MATEMÁTICAS 4º ACADÉMICAS (26/03/2020)

Ola! como estades? Espero que estedes ben e que teñades algún tempo para traballar nos boletíns que vos mandei.

Como sabedes, íamos bastante atrasados. Así que propóñovos que empecemos o tema seguinte: GEOMETRÍA ANALÍTICA. É moi fácil!! Mándovos uns resumos de teoría e a ver si despois de ler con atención (algo máis de media hora..), sodes capaces de facer os exercicios que seguen.

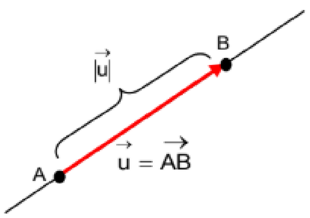
I. DEFINICIONES

Magnitudes

- **Vectoriales:** Un **vector** es un segmento orientado que, para ser definido, precisa de los siguientes tres elementos:
  - **Módulo:** Indica la intensidad, y viene dado por la longitud de la flecha que representa al vector.
  - **Dirección:** Viene dada por la recta sobre la que está la flecha que representa al vector.
  - **Sentido:** Es el que apunta la flecha que representa al vector (Para una misma dirección, hay dos posibilidades).

  Ejemplos: La velocidad, la fuerza, la aceleración, etc.
- **Escalares:** Basta un número –un escalar- para ser definidas (Por ejemplo, la temperatura, masa, tiempo, densidad, energía, etc.).

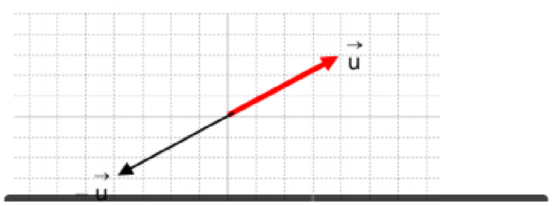
Notación:



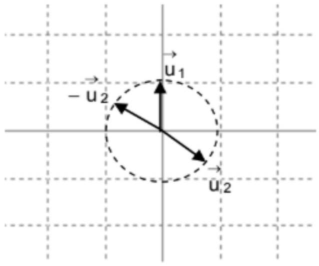
Como vemos en el dibujo al margen, un vector[1] se representa median una flecha. En concreto, se trata de un vector que va del punto A al punto B, p lo que se representa como $\vec{AB}$. En otros casos, se puede nombrar simplemen como $\vec{u}$. Nótese que el vector tiene una dirección, es decir, está construic sobre una recta. Por otra parte, **su módulo**, que, como hemos dicho arriba, e la longitud de la flecha, **se representa como** $|\vec{u}|$ **o** $|\vec{AB}|$, es decir, con el nomb del vector entre | |. A veces, se indica con dobles barras, esto es, $\|\vec{AB}\|$, y se suele denominar norma d vector. Nosotros utilizaremos indistintamente ambas notaciones. Finalmente, el sentido del vector es el qu apunta su flecha. Por lo tanto, se define el vector nulo como $\vec{AA} = \vec{0}$.

Vector nulo: «**Se designa como $\vec{0}$, y es aquel que tiene módulo cero**». Se representa por un punto (p lo cual, no tiene mucho sentido considerar su dirección y sentido…).

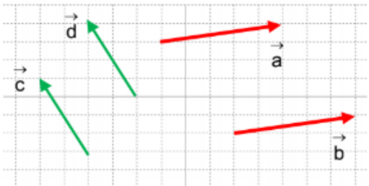
Vector opuesto: Dado un vector $\vec{u}$, se define su opuesto, que **se designa como** $-\vec{u}$, como aquel que **tier el mismo módulo, la misma dirección, pero distinto sentido**:



Vector unitario: «**Es todo vector que tenga módulo 1**». Por ejemplo, los siguientes vectores son unitarios:



Vector iguales o equipolentes: **«Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son equipolentes si tienen el mismo módulo, dirección y sentido»**. Se indica como $\vec{u} \sim \vec{v}$, aunque, en general, también se suele poner simplemente $\vec{u} = \vec{v}$.



En la figura, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son equipolentes, y lo mismo podemos decir de $\vec{c}$ y $\vec{d}$.

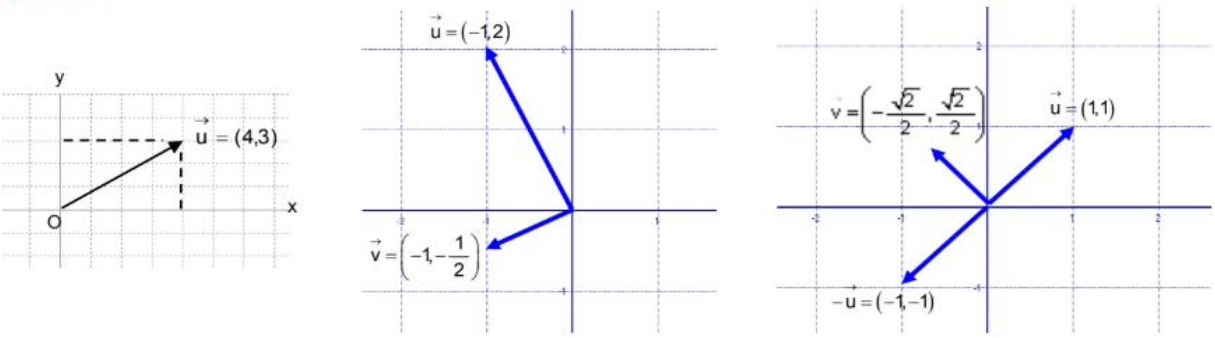
Puesto que, si trasladamos un vector de forma equipolente, es decir, sin variar su módulo, dirección y sentido, sigue siendo el mismo vector, se dice que los **vectores** son **libres** en el plano. Por lo tanto, se define:

$\mathbb{V}^2$ = Conjunto de todos los vectores libres del plano

Acabamos de hablar de vectores libres. Ahora bien, si los referimos a un punto, entonces serán vectores fijos. El punto que habitualmente se utiliza es el origen:

Coordenadas de un vector referido al origen: «**Coinciden con las coordenadas del punto extremo del vector**»:

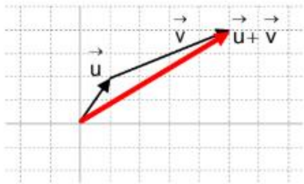
Ejemplo 1:

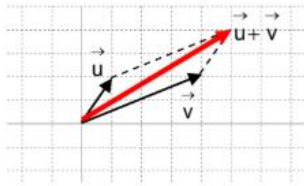


II. OPERACIONES

II.I SUMA DE VECTORES $(\vec{u}+\vec{v})$

Gráficamente: Hay dos formas posibles de sumar vectores; ambas, obviamente, conducen al mismo vector suma. Consideremos primero la figura izquierda:





REGLA DEL PARALELOGRAMO

Como vemos, en la 1ª forma (que se usa más en Matemáticas) se engancha el segundo vector al extremo del primero, y el vector suma de ambos será aquel que tiene su origen en el del primero y su extremo en el del último. En el caso de la regla del paralelogramo (muy utilizada en Física, para sumar fuerzas), los dos vectores se ponen con origen común, y se traza a continuación el paralelogramo que definen; el vector suma será entonces la diagonal de dicho paralelogramo que arranca del origen de ambos vectores. **Puede comprobarse analíticamente que ambas formas funcionan.**

Analíticamente:
$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_x,u_y)\\ \vec{v}=(v_x,v_y)\end{array}\right\} \quad \vec{u}+\vec{v}=(u_x+v_x,u_y+v_y)$$

(Lo comprobaremos gráficamente mediante el próximo ejercicio)

Propiedades:

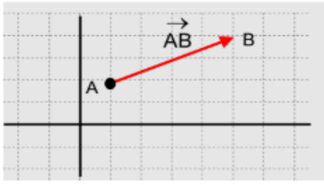
CONMUTATIVA: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

ASOCIATIVA: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

ELEMENTO NEUTRO: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

ELEMENTO OPUESTO: $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

Coordenadas del vector que une dos puntos: Se obtienen restando las componentes del punto extremo menos el punto origen del vector:



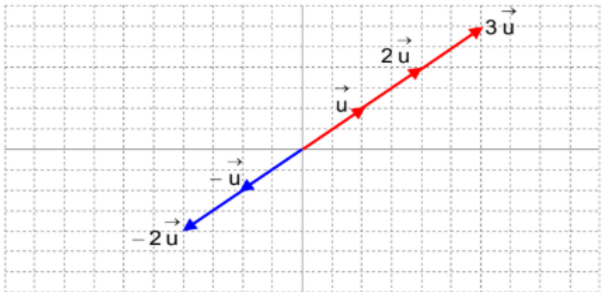
$$\boxed{\overrightarrow{AB} = B - A} \qquad (1)$$

La demostración se verá el próximo curso, pero puede comprobarse gráficamente su validez con el ejemplo de la figura, o con otros ejercicios:

Ejercicios final tema: 6 y 7

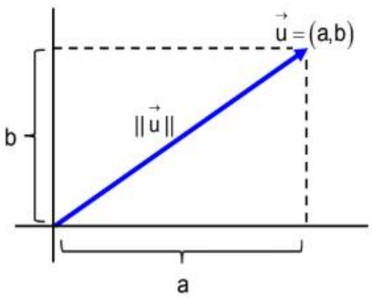
II.III PRODUCTO POR UN ESCALAR $(\lambda \vec{u})$

Gráficamente: Veámoslo con un ejemplo. Si queremos hacer $3\vec{u}$, lo que haremos es $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$, es decir, aplicamos la suma de vectores. Si lo que queremos construir es $-2\vec{u}$, haremos $-2\vec{u} = (-\vec{u}) + (-\vec{u})$:



En resumen: Se define el vector $k\vec{u}$ como aquel que tiene MÓDULO: $\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

III. MÓDULO DE UN VECTOR

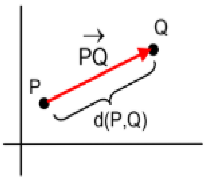


Considerar el vector $\vec{u}$ de la figura adjunta. Como acabamos de ver en el apartado anterior, las coordenadas de dicho vector en la base canónica serán las del extremo del vector, es decir, $\vec{u} = (a,b)$. Vamos a hallar aplicando el teorema de Pitágoras el módulo $\|\vec{u}\|$ de dicho vector, es decir, la longitud del vector:

$$\|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (2)$$

es decir, **«el módulo de un vector es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes»**.

Consecuencia: Distancia entre dos puntos:



Supongamos dos puntos, $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$, cuya distancia de separación, d(P,Q), queremos conocer. Es obvio que dicha distancia (ver dibujo) coincidirá con el $\|\overrightarrow{PQ}\|$:

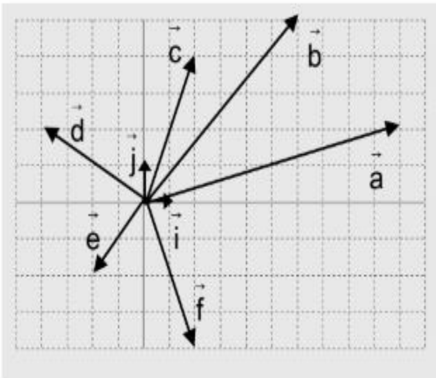
$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{PQ}\| = d(P,Q)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (3)$$

1. **a)** Representar en el mismo plano los vectores:

$\vec{a} = (3,1)$ $\vec{b} = (-1,5)$ $\vec{c} = (2,-4)$ $\vec{d} = (-3,-1)$ $\vec{i} = (1,0)$ $\vec{j} = (0,1)$ $\vec{e} = (3,0)$ $\vec{f} = (0,-5)$

b) Escribir las coordenadas de los vectores fijos de la figura adjunta (puede hacerse en este cuaderno):



2. **a)** Dibujar dos vectores de origen común, igual módulo, y que formen un ángulo de 135º. Expresar sus componentes.

b) Dibujar dos vectores que tengan el origen común y los sentidos opuestos. Expresarlos analíticamente. ¿Qué ángulo forman dichos vectores?

3. Sumar analíticamente los siguientes vectores y comprobar gráficamente

a) $\vec{u} = (0,2)$ y $\vec{v} = (4,1)$.

b) $\vec{u} = (4,1)$ y $\vec{v} = (0,2)$.

c) $\vec{x} = (4,2)$ y $\vec{y} = (-1,2)$.

d) $\vec{u} = (-4,-1)$ y $\vec{v} = (-1,3)$.

e) $\vec{u} = (4,2)$ y $\vec{u} = (4,2)$.

4. Calcular analíticamente y comprobar gráficamente

a) $\vec{u} = (0,2)$ y $\vec{v} = (4,1)$.

b) $\vec{u} = (4,1)$ y $\vec{v} = (0,2)$.

c) $\vec{u} = (4,2)$ y $\vec{v} = (-1,2)$.

d) $\vec{u} = (-4,-1)$ y $\vec{v} = (-1,3)$.

e) $\vec{u} = (4,2)$ y $\vec{u} = (4,2)$.

6. **a)** Calcular las coordenadas del vector cuyo origen es A(1,2) y cuyo extremo es B(5,7), y comprobarlo gráficamente.

b) Ídem con C(−1,2) y D(4,4).

c) Ídem con E(−3,0) y F(5,−3).

d) Ídem con G(2,−1) y H(−3,−3).

e) Ídem con I(3,2) y J(3,−5).

f) Ídem con 0(0,0) y K(4,5).

7. Dibujar el triángulo de vértices A(1,1), B(3,3) y C(6,0), y calcular las componentes de sus tres lados, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$.

8. **a)** Dado $\vec{a} = (1,2)$, hallar analíticamente $2\vec{a}$, $4\vec{a}$, $-\vec{a}$ y $-3\vec{a}$, y comprobar gráficamente.

b) Ídem con $\vec{v} = (-1,2)$.

c) Ídem con $\vec{a} = (2,-3)$.

d) Ídem con $\vec{x} = (-1,-3)$.

9. **a)** Comprobar, analítica y gráficamente, si los vectores $\vec{a}=(1,2)$ y $\vec{b}=(3,6)$ son paralelos.

b) Ídem con $\vec{u}=(4,2)$ y $\vec{v}=(-1,2)$.

c) Ídem con $\vec{a}=(2,-3)$ y $\vec{b}=(-4,6)$.

d) Ídem con $\vec{x}=(1,3)$ y $\vec{y}=(-1,-3)$.

10. Considerar el vector $\vec{a}=(1,2)$. Obtener dos vectores paralelos y con el mismo sentido, y otro paralelo pero de sentido opuesto. Comprobar todo gráficamente.

11. Dados los vectores $\vec{a}=(x,8)$ y $\vec{b}=(2,x)$, hallar **x** para que sean paralelos. ¿Cuántas soluciones se obtienen? Comprobar todo gráficamente. *(Soluc: x=±4)*

12. **a)** Determinar, analíticamente, si los puntos $A(3,1)$, $B(5,2)$ y $C(1,0)$ están alineados.

b) Ídem para $A(1,1)$, $B(3,4)$ y $C(4,6)$ (Nota: un dibujo puede ser útil)

c) Hallar **k** para que los puntos $A(1,7)$, $B(-3,4)$ y $C(k,5)$ estén alineados. *(Soluc: SÍ; NO; k=-5/3)*