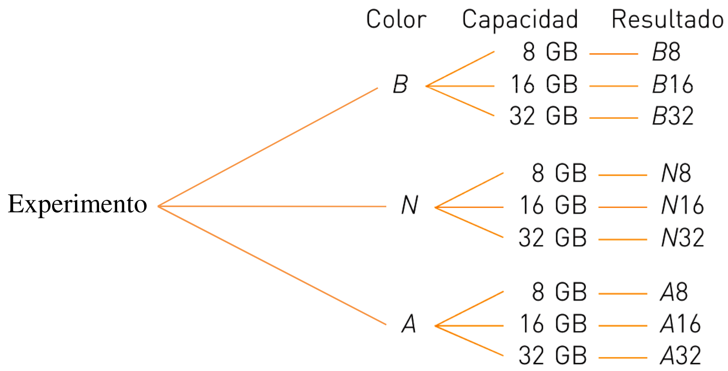
COMBINATORIA

4º E.S.O.

DIAGRAMA DE ÁRBOL

Un diagrama de árbol es una herramienta para representar todos los posibles resultados de un suceso o experimento compuesto por otros más sencillos.

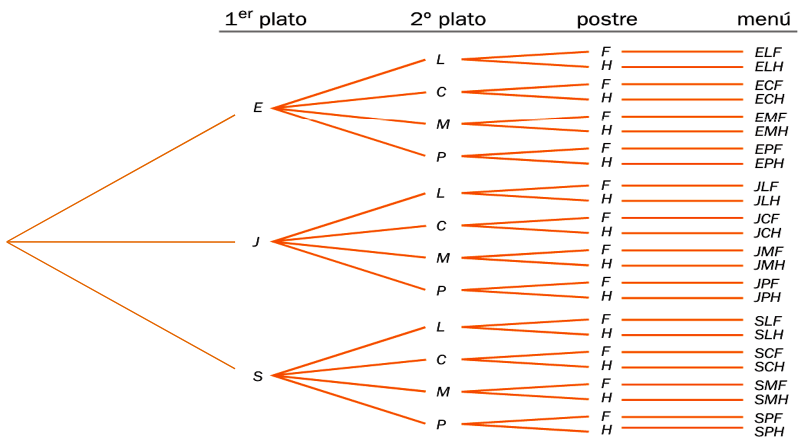
Ejemplo: Un MP4 se fabrica en tres colores: Blanco, negro y azul, y con tres tipos de capacidad: 8, 16 y 32 gibabytes.



$3 \cdot 3 = 9$
Tipos de MP4

DIAGRAMA DE ÁRBOL

Ejemplo: En un restaurante ofrecen un menú del día compuesto por tres primeros platos: ensalada, judías verdes y sopa castellana; cuatro segundos platos: lenguado a la plancha, cordero, merluza y pechuga de pollo; y dos postres: flan y helado. ¿Cuántos menús diferentes pueden hacerse?



$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$
tipos de menú.

PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN

Las **permutaciones sin repetición** u **ordinarias** de n elementos son los distintos grupos que se pueden formar con los n elementos de manera que:

- En cada grupo estén los n elementos.
- Un grupo se diferencie de otro únicamente en el orden de colocación de sus elementos.

El número de permutaciones sin repetición de n elementos se representa por P_n y es igual a:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Ejemplo: ¿De cuantas maneras distintas pueden sentarse tres personas en los tres asientos traseros de un coche?

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ maneras}$$

PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN

El número de permutaciones sin repetición de n elementos se representa por P_n y es igual a:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1 = n!$$

Ejemplo: ¿De cuantas maneras pueden colocarse nueve amigos en una fila para entrar en el cine?

$$P_9 = 9! = 9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 362880 \text{ maneras}$$

PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN

El número de permutaciones sin repetición de n elementos se representa por P_n y es igual a:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1 = n!$$

Ejemplo: En una carrera de 1500 metros participan 8 atletas. ¿De cuantas maneras podrán entrar en la meta suponiendo que no sea posible el empate?

$$P_8 = 8! = 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 40320 \text{ formas}$$

VARIACIONES SIN REPETICIÓN

Las **variaciones sin repetición** u **ordinarias** de m elementos tomados de n en n (con $n \leq m$) son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos de manera que:

- En cada grupo haya n elementos **diferentes**.
- Dos grupos sean distintos si difieren en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.

El número de variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n se representa por $V_{m,n}$ y es igual a:

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$$

Ejemplo: ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 sin que se repita ninguna cifra?

$$V_{7,4} = 7\cdot6\cdot5\cdot4 = 840$$

VARIACIONES SIN REPETICIÓN

El número de variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n se representa por $V_{m,n}$ y es igual a:

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$$

Ejemplo: Un ayuntamiento va a sortear 6 puestos ambulantes para las fiestas locales entre 10 solicitantes. Teniendo en cuenta que el lugar asignado influye mucho en las ventas, ¿de cuántas formas se podrá realizar la adjudicación de los 6 puestos?

$$V_{10,6} = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5 = 151200 \text{ formas}$$

VARIACIONES SIN REPETICIÓN

El número de variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n se representa por $V_{m,n}$ y es igual a:

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$$

Ejemplo: Un centro escolar organiza un concurso de resolución de problemas para 150 alumnos de 4º de ESO. Se entregarán lotes de libros de diferentes cuantías a los 4 alumnos mejor clasificados. ¿De cuántas formas se podrán otorgar los premios?

$$V_{150,4} = 150\cdot 149\cdot 148\cdot 147 = 486\ 246\ 600 \text{ formas}$$

VARIACIONES CON REPETICIÓN

Las **variaciones con repetición** de m elementos tomados de n en n son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos de manera que:

- En cada grupo haya n elementos, **repetidos o no**.
- Dos grupos sean distintos si difieren en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.

El número de variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n se representa por $VR_{m,n}$ y es igual a:

$$VR_{m,n} = m^n$$

Ejemplo: Se lanzan dos monedas de un euro, ¿cuántos resultados distintos se pueden obtener? ¿Y si se lanzan cinco monedas?

$$VR_{2,2} = 2^2 = 4 \qquad VR_{2,5} = 2^5 = 32$$

VARIACIONES CON REPETICIÓN

El número de variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n se representa por $VR_{m,n}$ y es igual a:

$$VR_{m,n} = m^n$$

Ejemplo: ¿Cuántas quinielas hay que rellenar para acertar los 15 resultados de forma segura?

$$VR_{3,15} = 3^{15} = 14\ 348\ 907 \text{ quinielas}$$

VARIACIONES CON REPETICIÓN

El número de variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n se representa por $VR_{m,n}$ y es igual a:

$$VR_{m,n} = m^n$$

Ejemplo: ¿Cuántos números distintos de 4 cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?

Números de 4 cifras: $VR_{10,4} = 10^4 = 10000$

Empiezan por 0: $VR_{10,3} = 10^3 = 1000$

Total: 10000 – 1000 = 9000 números

COMBINACIONES SIN REPETICIÓN

Las **combinaciones sin repetición** u **ordinarias** de m elementos tomados de n en n (con $n \leq m$) son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos de manera que:

- En cada grupo estén los n elementos distintos.
- Dos grupos sean distintos si difieren en algún elemento.

El número de combinaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n se representa por $C_{m,n}$ y es igual a:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Ejemplo: Juan ha puesto 10 chinchetas sobre un corcho y quiere colocar gomas entre cada dos chinchetas. ¿Cuántas gomas necesita?

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ gomas}$$

COMBINACIONES SIN REPETICIÓN

El número de combinaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n se representa por $C_{m,n}$ y es igual a:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Ejemplo: ¿Cuántas loterías primitivas hay que rellenar para estar seguro de acertar los 6 números entre los 49 posibles?

$$C_{49,6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13\,983\,816 \text{ primitivas}$$

COMBINACIONES SIN REPETICIÓN

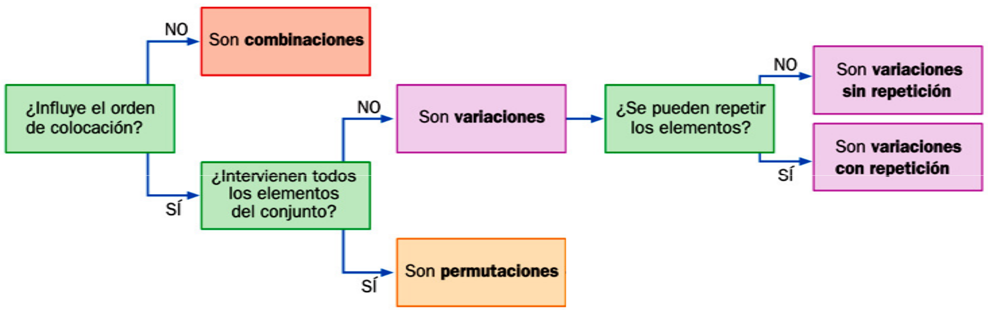
El número de combinaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n se representa por $C_{m,n}$ y es igual a:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Ejemplo: En una patrulla de 12 scouts se desea elegir un comité formado por 3 de ellos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden designar?

$$C_{12,3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220 \text{ comités}$$

COMBINATORIA. RESUMEN.



NÚMEROS COMBINATORIOS

El número $C_{m,n}$ se llama también **número combinatorio.** Se representa por $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ y se lee "*m* sobre *n*".

$$C_{m,n} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Ejemplo La expresión como número combinatorio de las combinaciones de 10 elementos tomados de 3 en 3 es:

$$C_{10,3} = \frac{V_{10,3}}{P_3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3!\;7!} = \frac{10!}{3!\;(10-3)!} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

NÚMEROS COMBINATORIOS

Triángulo de Pascal o de Tartaglia.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow 1 \quad 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow 1 \quad 2 \quad 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \longrightarrow 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

NÚMEROS COMBINATORIOS

Triángulo de Pascal o de Tartaglia.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
...

NÚMEROS COMBINATORIOS

Triángulo de Pascal o de Tartaglia. Propiedades.

1. Todas las filas empiezan y acaban en 1: $\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} = 1.$

2. Todas las filas son simétricas: $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m-n \end{pmatrix}.$

3. Cada número se obtiene sumando los dos que tiene encima, excepto los extremos: $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 \\ n+1 \end{pmatrix}.$

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

NÚMEROS COMBINATORIOS

Ejemplo: Calcula: a) $\binom{35}{0}$ b) $\binom{35}{35}$ c) $\binom{35}{31}$ d) $\binom{35}{4}$ e) $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}$

			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

a) $\binom{35}{0}=1$

b) $\binom{35}{35}=1$

c) $\binom{35}{31}=\dfrac{35!}{31!\,4!}=\dfrac{35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31!}{31!\,4!}=52\,360$

d) $\binom{35}{4}=\binom{35}{35-4}=\binom{35}{31}=52\,360$

e) $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}=\binom{6}{3}=\dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\,3!}=20$

BINOMIO DE NEWTON

$(a+b)^1=a+b$ — 1 1

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ — 1 2 1

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ — 1 3 3 1

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ — 1 4 6 4 1

El desarrollo de la potencia $(a+b)^n$ se calcula según la siguiente expresión, conocida como **binomio de Newton**.

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n}b^n$$

Al hacer la potencia de una diferencia se alternan los signos:

$$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}b^n$$

BINOMIO DE NEWTON

El desarrollo de la potencia $(a+b)^n$ se calcula según la siguiente expresión, conocida como **binomio de Newton**.

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n}b^n$$

Al hacer la potencia de una diferencia se alternan los signos:

$$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}b^n$$

$$(2x+3y)^4=\binom{4}{0}(2x)^4+\binom{4}{1}(2x)^3(3y)+\binom{4}{2}(2x)^2(3y)^2+\binom{4}{3}(2x)(3y)^3+\binom{4}{4}(3y)^4=$$
$$=16x^4+96x^3y+216x^2y^2+216xy^3+81y^4$$

BINOMIO DE NEWTON

El desarrollo de la potencia $(a+b)^n$ se calcula según la siguiente expresión, conocida como **binomio de Newton**.

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n}b^n$$

Al hacer la potencia de una diferencia se alternan los signos:

$$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}b^n$$

$$(3a^2-2b^3)^3=\binom{3}{0}(3a^2)^3-\binom{3}{1}(3a^2)^2(2b^3)+\binom{3}{2}(3a^2)(2b^3)^2-\binom{3}{3}(2b^3)^3=$$
$$=27a^6-54a^4b^3+36a^2b^6-8b^9$$