $\hat{C}\hat{C'}$ son iguales dos a dos

Para que dos triángulos sean semejantes se cumplirá una de las siguientes condiciones:

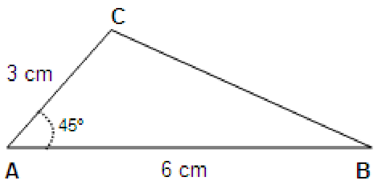
- Que los lados homólogos sean proporcionales.

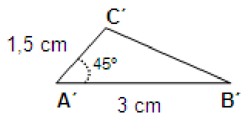




$$\frac{3cm}{1{,}5cm} = \frac{6cm}{3cm} = \frac{5cm}{2{,}5cm} = 2$$

- Que dos lados sean proporcionales y que los ángulos comprendidos entre ellos sean iguales.

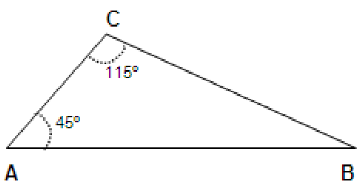


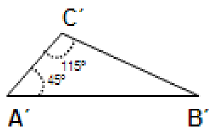


$$\frac{3cm}{1{,}5cm} = \frac{6cm}{3cm} = 2$$

$$\widehat{A} = \widehat{A'} = 45º$$

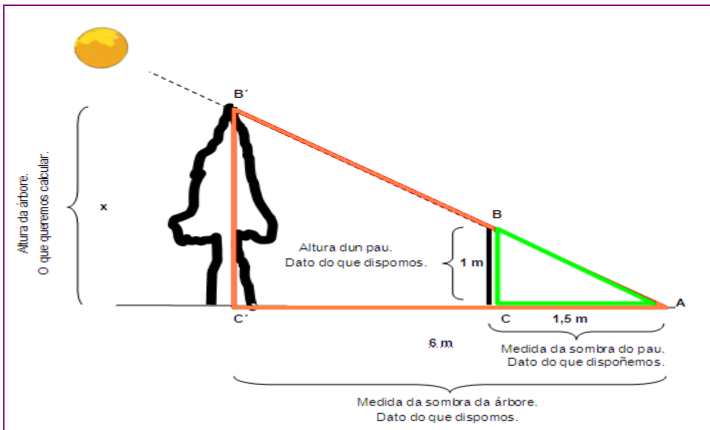
- Que dos ángulos sean iguales.





Actividad resuelta

Podemos calcular la altura de un árbol midiendo la longitud de su sombra y comparándola con la longitud de la sombra de un objeto conocido.



Aplicando las relaciones de proporcionalidad entre los lados de triángulos semejantes, en este caso los triángulos AB´C´ y ABC, calculamos:

$$\frac{x}{1} = \frac{6}{1{,}5}$$

$$x = \frac{6 \cdot 1}{1{,}5}, \qquad x = 4\ m$$

Así calculamos que la altura del árbol es de 4 metros.

Actividades propuestas

S7. Calcule la altura de un edificio que proyecta una sombra de 6,5 m a la misma hora que un poste de 4,5 m da una sombra de 0,9 m.

S8. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 12 m y 5 m. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero cuya hipotenusa mide 26 m?

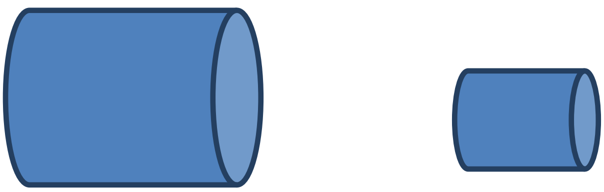
S9. Un tanque de agua tiene 2,5 m de ancho. Si nos situamos a 1,2 m del borde desde una altura de 1,65 m, la visual une el borde del tanque con la línea de fondo. ¿Qué profundidad tiene el tanque de agua?

Relación entre áreas de figuras semejantes

- Si la razón de semejanza de dos figuras es **k**, entonces la razón de sus áreas es $\boldsymbol{k^2}$.

Actividad resuelta

Para pintar un depósito cilíndrico se gastaron 24,5 kilos de pintura. Otro depósito es semejante al anterior con razón de semejanza 3,2. ¿Cuánta pintura será necesaria para pintarlo?



Aplicando las relaciones de semejanza entre áreas, tenemos:

El área del segundo cilindro es $(3,2)^2 = 10,24$ veces la del primero. Por lo tanto son necesarios

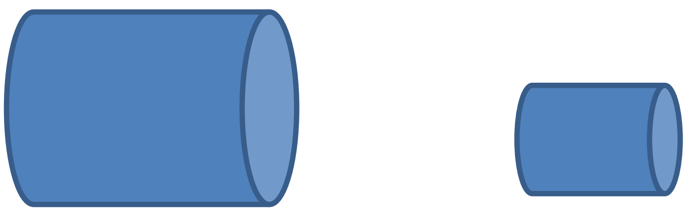
$24,5 \cdot 10,24 = 250,88\ kg\ de\ pintura.$

Relación entre los volúmenes de dos figuras semejantes

- Si la razón de semejanza de dos cuerpos es **k**, entonces la razón de sus volúmenes es $\boldsymbol{k^3}$.

Actividad resuelta

Si un depósito cilíndrico es semejante a otro, con razón de semejanza 1,6, y el valor del aceite que cabe en el pequeño es de 1875 euros, ¿qué valor tiene el aceite que cabe en el segundo?



Aplicando las relaciones de semejanza entre volúmenes tenemos:

$1875 \cdot (1,6)^3 = 1875 \cdot 4,09 = 7680\ euros.$

Actividades propuestas

S10. Dos rectángulos semejantes tienen una razón de semejanza de 0,8. Las dimensiones del menor son 2 cm de ancho y 6 cm de alto. ¿Cuáles son las dimensiones del mayor?

S11. En una tienda de A Coruña se venden reproducciones de la torre de Hércules, las hay de 18 cm y de 12 cm de altura.

a) ¿Son figuras semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza entre la torre grande y la pequeña?

b) La parte más alta de la torre mide en la reproducción mayor 2,25 cm de alto. ¿Cuánto mide la de la pequeña?

c) Si la parte más alta de la torre original mide 7,125 metros, ¿qué altura tiene la torre?

d) Si las dos reproducciones estaban hechas del mismo material y la pequeña pesa 200 gramos, ¿cuánto pesa la grande?

e) Si para pintar la pequeña gastamos 5 euros, ¿cuánto nos costará pintar la grande?

2.2.2 Escala en planos, mapas y maquetas

Cuando consultamos un plano de una casa, una maqueta o un mapa de un lugar sabemos que son semejantes a la realidad. En ellos, además de la distribución de lugares, importan los tamaños y las distancias, por eso llevan una escala.

- La **escala** es el cociente entre cada longitud de la reproducción (sea mapa, plano o maqueta) y la correspondiente longitud en la realidad. Es decir, es la **razón de semejanza** entre la reproducción y la realidad.

- La **escala** utiliza el cm como unidad de referencia y se expresa en comparación a la unidad. Por ejemplo, 1:80 000 quiere decir que 1 cm en el plano o mapa equivale a 80 000 cm en la realidad o, lo que es lo mismo, 1 cm en el mapa equivale a 800 m en la realidad.

Actividades resueltas

Una fotografía de la catedral de Santiago de Compostela está a escala 1:1200. Las dos torres de la fachada tienen en la foto una altura de 1,75 cm. ¿Cuál es su altura en la realidad?

Ya que la fotografía y la catedral en la realidad son figuras semejantes, aplicamos la igualdad de razones de semejanza:

$$\frac{1}{1200} = \frac{1,75}{x}$$

$$x = 1200 \cdot 1,75 = 2100cm$$

2100 cm = 21 metros que mide cada torre.

La distancia entre Lugo y Ourense es de 111,6 Km, en el mapa la distancia entre las dos ciudades es de 4 cm. ¿A qué escala está dibujado el mapa?

$$111{,}6\text{km}=11\,160\,000\text{ cm}$$

$$\frac{4}{11\ 160\ 000} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{11\ 160\ 000 \cdot 1}{4} = 2\ 790\ 000$$

Está dibujado a escala 1:2 790 000.

Actividades propuestas

S12. Tenemos un plano de nuestra casa a escala y en él medimos que el largo de la cocina es de 4 cm; medimos las dimensiones reales del largo de la cocina y tiene 4 m. ¿A qué escala está el plano? ¿Cuántos metros mide el pasillo en la realidad si en el plano mide 9 cm?

S13. Un mapa de España está construido a escala 1:2 500 000. ¿A cuántos kilómetros están dos ciudades que en el mapa están separadas 10 cm?

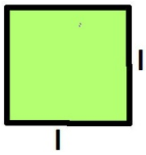
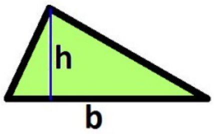
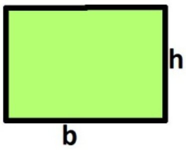
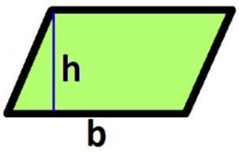
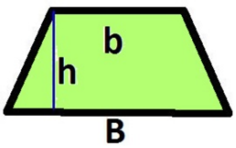
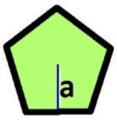
S14. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es de 1:1000

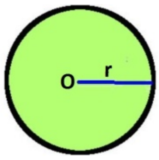
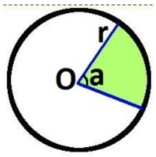
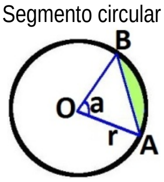
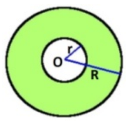
DIBUJO	MEDIDA REAL
26 cm	
	15 km
0,05 m	

2.3 Cuerpos geométricos

Vamos conocer la clasificación de los cuerpos geométricos, pero antes recordemos lo que ya hemos estudiado en el módulo I sobre el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.

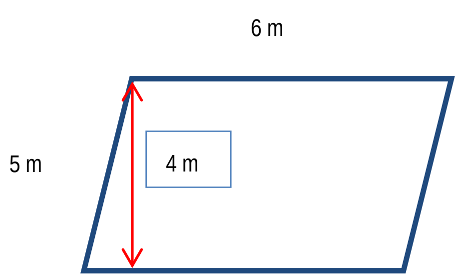
2.3.1 Áreas y perímetros de figuras planas

Figura geométrica	Fórmulas
Cuadrado 	$A = l \cdot l$ $P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$
Triángulo 	$A = \frac{b \cdot h}{2}$ $P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$
Rectángulo 	$A = b \cdot h$ $P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$
Romboide 	$A = b \cdot h$ $P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$
Rombo 	$A = \frac{D \cdot d}{2}$ $P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$
Trapecio 	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$ $P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$
Polígono regular 	$A = \frac{P \cdot a}{2}$ $P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$

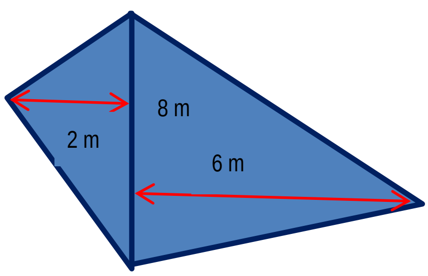
Polígonos irregulares 	Para el cálculo del área debemos descomponerlos en cualquiera de las figuras anteriores, generalmente triángulos. $\boldsymbol{P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados}$
Círculo 	$\boldsymbol{A = \pi \cdot r^2}$ $\boldsymbol{P = 2\pi r}$
Sector circular 	$\boldsymbol{A = \pi r^2 \cdot \frac{a}{360}}$ $\boldsymbol{P = 2r + 2\pi r \cdot \frac{a}{360}}$
Segmento circular 	$\boldsymbol{A = A_{sector\ cirular} - A_{triángulo\ OAB}}$ $\boldsymbol{P = \overline{AB} + 2\pi r \cdot \frac{a}{360}}$
Corona circular 	$\boldsymbol{A = \pi(R^2 - r^2)}$ $\boldsymbol{P = 2\pi(R + r)}$

Actividades resueltas

Halle el área y el perímetro de la figura:

	Área = b · h A = 6 · 4 = 24 m^2 Perímetro = suma de los lados P = 5 · 2 + 6 · 2 = 22 cm

Calcule el área de la siguiente figura:

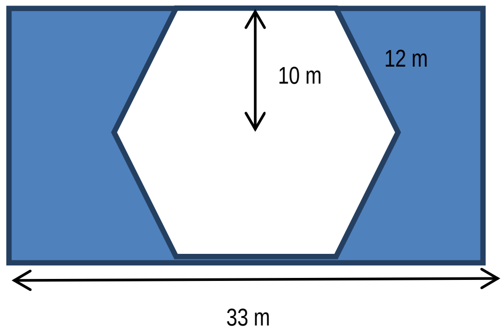
	La figura está formada por dos triángulos y sus áreas son las siguientes: $A_1 = \frac{8 \cdot 2}{2} = 8\ m^2$ $A_2 = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24\ m^2$ $A_T = 8 + 24 = 32\ m^2$

Actividades propuestas

S15. Las diagonales de un rombo miden 37 cm y 52 cm. Calcule su área.

S16. Calcule el área de un triángulo isósceles y rectángulo cuyo cateto mide 18 cm.

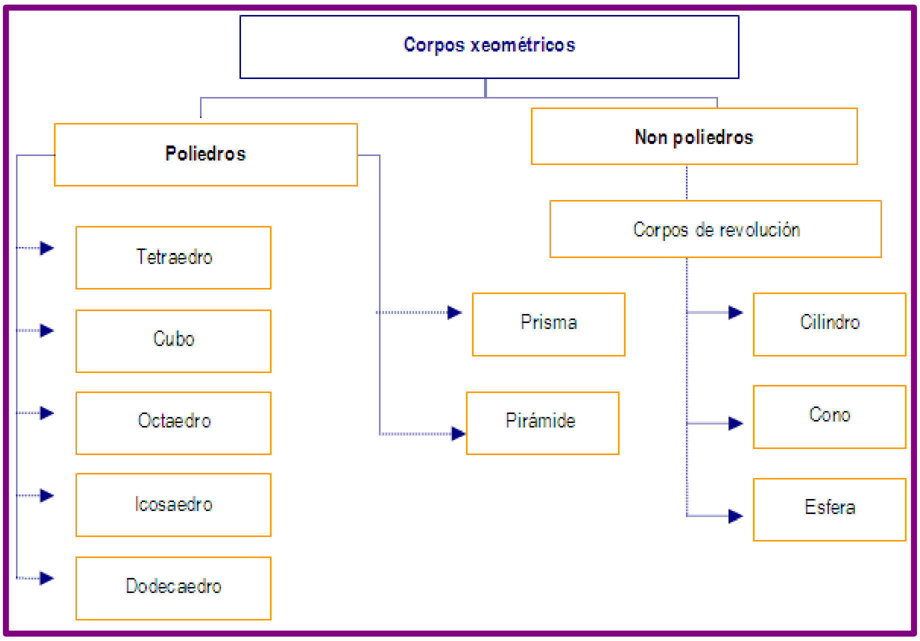
S17. Calcule el área de la parte sombreada de la siguiente figura.



2.3.2 Clasificación de los cuerpos geométricos

Los cuerpos geométricos se dividen en:

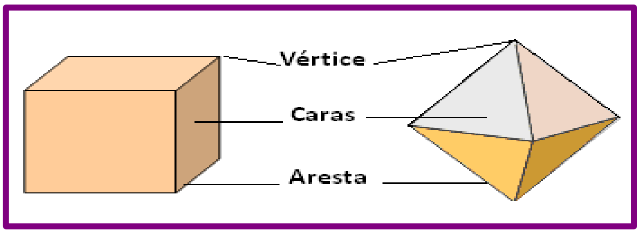
- **poliedros**: poliedros regulares, prismas y pirámides.
- **cuerpos de revolución**: cilindros, esferas y conos.



2.3.3 Poliedros regulares

Son figuras tridimensionales limitadas por varios planos en forma de polígonos. En un poliedro los elementos principales son:

- **Caras**: son los polígonos que limitan el poliedro.
- **Aristas**: son los segmentos comunes a dos caras.
- **Vértice**: es el punto del poliedro donde se juntan tres o más aristas.



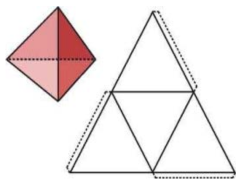
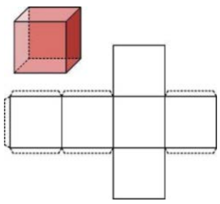
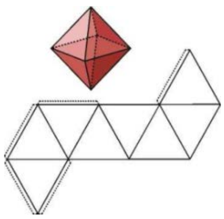
Un poliedro se llama regular cuando cumple estas dos condiciones:

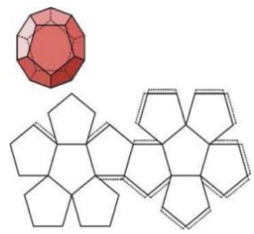
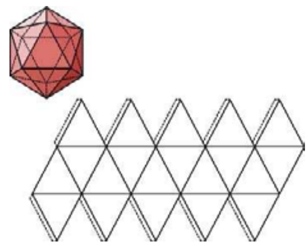
- Sus caras son polígonos regulares idénticos.
- En cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras.

El número de caras, vértices y aristas está relacionado. La fórmula de Euler indica que se cumple que:

Caras + vértices = aristas + 2

Tipos de poliedros regulares

Poliedro regular	Definición	Figura y desarrollo
TETRAEDRO	Formado por cuatro caras que son triángulos equiláteros.	
CUBO O HEXAEDRO	Formado por seis caras que son cuadrados.	
OCTAEDRO	Formado por ocho caras que son triángulos equiláteros. Este poliedro gira libremente cuando se sujeta por vértices opuestos.	

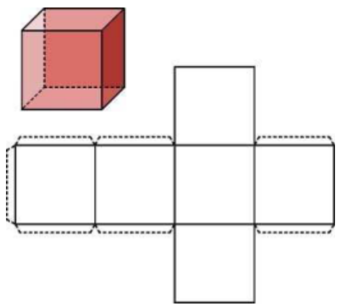
DODECAEDRO	Formado por doce caras que son pentágonos regulares.	
ICOSAEDRO	Formado por veinte caras que son triángulos equiláteros.	

- **Áreas de poliedros regulares**

Teniendo en cuenta su número de caras y el área del polígono regular del que esté formado, se calcula el área del poliedro regular multiplicando esos dos datos.

Actividad resuelta

Calcule el área de un cubo cuyas caras son cuadrados de 2 m de lado.

	El cubo o hexaedro es un poliedro regular formado por seis caras que son cuadrados, procedemos entonces a calcular el área de uno de los cuadrados y después multiplicamos por 6, que son los cuadrados que forman el cubo: Área del cuadrado = $l \cdot l = 2 \cdot 2 = 4\ m^2$ Área del cubo = $6 \cdot 4 = 24\ m^2$

Actividades propuestas

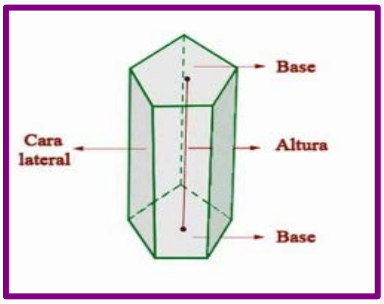
S18. Calcule el área de un dodecaedro formado por pentágonos regulares de 2 cm de lado y apotema 1,35 cm.

S19. Calcule el área de un tetraedro de 2 cm de arista.

2.3.4 Prismas

Un **prisma** es un poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos, llamados **bases,** y varios paralelogramos, llamados **caras laterales**.

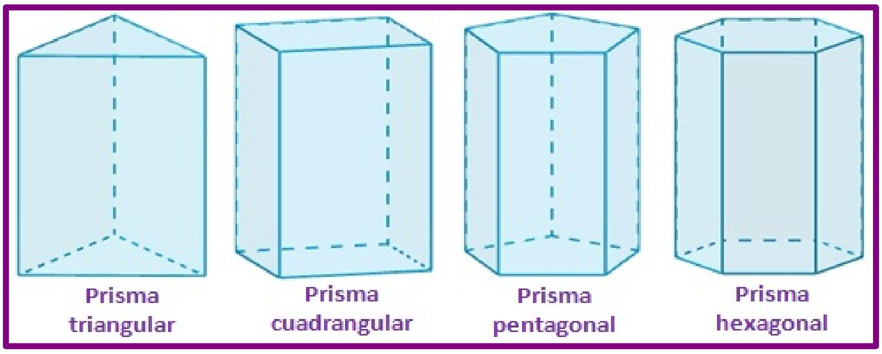
La **altura** de un prisma es la distancia entre las bases.



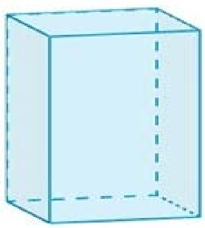
Prisma recto de base pentagonal

CLASIFICACIÓN DE LOS PRISMAS

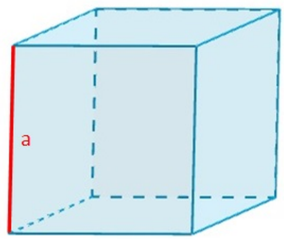
- Según los polígonos de su base:



- Paralelepípedos: son prismas en los que todas sus caras son paralelogramos; cada par de caras opuestas son iguales.



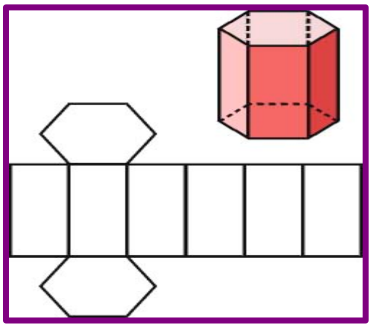
ORTOEDRO



CUBO

ÁREA DE UN PRISMA

El desarrollo lateral de un prisma recto es un rectángulo. La longitud de su base es el perímetro de la base del prisma, y su altura, la altura del prisma.

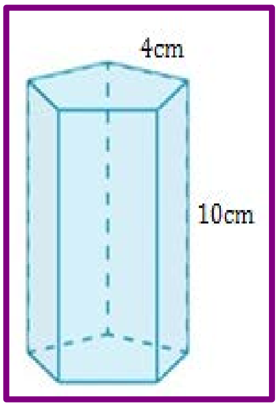


$$\acute{A}REA\ LATERAL = \ per\acute{\imath}metro\ de\ la\ base \cdot altura$$

$$\acute{A}REA\ TOTAL = \acute{A}REA\ LATERAL + 2 \cdot \acute{A}REA\ DE\ LA\ BASE$$

Actividad resuelta

Calcule el área total de un prisma de base pentagonal que tiene 10 cm de altura, 4 cm de lado de la base y 2,75 cm de apotema.



1º Calculamos el área lateral:

A_l= Perímetro de la base · altura = (4 cm · 5)· 10 cm = 200 cm^2

2º Calculamos el área de la base:

$$A_{Base} = \frac{Perímetro \;\; da\; base \cdot apotema}{2} = $$

$$= \frac{20\; cm \cdot 2{,}75\; cm}{2} = 27{,}5 cm^2$$

3º Calculamos el área total:

$Área_{total} = Área_{lateral} + 2 \cdot Área_{base} = 200\ cm^2 + 2 \cdot 27{,}5 = 255\ cm^2$

Actividades propuestas

S20. Un prisma cuadrangular tiene una altura de 5 cm y la arista de su base mide 3 cm. Calcule su área total.

S21. Calcule el área de un prisma que tiene 22 centímetros de altura y sus bases son rectángulos de lados 10 y 12 cm.

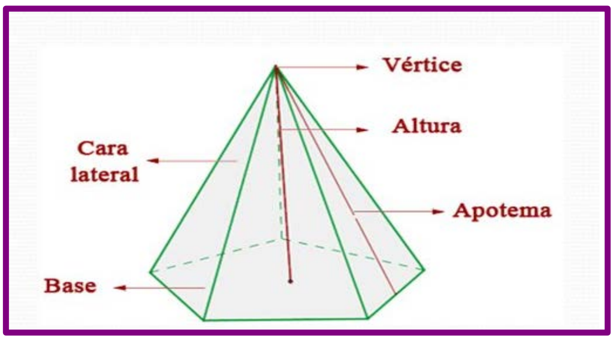
S22. Calcule el área de un cubo de 10 cm de arista.

2.3.5 Pirámides

Una **pirámide** es un poliedro que tiene por base un polígono cualquiera y por caras laterales triángulos con un vértice común, que es el **vértice** de la pirámide.

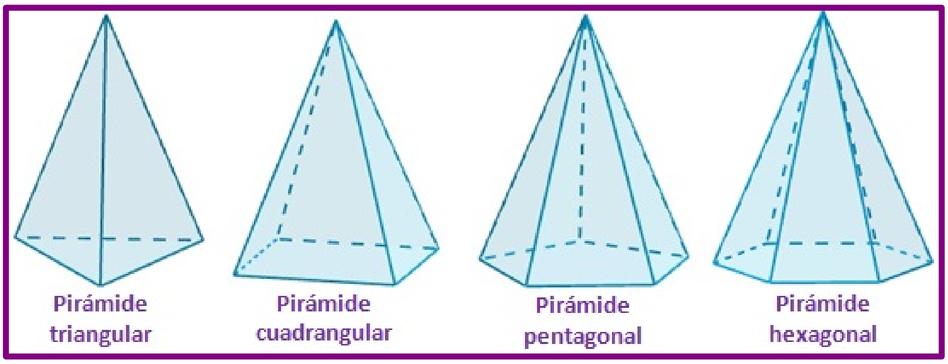
La **altura** de la pirámide es la distancia del vértice al plano de la base.

En una pirámide regular todas las aristas laterales son iguales y las caras laterales son triángulos isósceles. La altura de los triángulos se llaman **apotema** de la pirámide.



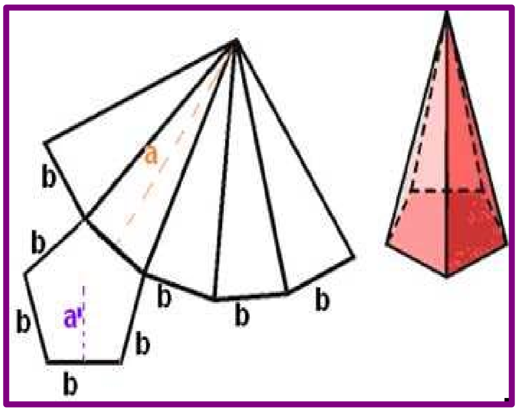
Prisma recto de base pentagonal

- Las pirámides se clasifican según los polígonos de sus bases:



ÁREA DE UNA PIRÁMIDE

A partir del desarrollo de una pirámide se puede calcular con claridad su área:



Área total = área lateral + área de la base

Área lateral: A_L es la suma de las áreas de sus caras laterales, *n* triángulos iguales:

$$A_L = n\frac{b.a}{2} = \frac{perímetro\ de\ base \cdot a}{2}$$

Área de la base: A_B

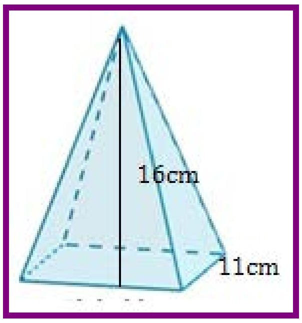
$$A_B = \frac{Perímetro\ \ de\ \ base \cdot a'}{2}$$

Área total = *Área lateral* + *Área de la base*

$$A_T = A_L + A_B = \frac{Perímetro\ de\ base \cdot a}{2} + \frac{Perímetro\ de\ base \cdot a'}{2}$$

Actividad resuelta

Calcule el área lateral y total de una pirámide que tiene por base un cuadrado de 11 cm de lado y su apotema lateral es de 16 cm.



1º Calculamos el perímetro y luego el área lateral:

$$p = 4 \cdot 11 = 44cm \Rightarrow A_l = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{44 \cdot 16}{2} = 352cm^2$$

2º Calculamos el área de la base:

$$A_b = l^2 = 11^2 = 121cm^2$$

3º Calculamos el área total:

$$A_T = A_l + A_B = 352 + 121 = 473cm^2$$

Actividades propuestas

S23. Calcule el área de una pirámide de base pentagonal de 14 cm de lado, 9,63 cm de apotema de la base y 60 cm de apotema lateral.

S24. Una pirámide tiene por base un hexágono cuyos lados miden 10 m y la apotema 8,66 m. La apotema lateral de la pirámide es de 44 m. Calcule:

a) El área de la base.

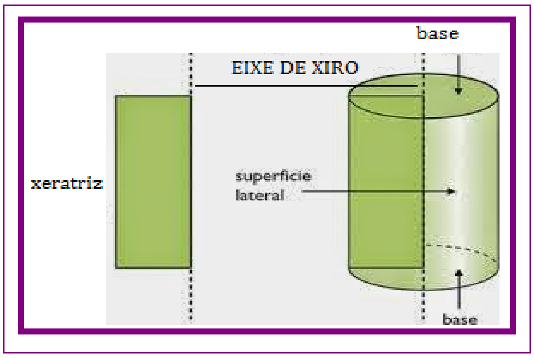
b) El área lateral de la pirámide.

c) El área total de la pirámide.

2.3.6 Cuerpos de revolución

Cuando giramos una figura plana alrededor de un eje, obtenemos un cuerpo de revolución. Los tres cuerpos de revolución más importantes, y que vamos a estudiar, son el **cilindro**, el **cono** y la **esfera.**

Cilindro



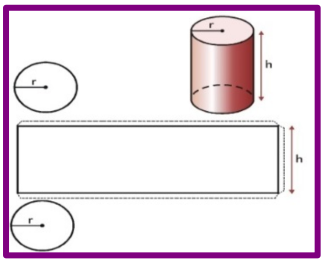
Si hacemos girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados, se genera un cilindro recto.

Las bases de un cilindro recto son círculos. La distancia entre las bases se llama altura.

La generatriz del cilindro corresponde a la longitud del lado opuesto al eje, es decir, coincide con la altura.

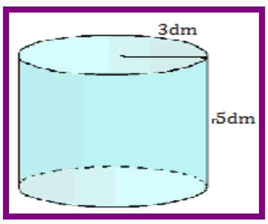
Área de un cilindro

Al cortar un cilindro se obtiene el desarrollo en el plano y se aprecia que la pared lateral del cilindro es un rectángulo de base igual al perímetro del círculo, $2 \cdot \pi \cdot r$, y cuya altura, h, es la del cilindro.

	$\textbf{Área lateral} = 2\pi r \cdot h$ $\textbf{Área total} = \text{Área lateral} + \text{Área de las dos bases}$ $A_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$

Actividad resuelta

Calcule el área lateral y el área total de un cilindro de 3 dm de radio de la base y 5 dm de altura.

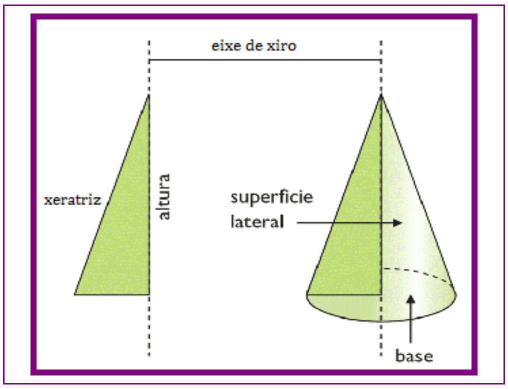
	$A_l = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 = 94{,}2\ dm^2$ $A_{tot} = 94{,}2 + 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 150{,}72\ dm^2$

Actividades propuestas

S25. ¿Qué cantidad de chapa se necesita para construir un depósito cilíndrico cerrado de 0,6 m de radio de la base y 1,8 m de altura?

S26. Calcule el área total de un cilindro de 6 cm de radio y 16 cm de altura.

CONO

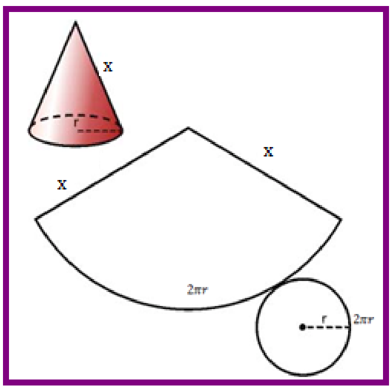


Haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos, se obtiene un **cono recto**.

La **altura** es la distancia del vértice a la base. La **generatriz** del cono es la longitud de la hipotenusa del triángulo.

Área de un cono

A partir del desarrollo de un cono se puede calcular con claridad su área:



La superficie lateral de un cono recto es un sector circular de radio x y la porción de círculo que tiene este sector la calculamos como sigue:

$$\frac{longitud\ de\ la\ circunferencia}{superficie\ del\ círculo} = \frac{longitud\ del\ arco}{superficie\ del\ sector}$$

$$\frac{2\pi x}{\pi x^2} = \frac{2\pi r}{A} \Rightarrow A = \frac{2\pi r \cdot \pi x^2}{2\pi x} = \pi r x$$

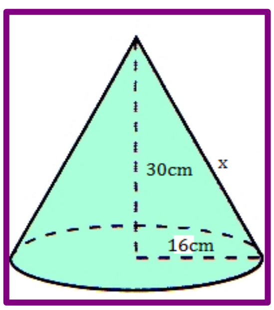
Por lo tanto:

$$\text{Área lateral} = \pi r x$$

$$\text{Área total} = \pi r x + \pi r^2$$

Actividad resuelta

Calcule el área lateral y el área total de un cono de 85 cm de radio de la base y 84 cm de altura.



1º Para calcular el área total y lateral del cono necesitamos calcular su generatriz, que en este caso es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por la altura del cono, el radio de la base y la propia generatriz. Por lo tanto, calcularíamos:

$$x^2 = 30^2 + 16^2 \Rightarrow x = \sqrt{900 + 256} = \sqrt{1156} = 34\ cm$$

2º Teniendo ya el valor de la generatriz, calculamos el área lateral y total.

$$\text{Área total} = \pi r x + \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 16 \cdot 34 + 3{,}14 \cdot 16^2$$
$$= 1708{,}16 + 803{,}84$$
$$\boldsymbol{A_t} = 22512\ cm^2$$

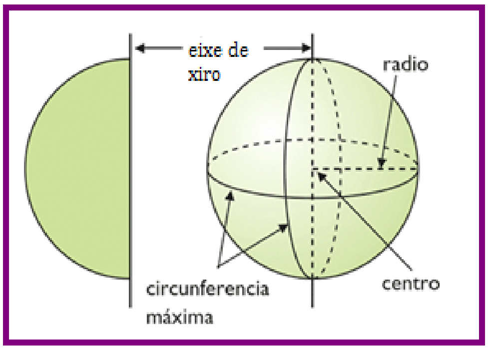
Actividades propuestas

S27. Calcule el área total de un cono de 5 cm de radio de la base y 15 cm de generatriz.

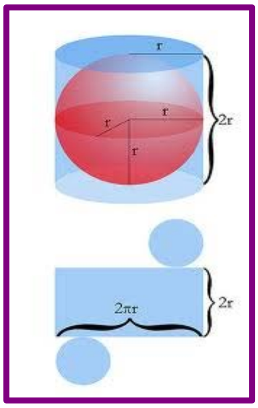
S28. Calcule el área total de un cono que tiene 10,4 cm de altura y 6 cm de radio de la base.

ESFERA

Las esferas son cuerpos de revolución que se generan al hacer girar un semicírculo alrededor de su diámetro. La **esfera** queda determinada por su radio ***R***.

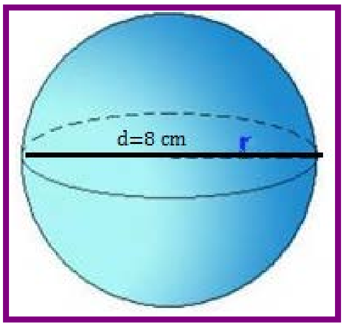


Área de una esfera

	Para calcular la superficie de una esfera, imaginemos a esta envuelta en un cilindro que se ajusta a ella completamente. El área de la esfera es igual que el área lateral de ese cilindro. $$\boldsymbol{A}_{lateral\ del\ cilindro} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$$ El área de la superficie esférica de radio R es: $$\mathbf{A} = 4\pi R^2$$

Actividad resuelta

Calcule la superficie de una esfera de 8 cm de diámetro.

	Para calcular la superficie de la esfera necesitamos su radio, que es la mitad del diámetro: $$R = \frac{d}{2} = \frac{8}{2} = 4\ cm$$ $$\boldsymbol{Área}_{\ esfera} = 4\pi R^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 = 200{,}96\ cm^2$$

Actividades propuestas

S29. Un balón tiene 30 cm de diámetro. ¿Cuánto mide su superficie?

S30. La superficie de una esfera mide 2122,64 m^2. Calcule su radio.

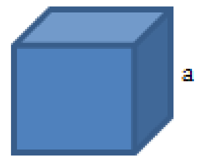
2.3.7 Volumen de cuerpos geométricos

El volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa. Para saber el volumen de un cuerpo sólido necesitamos conocer sus tres dimensiones (largo, ancho y alto). Así, por ejemplo, el volumen de un ortoedro se calcula multiplicando sus tres dimensiones o aristas, a, b, c. Entonces, el volumen es:

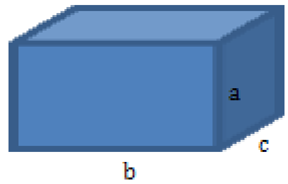
$$V_{ortoedro} = a \cdot b \cdot c$$

Un cubo es un ortoedro con las tres dimensiones iguales; por consiguiente, el volumen de un cubo de arista *a* es igual al valor de su arista elevado a tres.

$$V_{cubo} = a^3$$



$V = a \cdot a \cdot a = a^3$



V = a · b · c

La palabra volumen se usa para designar lo que ocupa un cuerpo en el espacio y la palabra capacidad, para indicar lo que cabe dentro de un recipiente. Las dos son magnitudes idénticas y, por lo tanto, para medirlas se utilizan las mismas unidades. Estas son las unidades cúbicas o las de los múltiplos y los divisores del litro, tanto unas como otras se usan para medir volúmenes y capacidades. Recordemos estas unidades y sus equivalencias:

- Unidades cúbicas:
  - Cada unidad de volumen es 1000 veces la unidad de orden inferior y la milésima parte (0,001) de una de orden superior. La tabla de unidades es la siguiente:

·1000→ ·1000→ ·1000→ ·1000→ ·1000→ ·1000→ ·1000

km^3	Hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

÷1000 ←÷1000 ←÷1000 ←÷100 ←÷1000 ←÷1000 ←÷1000

- Litro, múltiplos y submúltiplos:

kilolitro (kl) →*1000l*

hectolitro (hl) →*100l*

decalitro (dal)→ 10*l*

decilitro (dl) → *0,1l*

centilitro (cl) → 0,01*l*

mililitro (ml) → *0,001l*

- ***Un litro (l) equivale a 1 dm^3***

En la siguiente tabla se incluyen las unidades cúbicas y sus equivalencias en unidades de litro.

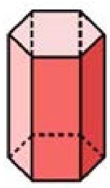
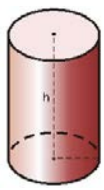
m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
		kl	*hl*	*dal*	*l*	*dl*	*cl*	*ml*			

Tanto las unidades cúbicas como los múltiplos y divisores del litro se utilizan para medir volúmenes y capacidades, sin embargo, se deben escoger las unidades dependiendo del tamaño de lo que se mide. Ejemplos:

- El volumen de una copa, de un vaso, de una botella…, en *l, cl* o cm^3.
- El volumen de pequeños recipientes, en cm^3.
- El gasto mensual de agua en una casa, en m^3.
- La capacidad de un embalse, en hm^3 o km^3.

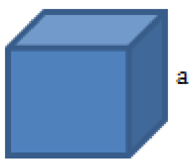
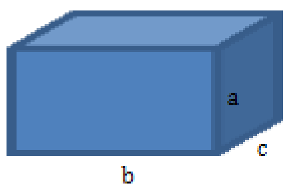
VOLUMEN DE PRISMAS Y CILINDROS

Los prismas y cilindros son figuras prismáticas. Sus volúmenes son:

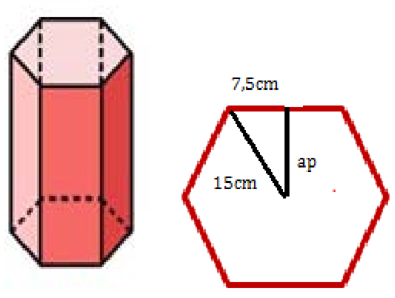
VOLUMEN DE UNA FIGURA PRISMÁTICA $V = Area_{base} \cdot Altura$	
 $V = A_{base} \cdot Altura$	 $V = A_{base} \cdot Altura = \pi r^2 \cdot a$

Actividades resueltas

Calcule el volumen de un ortoedro de dimensiones 12, 4 y 8 cm. Calcule también el volumen de un cubo de 11 dm de arista.

 $V = a \cdot a \cdot a = a^3$ $V = 11 \cdot 11 \cdot 11 = 1331\ dm^3$	 V= a· b· c $V = 12 \cdot 4 \cdot 8 = 384\ cm^3$

Halle el volumen de un prisma hexagonal de 15 cm de lado de la base y 0,5 m de altura.



En un hexágono regular el radio y el lado son iguales. Por lo tanto, el cateto menor del triángulo rectángulo señalado es 7,5 cm.

apotema= $\sqrt{15^2 - 7{,}5^2} = 12{,}9\ cm$

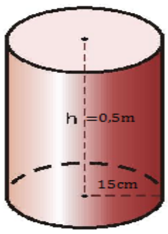
$A_{base} = \frac{Perímetro \cdot apotema}{2} = \frac{15 \cdot 6 \cdot 12{,}9}{2} = 580{,}5\ cm^2$

h= $0{,}5\ m = 50\ cm$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot Altura = 580{,}5 \cdot 50 = 29\,025 cm^3$

$29\,025\ cm^3 = 29\,025 \cdot 0{,}001 = 29{,}025\ litros$

Calcule el volumen de un cilindro de 15 cm de radio y 0,5 m de altura.



Altura= $0{,}5m = 50cm$

$V_{cilindro} = A_{base} \cdot Altura = \pi r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 50 = 35\,325 cm^3 = 35{,}325\ litros$

Actividades propuestas

S31. Transforme en m^3 las siguientes cantidades:

0,025 hm³	45 214 dm³	0,015 km³	23 dam³	58 000 L

S32. Transforme en litros:

40 000 hm³	6 dam³	8562 m³	14 350 dl	1749 cm³

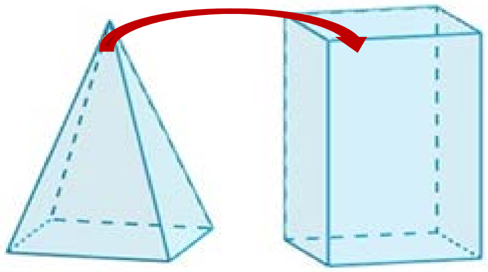
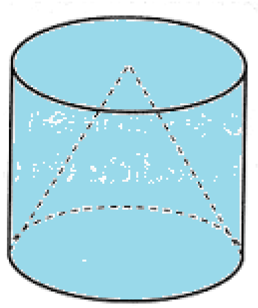
S33. Calcule el volumen de un prisma de 15 m de altura sabiendo que su base es un cuadrado de 56 m de perímetro.

S34. Un edificio tiene forma de prisma de base hexagonal. El lado de la base mide 16 m y la altura del edificio es de 30 m. Calcule su volumen.

S35. Calcule el volumen de un cilindro de 12 m de radio y 2000 cm de altura.

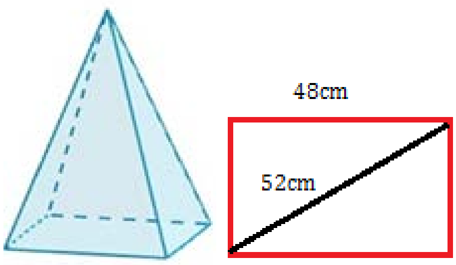
VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE Y DEL CONO

Para calcular el volumen de una pirámide y de un cono tendremos en cuenta lo siguiente:

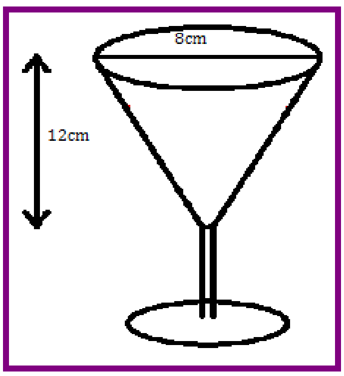
Si consideramos un prisma y una pirámide con la misma base y la misma altura, podemos comparar sus volúmenes. Si llenamos la pirámide de agua y la metemos dentro del prisma, se comprueba que <u>se necesitan tres pirámides para completar el volumen del prisma.</u> 	Como ocurre con la pirámide, el volumen de un cono es la tercera parte del volumen del cilindro de igual base y altura, por lo tanto, necesitaríamos <u>tres conos llenos de agua para completar el volumen del cilindro.</u> 
$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot Altura$	$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot Altura = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot a$

Actividades resueltas

Una pirámide de 60 cm de altura tiene una base rectangular de 48 cm de largo y 52 de diagonal. Calcule con cuántos litros de agua se llena totalmente.

	Para calcular el área de la base necesitamos el otro lado (ancho) del rectángulo, que sería el cateto del triángulo rectángulo formado por la diagonal del rectángulo y el ancho y largo de la base. Calculamos: Lado de la base= $\sqrt{52^2 - 48^2} = 20\ cm$ $A_{base} = b \cdot h = 48 \cdot 20 = 960\ cm^2$ $V_{piramide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot Altura = \frac{1}{3} \cdot 960 \cdot 60 = 19\,200\ cm^3$ $19\,200\ cm^3 = 19200 \cdot 0{,}001 = 19{,}2\ litros$

Tenemos una botella de un litro de agua. ¿Cuántas copas coma la de la figura podemos llenar?

	La parte de la copa que lleva el líquido tiene forma de cono invertido, por lo que tenemos que calcular el volumen en litros de la copa: Radio $= 8 : 2 = 4\ cm$ $A_{base} = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 4^2 = 50{,}24\ cm^2$ $V_{piramide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot Altura = \frac{1}{3} \cdot 50{,}24 \cdot 12 = 200{,}96\ cm^3$ Cada copa lleva 200,96 cm^3. La botella tiene $1 litro = 1\ dm^3 = 1000 cm^3$. Así, calculamos: $1000\ cm^3 : 200{,}96\ cm^3 = 4{,}97$, lo que quiere decir que podríamos llenar casi 5 copas para vaciar la botella.

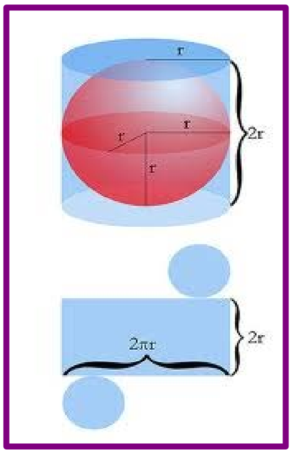
Actividades propuestas

S36. Una pirámide regular tiene por base un cuadrado de 8 cm de lado y su altura es de 10 cm. Calcule su volumen.

S37. Calcule el volumen de un cono de 30 cm de altura y 1,2 dm de radio de la base.

S38. Calcule el volumen de una pirámide regular de 80 cm de altura con base hexagonal cuyo lado mide 30 cm.

VOLUMEN DE LA ESFERA



El volumen de la esfera es igual a los $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro en el que está inscrita.

Ya que el radio de la base del cilindro es el mismo que el de la esfera, R, y la altura del cilindro es 2R, entonces, el volumen del cilindro será:

$$\boldsymbol{V}_{cilindro} = A_{base} \cdot Altura = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi r^3$$

Entonces, el volumen de una esfera de radio R es:

$$\mathbf{V} = \frac{2}{3} \cdot V_{cilindro} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Actividad resuelta

El radio de un balón es 30 cm y se sabe que el grosor de la goma es de 4 mm. ¿Cuántos litros de goma son necesarios para fabricar 100 balones como el que se describe?

Para calcular el volumen de la esfera de goma que cubre el balón, calcularemos primero el volumen total del balón al que le restaremos el volumen de la esfera interior.

1º

$$V_{balón} = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 30^3 = 113\,040\ cm^3$$

2º El radio de la esfera interior es: 30 – 0,4 = 29,6

$$V_{esfera\ interior} = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (29{,}6)^3 = 108\,578{,}42\ cm^3$$

3º Calculamos el volumen de la goma:

$$V_{goma} = 113\,040 - 108\,578{,}42 = 4461{,}58\ cm^3 = 4{,}46158 l$$
$$\approx 4{,}5\ l\ de\ goma\ por\ cada\ balón$$

4º Para 100 balones $4{,}5 \cdot 100 = 450 l\ de\ goma$

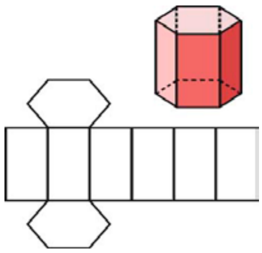
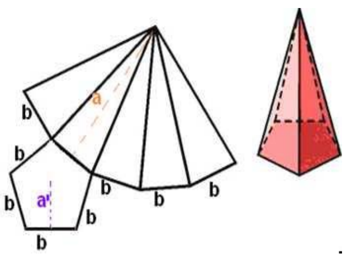
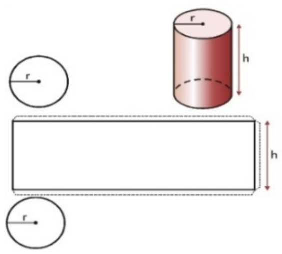
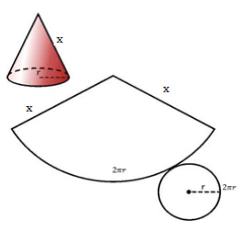
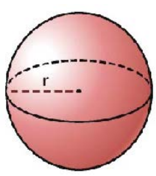
Actividades propuestas

S39. Halle el área total y el volumen de una semiesfera de 3 dm de radio.

S40. ¿Cuál es el volumen de la cúpula de un planetario que tiene forma de semiesfera de 26 m de diámetro?

S41. Calcule el volumen de cada una de las porciones de una naranja de diámetro 12 cm, sabiendo que su monda tiene 0,8 cm de grosor.

CUADRO RESUMEN DE ÁREAS Y VOLÚMENES DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Figura geométrica	Fórmulas
PRISMA 	$ÁREA\ LATERAL = \ perímetro\ de\ la\ base \cdot altura$ $ÁREA\ TOTAL = ÁREA\ LATERAL + 2 \cdot ÁREA\ DE\ LA\ BASE$ VOLUMEN DE UNA FIGURA PRISMÁTICA $V = Area_{base} \cdot Altura$
PIRÁMIDE 	$ÁREA\ LATERAL = \frac{perímetro\ de\ la\ base \cdot apotema\ (a)}{2}$ $ÁREA\ TOTAL = ÁREA\ LATERAL + ÁREA\ DE\ LA\ BASE$ $A_T = A_L + A_B = \frac{Perímetro\ de\ \ base \cdot a}{2} + \frac{Perímetro\ de\ base \cdot a'}{2}$ VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE $V = \frac{1}{3} Area_{base} \cdot Altura(h)$
CILINDRO 	$ÁREA\ LATERAL = 2\pi r. Altura(h)$ $ÁREA\ TOTAL = ÁREA\ LATERAL + ÁREA\ DE\ DOS\ BASES$ $A_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$ VOLUMEN DE UN CILINDRO $V = \pi r^2 \cdot Altura(h)$
CONO 	$ÁREA\ LATERAL = \pi \cdot r \cdot x(generatriz)$ $ÁREA\ TOTAL = \pi \cdot r \cdot x + \pi r^2$ VOLUMEN DE UN CONO $V = \frac{\pi r^2 \cdot Altura(h)}{3}$
ESFERA 	ÁREA DE LA ESFERA $= 4\pi R^2$ VOLUMEN DE LA ESFERA $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

3. Actividades finales

S42. Una ciudad está a 34 km al oeste y a 16 km al norte de otra. ¿Cuál es la distancia lineal real entre las dos ciudades?

S43. Calcule el área de un triángulo equilátero de 10 cm de lado.

S44. Un granjero construyó una parcela triangular de lados a = 12, b = 10 y c = 6. ¿Qué tipo de triángulo forma esa parcela? Justifique la respuesta.

S45. La razón de semejanza entre dos triángulos es de 0,4. Si el mayor tiene 6 cm de base y 10 cm de altura, ¿cuánto miden la base y la altura del menor?

S46. Dos piscinas son semejantes. La pequeña mide 5 m de largo y la grande 10 m.

a. ¿Cuál es la razón de semejanza?

b. Si la pequeña tiene 1,40 m de profundidad, ¿cuál es la profundidad de la grande?

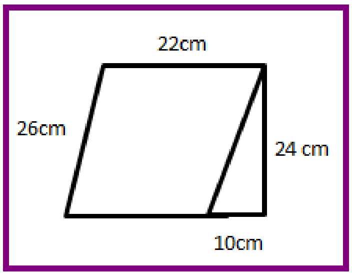
c. Pintar el interior de la pequeña costó 1000 euros. ¿Cuánto costará pintar el interior de la grande?

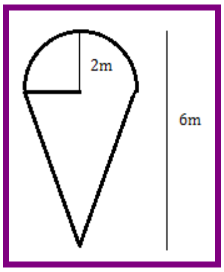
d. Llenar la pequeña de agua cuesta 200 euros. ¿Cuánto costará llenar la grande?

S47. Se hizo el plano de un dormitorio de dimensiones 9 m de largo y 6 m de ancho. En el plano, el largo del dormitorio es 12 cm. ¿A qué escala está dibujado el plano?

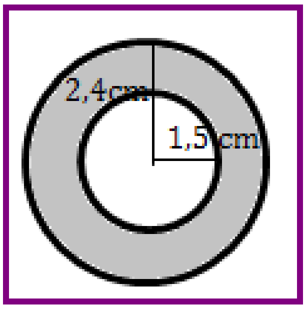
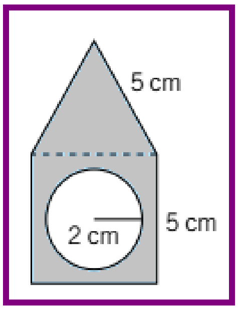
S48. En un mapa de África construido a escala 1:84 000 00 la mayor distancia este-oeste corresponde a dos puntos situados a 60 mm y la mayor distancia norte-sur corresponde a 120 mm. ¿Cuántos kilómetros representan estas distancias?

S49. Calcule el área y el perímetro de las siguientes figuras:

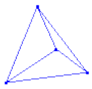
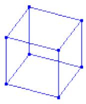
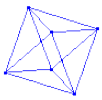
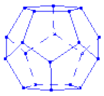
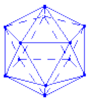




S50. Calcule el área de la superficie sombreada.

S51. Complete la tabla y compruebe que se cumpla para los cinco poliedros regulares la fórmula de Euler: cara + vértice = arista + 2.

	Nombre	Caras	Vértices	Aristas	C + V = A + 2
	Tetraedro	4	4	6	4 + 4 = 6 + 2
					
					
					
					

S52. Las dimensiones de un ortoedro son 6 cm, 11 cm y 10 cm. Calcule su área.

S53. Las bases de un prisma recto son rombos de diagonales 8 cm y 6 cm. La altura del prisma es 10 cm. Calcule el área total.

S54. La altura de un prisma recto es de 20 cm. Sus bases son trapecios que tienen 11 cm y 16 cm de base y 12 cm de altura. Calcule el área total del prisma.

S55. Una pirámide tiene la base cuadrada. Se sabe que su área total es de 1248 cm^2 y su área lateral 992 cm^2. Calcule lo que miden los lados de la base de la pirámide.

S56. Calcule el área total y lateral de una pirámide hexagonal de 13 cm de altura que tiene como radio de la base 6 cm.

S57. Un depósito cilíndrico tiene 672,24 cm^2 de área lateral y 18 cm de altura. Calcule el radio de la base y el área total del depósito.

S58. La generatriz de un cono mide 5 m y la altura 4 m, calcule:

a) El radio de la base del cono.

b) El área total del cono.

S59. Una cúpula semiesférica de un edificio tiene 10 m de diámetro y una altura de 5 m. Calcule su superficie.

S60. Calcule el volumen de un prisma de base hexagonal de 10 cm de altura y de 3 cm de lado de la base.

S61. El diámetro de la base de una lata de conservas cilíndrica mide 12 cm y la altura de la lata es de 9 cm. Una segunda lata tiene 9 cm de radio en la base y 4 cm de altura.

a) Compare los volúmenes de las dos latas.

b) ¿Cuál es la que necesita la mayor cantidad de material para su construcción?

S62. La mayor de las tres pirámides que hay en Gizeh (Egipto) es la de Keops. Su base es un cuadrado que mide 230 m de lado y su altura es de 147 m. Halle su volumen.

S63. Calcule el área total y el volumen de un cono de 10,4 cm de altura, 12 cm de generatriz y 6 cm de radio de la base.

S64. El diámetro de un balón mide 20 cm. Calcule su volumen.

S65. Calcule cuantos metros cúbicos de agua caben en un depósito de forma esférica de 14 m de diámetro.

4. Solucionarios

4.1 Soluciones de las actividades propuestas

S1. *261cm^2.*

S2.

$5^2 = 4^2 + 3^2$ $25 = 25$	$17^2 = 15^2 + 8^2$ $289 = 289$	$37^2 = 35^2 + 12^2$ $1369 = 1369$
$13^2 = 12^2 + 5^2$ $169 = 169$	$25^2 = 24^2 + 7^2$ $625 = 625$	$41^2 = 40^2 + 9^2$ $1681 = 1681$

S3. *126,49 cm.*

S4. *5,2 cm.*

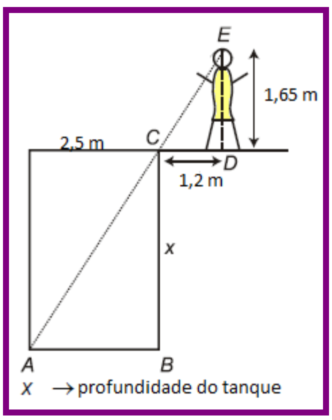
S5. *200 metros.*

S6. *Desde el punto más alto de la torre hasta el extremo de la sombra hay 250 metros.*

S7. *32,5 metros.*

S8. *10 metros y 24 metros.*

S9. *Hacemos un dibujo que muestre la situación.*



Los triángulos $\triangle$ ABC y $\triangle$ CDE son semejantes pues sus ángulos son iguales.

Luego: $\frac{2,5}{1,2} = \frac{x}{1,65} \Rightarrow x = \frac{2,5 \cdot 1,65}{1,2} = 3,43\ m$

La profundidad del tanque de agua es de 3,43 m.

S10. *Las dimensiones del rectángulo menor son 1,6 cm y 4,8 cm.*

S11. *a) Sí, son semejantes, ya que la única diferencia es el tamaño, pues la forma es la misma. La razón de semejanza entre la grande y la pequeña es 1,5 cm.*

b) 1,5 cm.

c) 57 m.

d) Recuerde que el peso es proporcional al volumen. 675 g.

y) Recuerde que el costo de la pintura es proporcional a la superficie. 11,25 euros.

S12. *1:100.*

S13. *250 km.*

S14.

DIBUJO	MEDIDA REAL
26 cm	26000 cm
1500 cm	15 km
5 cm	50 m

S15. *962* cm^2.

S16. *162* cm^2.

S17. *300* m^2.

S18. *81* cm^2.

S19. $4\sqrt{3}\ cm^2$.

S20. *78* cm^2.

S21. *1208* cm^2.

S22. *600* cm^2.

S23. *2437,05* cm^2.

S24. *a)* $A_B = 259{,}8\ m^2$. *b)*$A_l = 1320\ m^2$. *c)*$A_t = 1579{,}8\ m^2$.

S25. *13,564* cm^2.

S26. *828,96* cm^2.

S27. *314,2* cm^2.

S28. *339,3* cm^2.

S29. *2826* cm^2.

S30. $r = 13\ m$.

S31.

0,025 hm^3	45 214 dm^3	0,015 km^3	23 dam^3	58 000 L

S32.

40 000 hm^3	6 dam^3	8562 m^3	14 350 dl	1749 cm^3

S33. $V = 2940\ m^3$.

S34. $V = 19\ 958{,}4\ m^3$.

S35. $V = 9043{,}2\ \ m^3$.

S36. $V = 213{,}3\ cm^3$.

S37. $V = 4521{,}63\ cm^3$.

S38. $V = 62\ 160\ cm^3$.

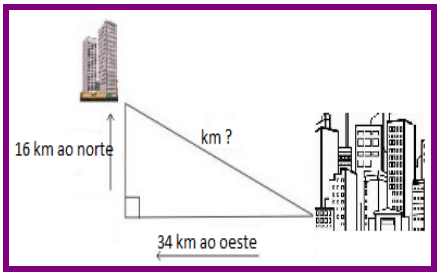
S39. $56{,}5\ dm^2$ y $56{,}5\ dm^3$.

S40. $V = 4599{,}05\ m^3$.

S41. $723{,}24\ cm^3$.

4.2 Soluciones de las actividades finales

S42. *Hacemos un dibujo que muestre la situación.*

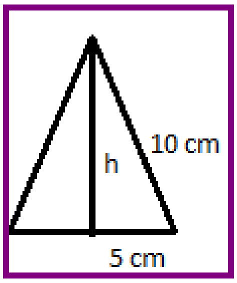


1º. El triángulo queda definido, sabemos que tenemos un cateto que mide 34 km, otro que mide 16 y la distancia que se nos pide es la hipotenusa de este triángulo rectángulo.

2º. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{34^2 + 16^2} = \sqrt{1412} = 37{,}57\ km.$$

S43. *Hacemos un dibujo del triángulo.*



1º. La altura del triángulo equilátero es el cateto del triángulo rectángulo formado por uno de los lados del triángulo equilátero y la mitad del otro.

2º. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8{,}66\ cm.$$

3º Calculamos el área del triángulo:

$$A = \frac{b.h}{2} = \frac{10.8{,}66}{2} = 43{,}30\ cm^2.$$

S44. *Es un triángulo obtusángulo, ya que* $a^2 > b^2 + c^2$.

S45. *Base = 2,4 cm; altura = 4 cm.*

S46. *a) r = 2.*

b) Profundidad de la grande = 2,80 m.

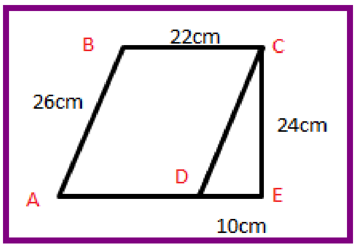
c) Pintar el interior de la grande costó 4000 euros.

d) Llenar la piscina grande costó 1600 euros.

S47. *Escala 1:75.*

S48. *Distancia este-oeste = 5040 km. Distancia norte-sur = 10 080 km.*

S49.

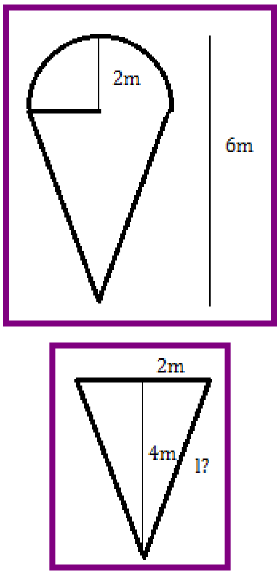


La figura representa un romboide y un triángulo.

Perímetro = 22 + 24 + 32 + 26 = 104 cm.

$$A_{tot} = A_{romboide} + A_{triángulo}$$

$$A_{tot} = 22 \cdot 24 + \frac{10 \cdot 24}{2} = 648\ cm^2.$$



La figura representa un semicírculo y un triángulo isósceles.

1º. Para calcular el perímetro, calculamos la longitud de la semicircunferencia y le sumamos los lados iguales del triángulo:

$$Longitud\ de\ la\ semicircunferencia = \frac{2\pi r}{2} = 3{,}14 \cdot 2 = 6{,}28\ m.$$

Calculamos el lado del triángulo teniendo en cuenta que es la hipotenusa del triángulo rectángulo la que se muestra en la figura:

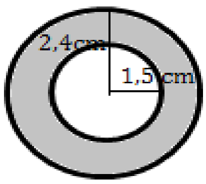
$$l = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4{,}47\ m$$

$$Perímetro = 6{,}28 + 2 \cdot 4{,}47 = 15{,}22\ m.$$

2º. Para calcular el área se suman el área del semicírculo y la del triángulo:

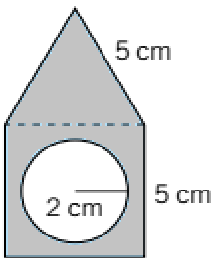
$$A_{tot} = \frac{\pi r^2}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = 6{,}28 + 4 = 10{,}28\ m^2.$$

S50.



Para calcular la parte sombreada tenemos que restarle al área del círculo mayor la del menor:

$$A = \pi(r_1)^2 - \pi(r_2)^2 = 3{,}14 \cdot (2{,}4)^2 - 3{,}14 \cdot (1{,}5)^2 = 11{,}02\ cm^2.$$



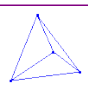
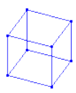
La parte sombreada representa un cuadrado, más un triángulo equilátero, menos un círculo.

1º Para calcular el área del triángulo calculamos su altura:

$$h = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33\ cm$$

$$A_{tot} = \left(l^2 + \frac{b \cdot h}{2}\right) - \pi r^2 = \left(5^2 + \frac{5 \cdot 4{,}33}{2}\right) - 3{,}14 \cdot 2^2 = 23{,}27 cm^2.$$

S51.

	NOMBRE	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS	C + V = A+ 2
	*Tetraedro*	*4*	*4*	*6*	*4 + 4 = 6 + 2*
	*Cubo o hexaedro*	*6*	*8*	*12*	*6 + 8 = 12 + 2*
	*Octaedro*	*8*	*6*	*12*	*8 + 6 = 12 + 2*
	*Dodecaedro*	*12*	*20*	*30*	*12 + 20 = 30 + 2*
	*Icosaedro*	*20*	*12*	*30*	*20 + 12 = 30 + 2*

S52. Ortoedro: prisma recto de base rectangular.

Siendo a, b, c las aristas.

Área $_{Total}$ = $2\ (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \rightarrow 2 \cdot (6 \cdot 11 + 6 \cdot 10 + 11 \cdot 10) = 472\ cm^2$.

S53. *$248\ cm^2$.*

S54. *$1152\ cm^2$.*

S55. *16 cm.*

S56. *$A_{lat} = 252\ cm^2$, $A_{tot} = 346\ cm^2$.*

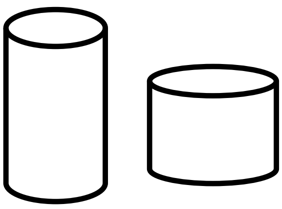
S57. *$r_b = 6$ cm, $A_{tot} = 904{,}32\ cm^2$.*

S58. *$r_b = 3$ m, $A_{tot} = 75{,}36\ m^2$.*

S59. *$157{,}08\ m^2$.*

S60. *$234\ cm^3$.*

S61.



Para comparar el volumen de las latas de conservas, calculamos cada una de ellas:

$$V_1 = \pi(r_1)^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 9 = 1017{,}36\ cm^3$$

$$V_2 = \pi(r_2)^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 9^2 \cdot 4 = 1017{,}36\ cm^3$$

Las dos ocupan el mismo volumen.

Para saber qué cantidad de material se necesita para su construcción, calculamos sus aéreas totales:

$$A_{tot1} = Per_{b1} \cdot h + 2 \cdot \pi(r_1)^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6^2 = 282{,}6\ cm^2.$$

$$A_{tot2} = Per_{b2} \cdot h + 2 \cdot \pi(r_2)^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9^2 = 533{,}8\ cm^2.$$

Por lo tanto, se necesita más cantidad de material para fabricar la segunda lata.

S62. $2\ 592\ 100\ m^3$.

S63. $A_{tot} = 339{,}12\ cm^2, \quad V = 391{,}8\ cm^3$.

S64. $V = 4186{,}66\ cm^3$.

S65. $V = 1436{,}03\ m^3$.

5. Glosario

A	▪ Área	Extensión de una superficie que se expresa en unidades de superficie.
	▪ Arista	Segmento común a dos caras de un poliedro.
C	▪ Cara	Cada uno de los polígonos que limita un poliedro.
	▪ Catetos	Cada uno de los lados de menor longitud de un triángulo rectángulo.
	▪ Cilindro	Cuerpo de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.
	▪ Cono	Cuerpo de revolución que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.
	▪ Cuerpo de revolución	Cuerpo obtenido al rotar una región del plano alrededor de una recta situada en el mismo plano.
D	▪ Dodecaedro	Poliedro formado por doce caras que son pentágonos regulares.
E	▪ Escala	Es la razón de semejanza entre una reproducción y la realidad. Corresponde al cociente entre la longitud de una reproducción, sea mapa, plano o maqueta, y la longitud en la realidad.
	▪ Esfera	Cuerpo de revolución que se obtiene al hacer girar un semicírculo alrededor de su diámetro.
F	▪ Figuras planas	Las **figuras planas** son aquellas que están limitadas por líneas rectas o curvas y todos sus puntos están contenidos en un solo plano.
H	▪ Hipotenusa	Lado de mayor longitud de un triángulo rectángulo.
	▪ Hexaedro o cubo	Poliedro formado por seis caras que son cuadrados.
I	▪ Icosaedro	Poliedro formado por veinte caras que son triángulos equiláteros.
O	▪ Octaedro	Poliedro formado por ocho caras que son triángulos equiláteros.
P	▪ Perímetro	Medición de la distancia o longitud alrededor de una figura de dos dimensiones.
	▪ Poliedro	Cuerpo geométrico cuyas caras son planas y engloban un volumen finito.
	▪ Prisma	Poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos, que llamamos bases, y varios paralelogramos, que llamamos caras.
	▪ Pirámide	Poliedro que tiene por base un polígono cualquiera y por caras laterales triángulos con un vértice común, que es el de la pirámide.
R	▪ Razón de semejanza	Existe cuando, en dos figuras semejantes, la razón entre los lados homólogos es una constante.
S	▪ Semejanza	En matemáticas decimos que dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma, pero diferente tamaño. Dos figuras son semejantes si se cumple que: ▪ Un ángulo medido en la primera es igual al ángulo correspondiente en la segunda. ▪ Una proporción en la primera figura es igual a la proporción correspondiente en la segunda.
T	▪ Teorema de Pitágoras	Teorema que afirma que el área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.
	▪ Terna pitagórica	Tres números naturales a, b, c que cumplan $a^2 = b^2 + c^2$, es decir, que pueden ser las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.
	▪ Tetraedro	Poliedro de cuatro caras que son triángulos equiláteros.
V	▪ Vértice	Punto del poliedro donde se juntan tres o más aristas.
	▪ Volumen de cuerpos geométricos	El **volumen** es una magnitud métrica de tipo escalar que se define como la extensión en tres dimensiones de una región del espacio. Es una magnitud derivada de la longitud, pues la obtenemos multiplicando la longitud, el ancho y la altura.

6. Bibliografía y recursos

Bibliografía

- Libros para la educación secundaria a distancia de adultos. Ámbito científico-tecnológico. Consellería de Educación e Ordenación Universitaria
- Matemáticas ESO1. Ed Anaya. 2016
- Matemáticas ESO2. Ed Anaya. 2016
- Matemáticas. Serie Resuelve. 2º ESO. Editorial Santillana

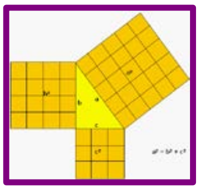
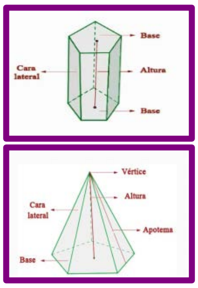
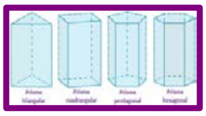
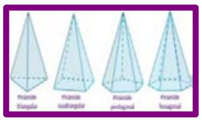
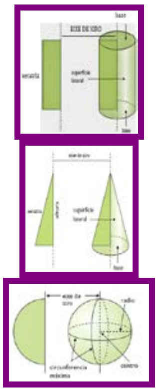
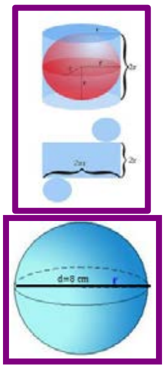
Enlaces de Internet

En estos enlaces encontrará trucos e información que puede consultar para mejorar su práctica.

- http://www.vitutor.com
- http://matematicasmodernas.com
- http://www.apuntesmareaverde.org.es
- http://www.lasmatematicas.es
- http://www.recursos.cnice.mec.es

7. Anexo. Licencia de recursos

Licencias de recursos utilizados en esta unidad didáctica

RECURSO (1)	DATOS DEL RECURSO (1)	RECURSO (2)	DATOS DEL RECURSO (2)
 RECURSO 1	▪ Licencia: Creative Commons ▪ **Procedencia**: http://kon-pas.blogspot.com.es/2010/02/historia-de-él-teorema-de-pitagoras.html	 RECURSO 2	▪ Autoría: sin información ▪ Licencia: GNU head Creative Commons de Atribución/Compartir-Igual 3.0 Unported, 2.5 Genérica, 2.0 Genérica y 1.0 Genérica. ▪ **Procedencia**: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Soccer_ball.svg
 RECURSO 3	▪ Autoría: slideshow bob ▪ Licencia: Creative Commons Attribution- Share Alike 2.0 Generic ▪ **Procedencia**:Flickr.com	 RECURSO 4	▪ Licencia: CCBY-SA3.0 ▪ **Procedencia**: es.wikipedia.org
 RECURSO 5	▪ Autoría: Vinadas1 ▪ Licencia: sin información ▪ **Procedencia**: http://www.losviajeros.com/Blogs.php?y=38677	 RECURSO 6	▪ Autoría: sin información ▪ Licencia: CCBYNCSA CCBYNCND ▪ **Procedencia**: https://sites.google.com/site/cuerpgeo/piramide http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/volumen-prisma-pentagonal/
 RECURSO 7	▪ Autoría: sin información ▪ Licencia: CCBYNCND ▪ **Procedencia**: http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/prisma/	 RECURSO 8	▪ Autoría: Irene ▪ Licencia: CCBYNCND ▪ **Procedencia**: https://www.geogebra.org/m/dSHgDjhE
 RECURSO 9	▪ Licencia: CCBYNCSA ▪ **Procedencia**: https://sites.google.com/site/cuerpgeo	 RECURSO 10	▪ Autoría: Andertxuman ▪ Licencia: CCBYNCSA Creative Commons atribution: Share Alike Licence ▪ **Procedencia**: http://maralboran.org/wikipedia/index.php/%C3%81reas_y_vol%C3%BAmenes https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Esfera_Arqu%C3%ADmedes.jpg