UNIDADE 3: XEOMETRÍA

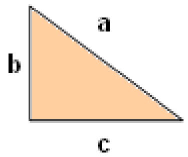
Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras establece una relación entre certos tipos de triángulos e os seus lados. Este tipo de triángulos chámase rectángulo, por medir un dos seus ángulos 90º, o que significa que é un ángulo recto.

Nun triángulo rectángulo o lado de maior lonxitude chámase hipotenusa, e os outros dous, de menor lonxitude e perpendiculares entre si, catetos. Lembre que en calquera triángulo, a suma das medidas dos tres ángulos vale 180º. Polo tanto, en calquera triángulo rectángulo, a suma dos dous ángulos agudos é 90º. Pitágoras foi un filósofo e matemático grego que viviu cara ao ano 500 antes de Cristo. El e os seus discípulos demostraron a relación entre os catetos e a hipotenusa dun triángulo rectángulo. É dicir:

Nun triángulo rectángulo, o cadrado da hipotenusa é igual a suma dos cadrados dos catetos.

Hipotenusa = a   catetos = b, c



$a^2=b^2+c^2$

Aplicacións do Teorema de Pitágoras

Do teorema de Pitágoras, dedúcense as igualdades seguintes:

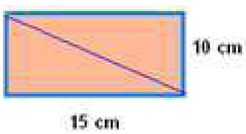
$a^2=b^2+c^2$ para calcular a hipotenusa

$b^2=a^2-c^2$ para calcular o cateto b

$c^2=a^2-b^2$ para calcular o cateto c

Actividade resolta

Calculamos a diagonal dun rectángulo de lados a = 10 cm e b =15 cm.



$(10\text{ cm})^2 + (15\text{ cm})^2 = x^2$

$100\text{ cm}^2 + 225\text{ cm}^2 = x^2$

$X^2 = 325\text{ cm}^2$

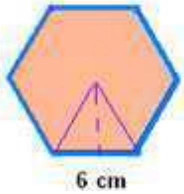
$x = 18\text{ cm}$

A diagonal do rectángulo mide 18 cm.

Actividades propostas

S22.. Se unha escada ten 2,20 cm de lonxitude e se apoia nunha parede de 1,80 cm de altura. A que distancia da parede se sitúa a base da escaleira?

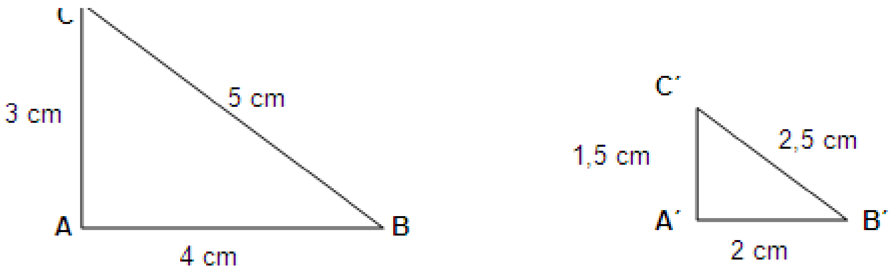
S23..Cal é o valor da apotema dun hexágono regular de lado 6 cm.?



S24. Nun cadrado a diagonal mide 3 cm, canto mide o seu lado?
S25. Calcule o lado dun rombo cuxas diagonais miden 6 cm e 8 cm.
S26. O lado menor dun campo de cultivo rectangular mide 150 m e a súa diagonal 250m. Canto mide o lado maior?
S27.. Un edificio mide 150 m de altura e produce unha sombra no chan de 200 m. Que distancia hai desde o punto máis alto da torre ata o extremo da sombra?

. Semellanza

Cando dúas figuras teñen a mesma forma e o mesmo tamaño dicimos que son congruentes (iguais). As figuras que teñan a mesma forma pero diferente tamaño, son semellantes. Cando dous polígonos son semellantes dáse, entre os seus lados, unha relación de proporcionalidade:o cociente entre lados homólogos ten o mesmo valor e recibe o nome de
razón de semellanza. Dise tamén que os lados son proporcionais.



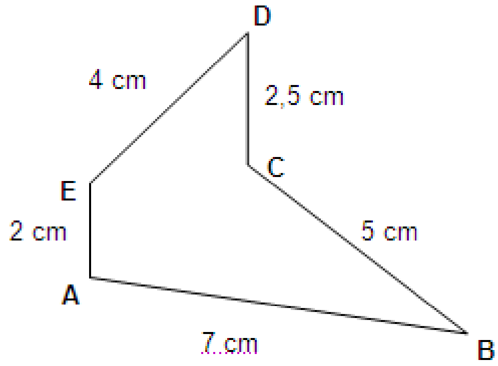
E a razón de semellanza é:

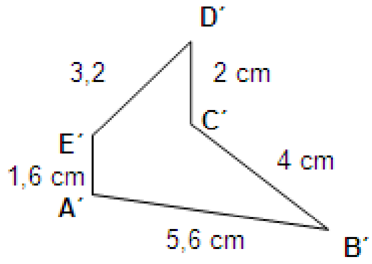
$$\frac{4cm}{2cm}=\frac{5cm}{2,5cm}=\frac{3cm}{1,5cm}=2$$

En xeral:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=k$$

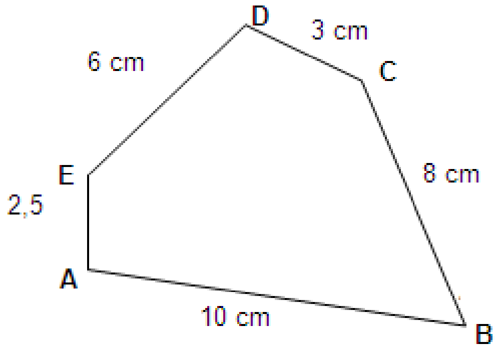
S29 -Comprobe se nos seguintes polígonos semellantes o cociente entre os lados homólogos é o mesmo. Calcule a razón de semellanza

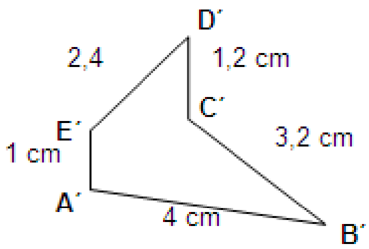




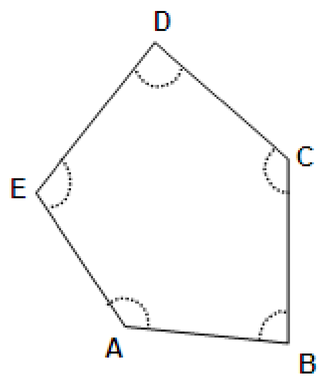
Figuras semellantes

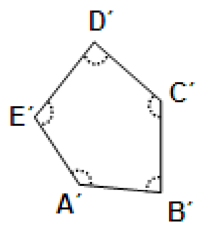
Para que dous polígonos sexan semellantes non abonda con que os seus lados sexan proporcionais





En xeral, para que dous polígonos sexan semellantes teñen que ter os lados proporcionais
e os ángulos iguais.





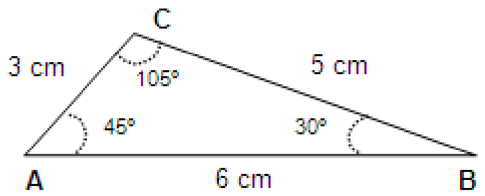
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = k$$

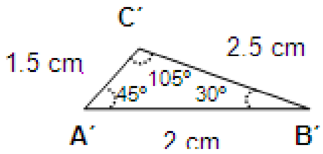
$\hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$, $\hat{C} = \hat{C'}$, $\hat{D} = \hat{D'}$, $\hat{E} = \hat{E'}$,

É particularmente interesante o estudo da proporcionalidade en triángulos, xa que permite a resolución de problemas cotiáns de xeito doado.

Semellanza de triángulos: aplicación

Dous triángulos semellantes teñen proporcionais os lados homólogos e iguais os ángulos homólogos.



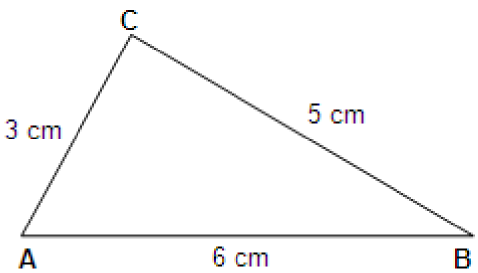


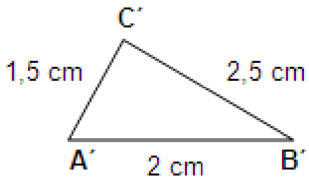
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = k$$

$\hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$, $\hat{C} = \hat{C'}$, $\hat{D} = \hat{D'}$, $\hat{E} = \hat{E'}$,

Para que dous triángulos sexan semellantes ha de cumprirse unha das seguintes condicións:

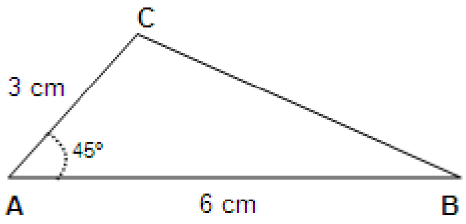
- Que os lados homólogos sexan proporcionais.

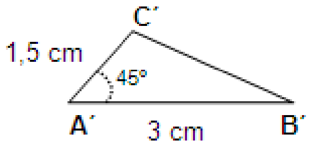




$$\frac{3cm}{1{,}5cm} = \frac{6cm}{3cm} = \frac{5cm}{2{,}5cm} = 2$$

- Que dous lados sexan proporcionais e que os ángulos comprendidos entre eles sexan iguais.

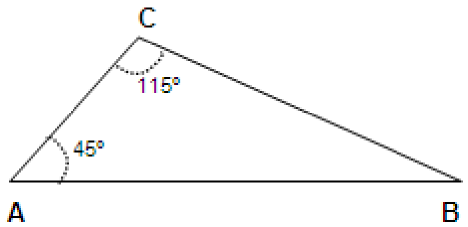


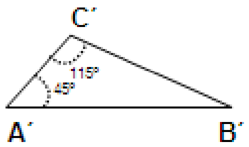


$$\frac{3cm}{1{,}5cm} = \frac{6cm}{3cm} = 2$$

$$\hat{A} = \hat{A'} = 45^{\circ}$$

- Que dous ángulos sexan iguais.



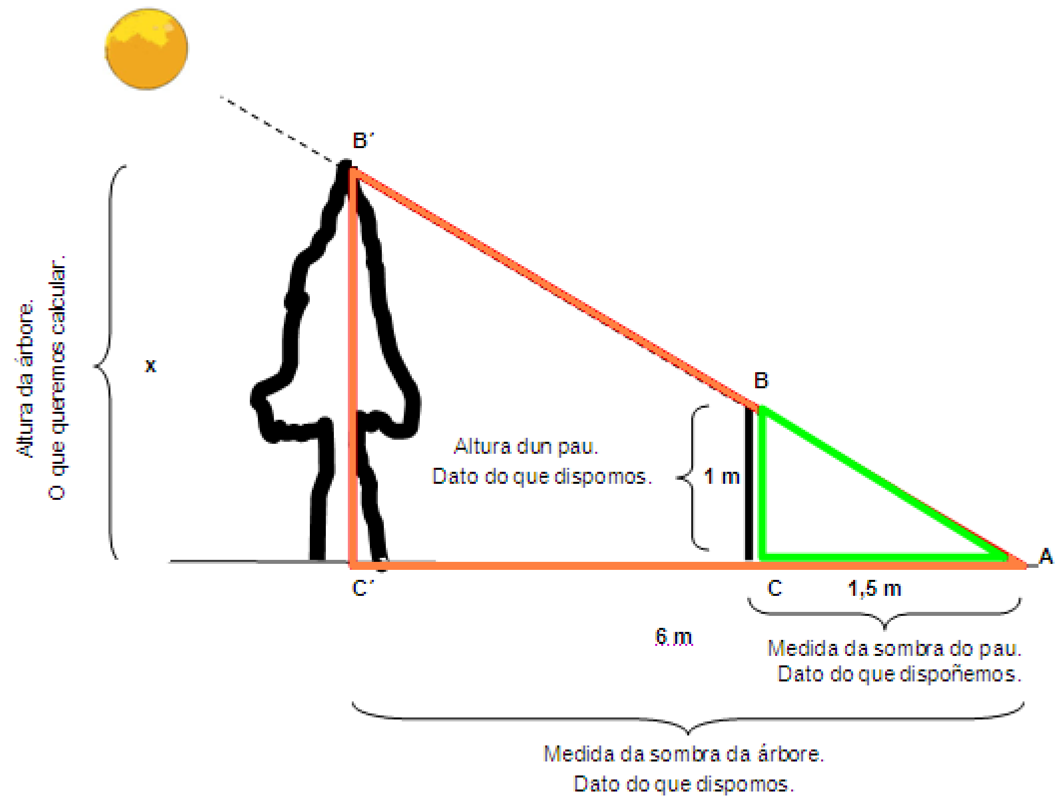


Aplicacións: resolución de problemas cotiáns

Os triángulos semellantes permiten a resolución dunha enorme cantidade de problemas relacionados coa vida cotiá. A clave da súa resolución está na identificación dos propios triángulos semellantes.

Actividade resolta

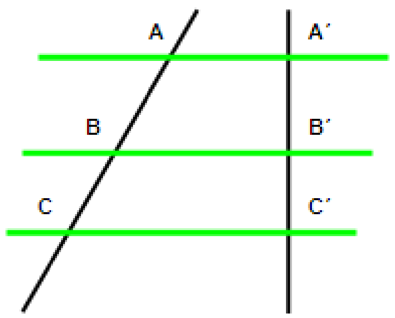
Podemos calcular a altura dunha árbore medindo a lonxitude da súa sombra e comparándoa coa lonxitude da sombra dun obxecto coñecido.



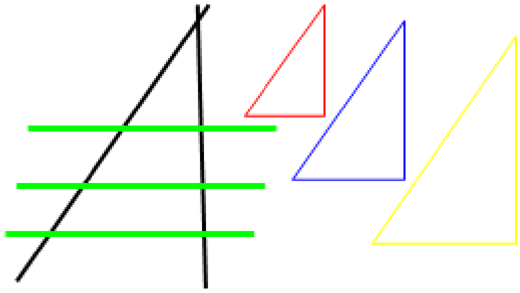
S31. Comprobe se son semellantes os seguintes triángulos.

Teorema de Tales

Cando dúas rectas paralelas cortan dúas rectas transversais determinan nestas segmentos
proporcionais. Isto é unha xeneralización das condicións de semellanza de triángulos.

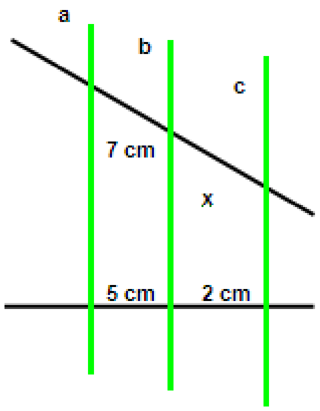


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$



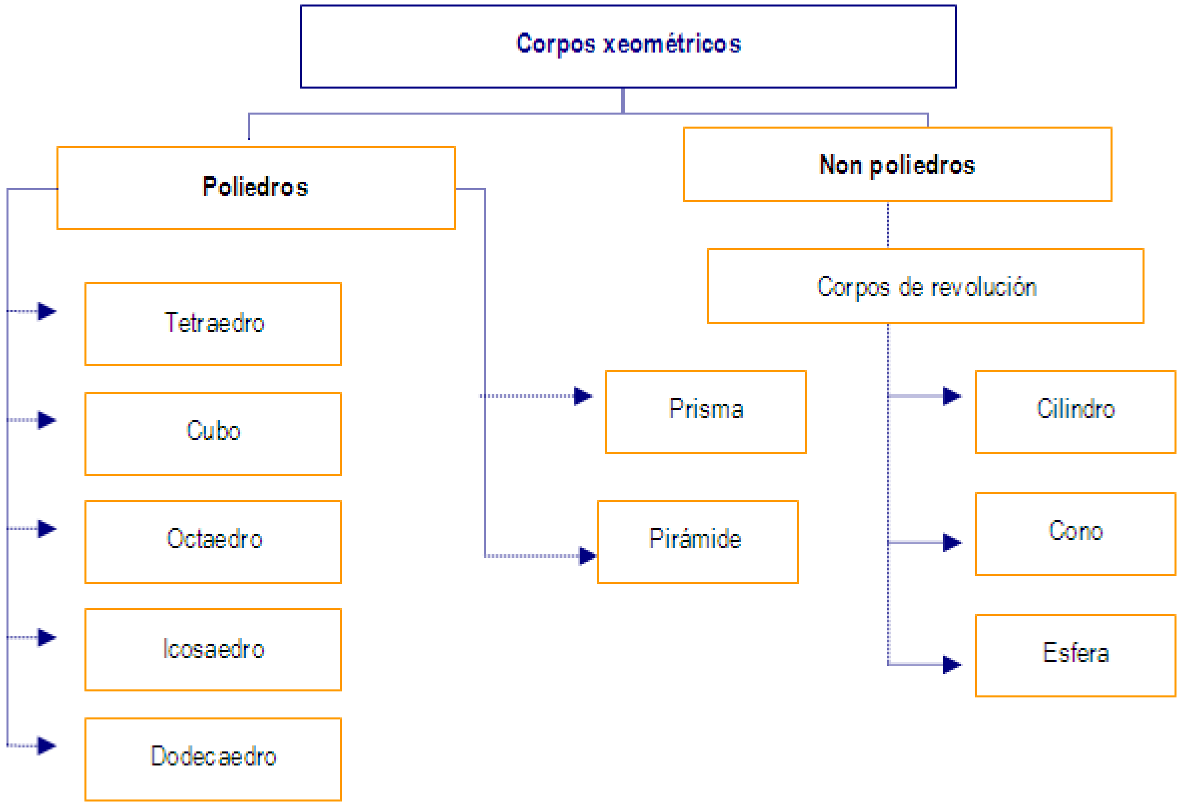
Actividades propostas

S33. As rectas *a*, *b* e *c* son paralelas. Calcule a lonxitude de *x*.



Clasificación dos corpos xeométricos

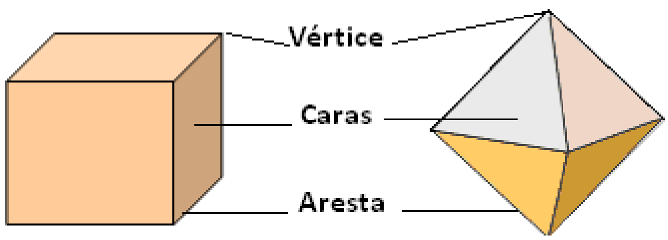
Os corpos xeometricos dividense en poliedros (poliedros regulares, prismas e piramides) e corpos de revolucion (cilindros, esferas e conos).



Poliedros

Son figuras tridimensionais limitadas por varios planos en forma de poligonos. Nun poliedro elementos principais son:

- Caras: son os poligonos que limitan o poliedro.
- Arestas: son os segmentos comuns a duas caras.
- Vértice: e o punto do poliedro onde se xuntan tres ou mais arestas



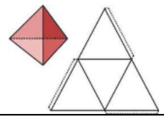
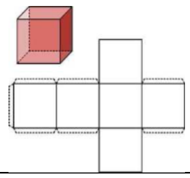
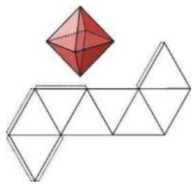
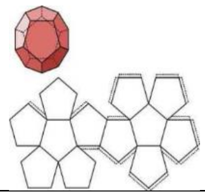
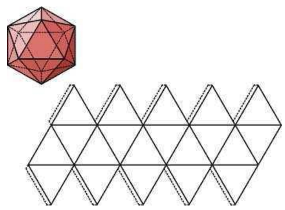
O numero de caras, vertices e arestas esta relacionado. A formula de Euler indica que se cumpre que:

Caras + vertices = arestas + 2

Poliedros regulares

Un poliedro regular e aquel cuxas caras son poligonos regulares iguais e en cada un dos seus vertices converxe o mesmo numero de caras.

Poliedro regular	Definición	Figura e desenvolvemento

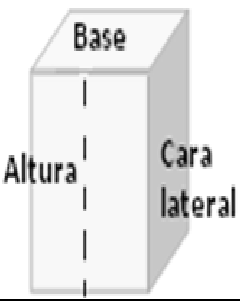
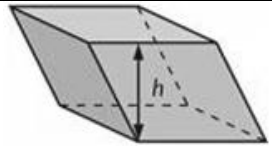
Tetraedro	Formado por catro caras que son triángulos equiláteros	
Cubo ou hexaedro	Formado por seis caras que son cadrados.	
Octaedro	Formado por oito caras que son triángulos equiláteros. Este poliedro xira libremente cando se suxeita por vértices opostos	
Dodecaedro	Formado por doce caras que son pentágonos regulares	
Icosaedro	Formado por vinte caras que son triángulos equiláteros	

Áreas dos poliedros regulares.Tendo en conta o seu numero de caras e a area do poligono regular do que estea formado, calculase a area do poliedro regular multiplicando eses dous datos.

Prismas

E un poliedro limitado por dous poligonos iguais e paralelos entre si que forman as bases e as caras laterais. A altura do prisma e a distancia entre as bases. O prisma e recto se as caras laterais son rectangulos e perpendiculares as bases.

Prismas rectos Teñen nas bases polígonos regulares (prismas regulares)	**Prismas oblicuos.** As caras laterais non son perpendiculares ás bases

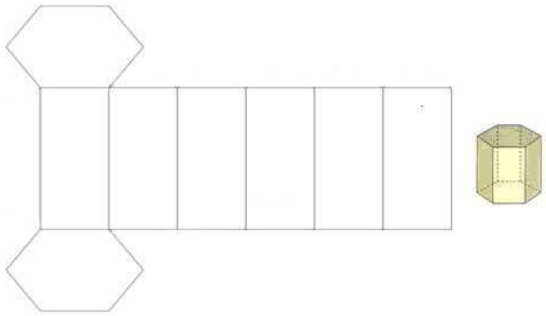
	

Clasificación dos prismas

En funcion de que o tipo de poligono das bases do prisma sexa un triangulo, un cadrado, un pentagono, etc., denominanse triangulares, cuadrangulares, pentagonais, hexagonais, etc.

Áreas dos prismas

A partir do desenvolvemento dun prisma podemos calcular con claridade a sua area:



- **Área total** = area lateral + 2 · area da base

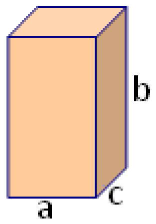
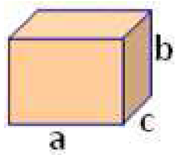
- **Área lateral:** AL e a suma das areas das suas caras laterais (area lateral = perimetro da base · Altura (h))

- **Área das bases**: AB e a suma das areas das suas duas bases (area total = area lateral +2 · area das bases)

Paralelepípedos

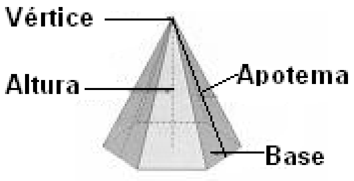
Son prismas en que todas as suas caras son paralelogramos; cada par de caras opostas son iguais.

Ortoedros. Son paralelepípedos con todas as caras rectangulares Área Total = 2.a.b + 2.a.c +2.b.c = 2 (a.b + a.c + b.c)	**Cubos.** Cubo é un ortoedro en que as tres dimensións son iguais Área Total = 6. a^2

Pirámides

Tratase dun poliedro cun poligono calquera por base, e triangulos cun vertice comun as caras laterais.



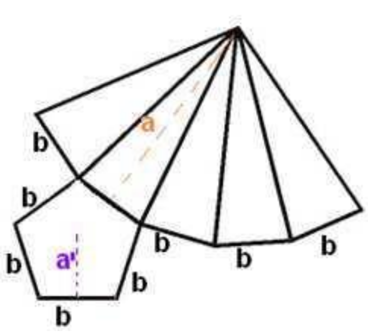
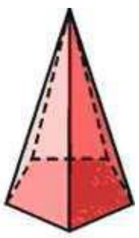
A altura da piramide e a distancia do vertice ao plano que conten a base.

Clasificación des pirámides

Unha piramide e regular se e recta e ten como base un poligono regular. Se non cumpre estas caracteristicas, denominase irregular.
Nunha piramide regular todas a arestas laterais son iguais e as caras laterais son triangulos isosceles. As alturas dos triangulos chamanse apotemas da piramide.
As piramides chamanse triangulares, cuadrangulares, pentagonais, hexagonais... segundo sexa o tipo de poligono da base.

Área da pirámide

A partir do desenvolvemento dunha piramide podese calcular con claridade a sua area:

- **Área total** = area lateral + area da base
- **Área lateral**: AL e a suma das areas das suas caras laterais, n triangulos iguais:

A_L=n.b.a/2=perímetro de la base.a/2

- **Área da base**: AB

□□□

AB= Perimetro da base a´/2

Daquela, a area total dunha piramide e:

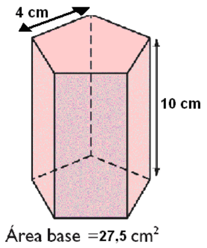
Area total = Area lateral + Area da base

A_T=A_L+A_B=perímetro de la base.a/2+perímetro de la base .a´/2

Actividade resolta

Calcule a área total dun prisma de base pentagonal, de altura 10 cm, lado da base 4 cm e apotema 2,75 cm.

Solución



A Lateral = Perímetro da base . altura = (4 cm . 5). 10 cm = 200 cm^2

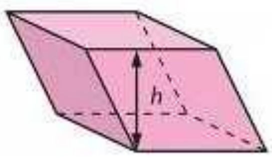
$$A_{Base} = \frac{Perímetro\ \ da\ base \cdot apotema}{2} =$$

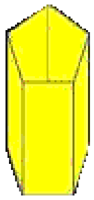
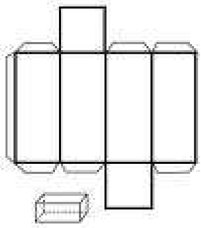
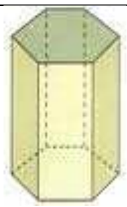
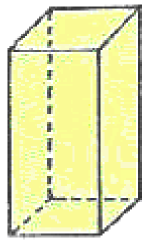
$$= \frac{20\ cm \cdot 2,75\ cm}{2} = 27,5 cm^2$$

A Total = A Lateral + 2 . A Base = 200 cm2 + 2 . 27,5 cm^2 = 78 cm^2

Actividades propostas

S2. Clasifique os seguintes prismas segundo as súas bases:

S3. Un prisma cuadrangular ten unha altura de 5 cm e a aresta da súa base mide 3 cm. Calcule a súa área total.

S4. As dimensións dun ortoedro son 6 cm, 11 cm e 10 cm. Calcule a súa área.

S5. Calcule a área dun cubo que ten unha aresta de 10 cm de lonxitude.

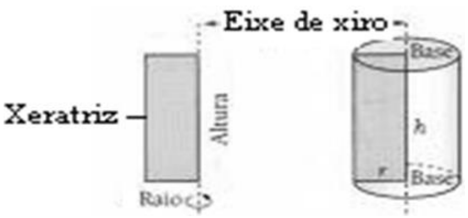
Corpos de revolución

Cando xiramos unha figura plana arredor dun eixe obtemos un corpo de revolucion. Os tres corpos de revolucion mais importantes, e que imos estudar, son o cilindro, o cono e a esfera.

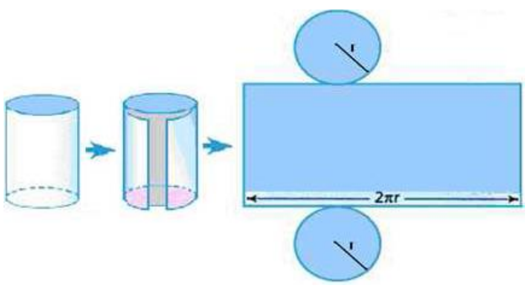
Cilindro

E un corpo xeometrico xerado a partir dun rectangulo que xira arredor dun dos seus lados

A altura dun cilindro é a lonxitude do eixe de xiro.
Xeratriz do cilindro corresponde á lonxitude do lado oposto ao eixe, é dicir, coincide coa altura.



A partir do desenvolvemento do cilindro podese calcular con claridade a sua area:



Área total = Área lateral + 2 . Área da base

Área lateral: AL e a area dun rectangulo en que a base e a lonxitude da circunferencia da base, 2 π r, e a altura, h, e a altura do cilindro.

$$AL = 2\pi r.h$$

Area da base: AB, cada base, como e un circulo ,tera unha area de: $AB = \pi r^2$

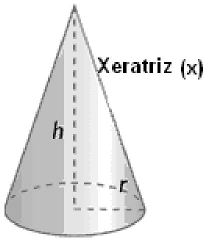
Area total = Area lateral + 2. Area da bases

$$AT = AL + 2.AB = 2\pi r.h + 2.\pi r^2$$

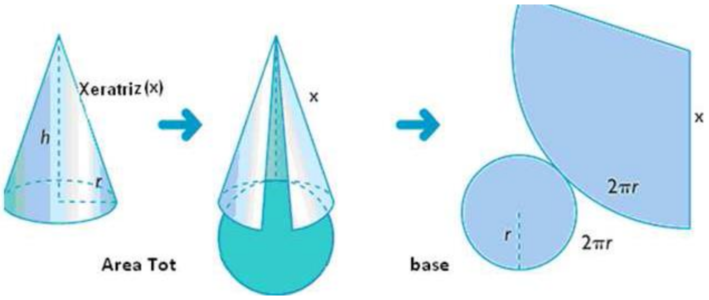
Conos

Son corpos xeometricos xerados a partir dun triangulo rectangulo que xira arredor dun dos seus catetos.

- A altura dun cono (h) é a lonxitude do eixe de xiro.
- Xeratriz do cono é a lonxitude da hipotenusa do triángulo.



A partir do desenvolvemento dun cono podese calcular con claridade a sua area:



Área total = Área lateral + Área da base

- **Área lateral**: AL e a area dun sector circular con lonxitude 2 π r e raio x.

$A_L = A_{SECTOR\ CIRCULAR} = L_{ARCO}$.raio do sector/2=2 p r .x/2== π r.x

- **Área da base**: AB corresponde a area dun circulo: $AB = \pi r^2$

Daquela, a area total dun cono e:

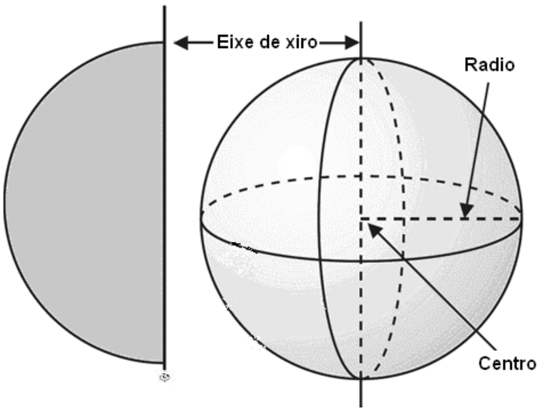
Area total = Area lateral + Area da base

$$\mathbf{ATotal = Al + A\,B = \pi\,.\,r\,.\,x + \pi\,r^2}$$

Esfera

As esferas son corpos de revolucion que se xeran ao facer xirar un semicirculo arredor do seu diámetro

- eixe da esfera é o diámetro sobre o que xira o semicírculo.
- centro corresponde o centro do semicírculo.
- raio é o raio do semicírculo



Área da esfera. A area dunha esfera de raio r e:

$$A = 4. \pi . r^2$$

Actividade resolta

Calcule a área lateral e total dun cilindro que ten de raio da base 3 m e de altura 5 cm.
Calcule a superficie dunha esfera de 8 cm de diámetro

Solución

- Cilindro:

A Lateral = $2 \pi r .h = 2. 3,14. 3m. 5m = 94,2 =cm^2$

A Base = $\pi r^2 = 3,14 . 9 cm2 = 56,5 cm^2$

A Total = $150,7 cm^2$

- Esfera:

$A = 4. \pi . r2 = 4. \pi . (4 cm)^2 = 200,96 cm^2$

Actividades propostas

S10. Calcule a superficie total dun tronco de madeira cilíndrico recto, de 3 cm de altura e diámetro da base 30 cm.

S12. Determine a área total dun cono de 5 cm de raio e 20 de xeratriz.

S13. Calcule a superficie esférica dun balón que ten 20 cm de diámetro

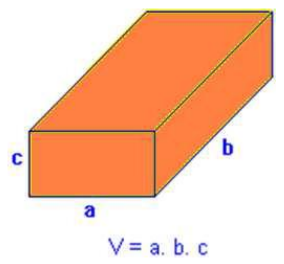
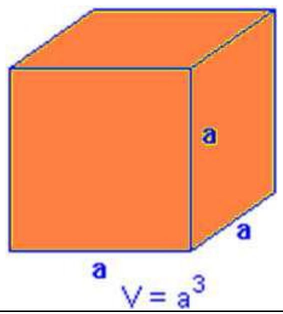
Volumes de corpos xeométricos

O volume dun corpo e a cantidade de espazo que ocupa. Para sabermos o volume dun corpo solido compre conecermos as suas tres dimensions.

Volume dun ortoedro

Calculase multiplicando as suas tres dimensions ou arestas, a, b, c. Daquela o volume e:
Vortoedro= a. b . c

Un cubo e un ortoedro coas tres dimensions iguais; xa que logo, o volume dun cubo de aresta a e igual ao valor da sua aresta elevado a tres.
Vcubo = a^3

	
Ortoedro de dimensións a, b, c	Cubo de aresta a

Volume de prismas e cilindros

- O volume dun prisma cunha altura h e area da base AB , e:

  Vprisma= AB . h

- volume dun cilindro de raio r e altura h, e:

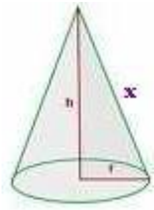
  Vcilindro= AB . h = $\pi r^2 .h$

Volume de pirámides, conos e esferas

- volume dunha piramide con altura h e area da base A e:

$volume_{pirámide}$=Área base.Altura/3

- volume dun cono de raio r e altura h e:



Volume cono= πr^2.altura/3

- volume dunha esfera de raio r e:

Volume esfera=4/3 πr^3

Actividades resoltas

Calcule o volume un ortoedro de dimensións, 25 cm, 8 cm e 5 cm. Calcule o volume dun cubo cunha aresta de 3 cm.

Solución

- Vortoedro = a . b . c = 25 cm . 8 cm . 5 cm = 1000 cm^3

- Vcubo = a^3 = $(3cm)^3$ = 27 cm^3

Cal é o volume dunha pirámide cuadrangular de 5 cm de lado na base e dunha altura de 9 cm?

Solución

- $Volume_{pirámide}$=Área base.Altura/3=$(5cm)^2$.9cm/3=75cm^3