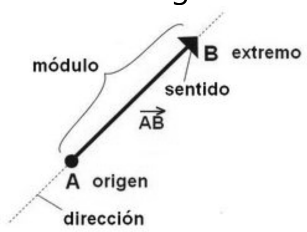
1.- VECTORES DEL PLANO

Vectores fijos

Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado con origen en el punto A y extremo en el punto B

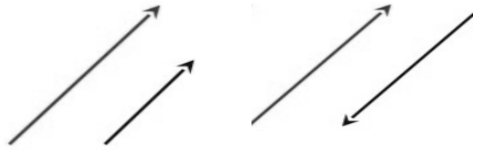


Todo vector fijo $\overrightarrow{AB}$ tiene tres elementos:

Módulo: Es la longitud del segmento $\overline{AB}$. El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.
Los vectores de módulo 1 se llaman unitarios.

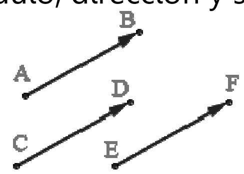
Sentido: Es el que va del punto A al punto B. Viene determinado por la punta de flecha. En una dirección siempre hay dos sentidos: el que va de A a B y el que va de B a A.

Dirección: Es la que determina la recta que pasa por A y B.
Cuando dos vectores tienen la misma dirección decimos que son paralelos.
Dos vectores paralelos pueden tener el mismo sentido o distinto sentido:



Vectores equipolentes

Dos vectores son equipolentes si tienen el mismo módulo, dirección y sentido

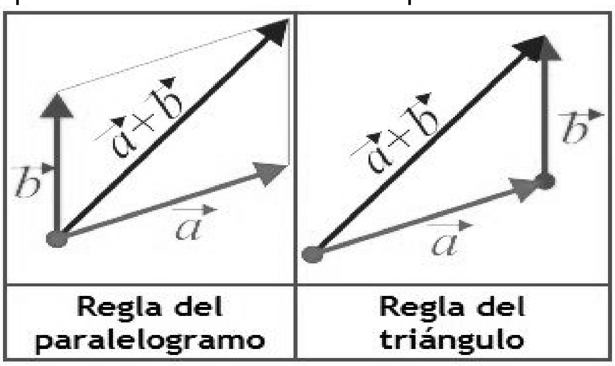
Por ejemplo, los vectores $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$  son equipolentes

Vectores libres

Un vector libre es un conjunto de vectores fijos equipolentes entre sí. Cada uno de estos vectores se llama representante del vector libre.
Para representar un vector libre se toma cualquiera de sus representantes.
Los vectores libres se suelen expresar con letras minúsculas
De ahora en adelante cuando hablemos de vector sin especificar el origen y el extremo nos estamos refiriendo a un vector libre.
El conjunto de todos los vectores del plano se suele representar por V^2.

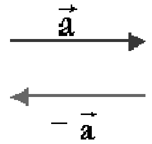
Suma gráfica de vectores

Gráficamente para sumar dos vectores se puede hacer de dos formas:



Vectores opuestos

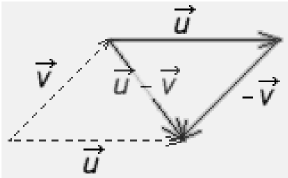
Dos vectores son opuestos si son paralelos con el mismo módulo pero sentidos opuestos

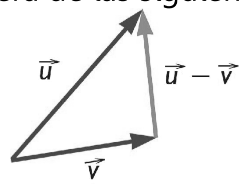
Por ejemplo, los vectores $\vec{a}$ y $-\vec{a}$  son opuestos

Resta gráfica de vectores

Para restar dos vectores se le suma al primero el opuesto del segundo: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

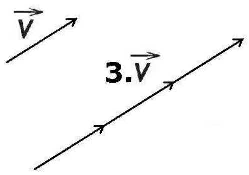
Gráficamente se puede hacer de cualquiera de las siguientes formas:

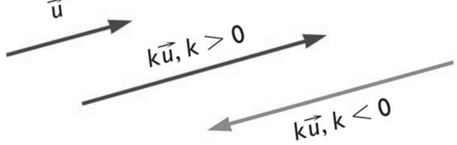


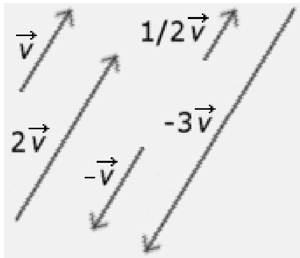


Producto de un número real por un vector

Dado un vector $\vec{v}$ y un escalar $k \in R$, el vector $k\vec{v}$ es un vector paralelo a $\vec{v}$ con el mismo sentido que $\vec{v}$, si $k > 0$ y con sentido opuesto, si $k < 0$ y de módulo $|k|\,|\vec{v}|$







Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos o linealmente dependientes, $\vec{u} \,//\, \vec{v}$, si $\vec{u} = \lambda \vec{v}$

Propiedades de las operaciones con vectores

Si $\alpha, \beta \in R$ y $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores, se cumplen las siguientes propiedades:

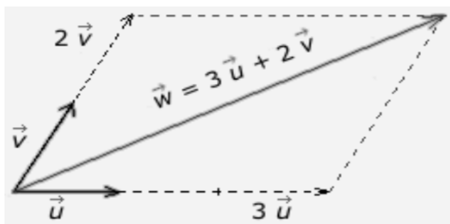
1) $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ 2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ 3) $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$ 4) $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$

5) $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ 6) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ 7) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$ 8) $1.\vec{u} = \vec{u}$ 9) $0.\vec{u} = \vec{0}$

Combinación lineal de vectores

Dados tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, decimos $\vec{w}$ es combinación lineal (c.l.) de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, con $a, b \in R$, siendo a y b números reales no todos nulos

Por ejemplo, el vector $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$ es c.l. de $\vec{u}$ y $\vec{v}$



Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ paralelos son siempre l.d.

Vectores linealmente independientes. Base del plano vectorial

Cuando dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no paralelos se dice que son ***linealmente independientes*** (l.i.) y que forman una base de V^2. En este caso, cualquier otro vector del plano se puede poner como c.l. de ellos.

Componentes de un vector

Si B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base hemos visto en el apartado anterior que cualquier vector $\vec{v}$ se puede expresar como c.l. de los vectores de la base: $\vec{v} = a_1 \vec{u_1} + a_2 \vec{u_2}$

Se puede demostrar que la expresión de $\vec{v}$ como c.l. de los vectores de la base es única.

Los números (a_1, a_2) se llaman las componentes del vector $\vec{v}$ y se escribe $\vec{v} = (a_1, a_2)$.

De esta forma a cada vector le corresponde una pareja de números que son sus componentes.

Por ejemplo, si B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base y nos dan el vector $\vec{v} = 5\vec{u_1} - 3\vec{u_2}$, las componentes de $\vec{v}$ en la base B son (5, – 3).

Cualquier vector $\vec{v}$ tiene dos componentes $\vec{v} = (v_1, v_2)$

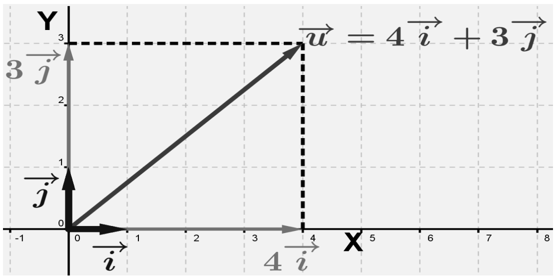
Bases ortogonales y ortonormales

Dos vectores son ortogonales si son perpendiculares y son ortonormales si son ortogonales y unitarios.

Una base ortogonal es la que está formada por dos vectores ortogonales y una base ortonormal es la formada por dos vectores ortonormales.

La base ortonormal del plano se llama base canónica y es $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$

Podemos observar que $\vec{i} = (1, 0)$ $\vec{j} = (0, 1)$



$$\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j} = 4.(1, 0) + 3.(1, 0) = (4, 3)$$

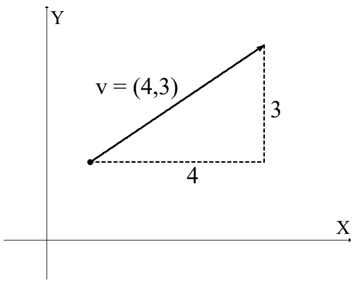
Cuando no se especifique nada sobre las componentes de un vector nos estamos refiriendo a las componentes en la base canónica.

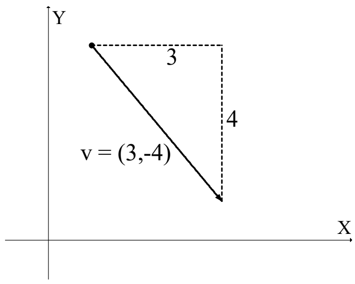
Cuando la base es canónica, las componentes de un vector nos indican el desplazamiento que hay que hacer (en horizontal y en vertical) para ir desde el origen del vector al extremo.

La primera componente (v_1) nos indica el desplazamiento sobre la horizontal (es positiva si el desplazamiento es hacía la derecha y negativa si es hacía la izquierda)

La segunda componente (v_2) nos indica el desplazamiento sobre la vertical (es positiva si el desplazamiento es hacía arriba y negativa si es hacía abajo)

Ejemplos.





En el primer vector, para ir del origen al extremo hay que recorrer 4 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba

En el 2º vector, para ir del origen al extremo hay que recorrer 3 unidades a la derecha y 4 unidades hacia abajo

Vectores dados por sus componentes

Dados dos vectores, $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$. Se cumple:

$\boxed{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)}$ *Ejemplo*: (2, 7) + (3, 4) = (2 + 3 , 7 + 4) = (5, 11)

$\boxed{-\overrightarrow{a} = (-a_1, -a_2)}$ *Ejemplo*: El opuesto de (3, – 5) es (–3, 5)

$\boxed{\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)}$ *Ejemplo*: (3, 8) – (7, 2) = (3 – 7, 8 – 2) = (–4, 6)

$\boxed{\lambda \overrightarrow{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2)}$ *Ejemplos*: 3.(2, 5) = (6, 15) –2.(1, –7) = (–2, 14)

$$\boxed{\overrightarrow{a} \,//\, \overrightarrow{b}} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b} \Leftrightarrow (a_1, a_2) = \lambda(b_1, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \lambda b_1 \\ a_2 = \lambda b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}}$$

Ejercicios resueltos:

1) Si $\overrightarrow{u} = (-1, 3)$, $\overrightarrow{v} = (2, -5)$ $\overrightarrow{w} = (7, -4)$, calcula $6\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}$.

Resolución: $6(-1, 3) - 2(2, -5) + 3(7, -4) = (-6 - 4 + 21,\ 18 + 10 - 12) = (11,\ 16)$

2) Averigua si los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ forman una base. En caso de que formen una base calcula las componentes de $\overrightarrow{w} = (-26, 27)$ en la base $B = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$:

a) $\overrightarrow{u} = (6, -15)$, $\overrightarrow{v} = (-4, 10)$. **Resolución**: $\frac{6}{-4} = \frac{-15}{10} \Rightarrow$ Son paralelos $\Rightarrow \overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ no forman base

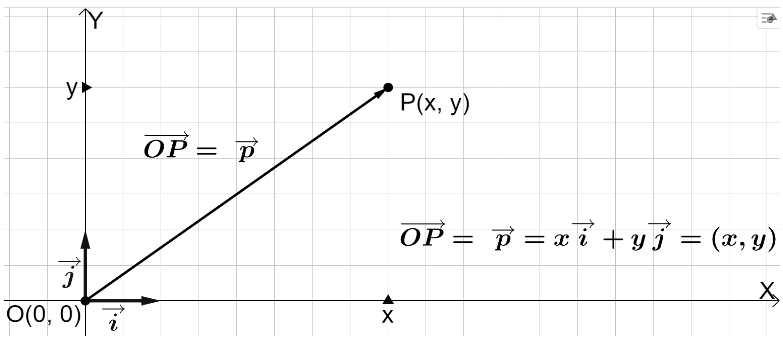
b) $\overrightarrow{u} = (-2, 1)$, $\overrightarrow{v} = (5, -6)$. **Resolución**: $\frac{-2}{5} \neq \frac{1}{-6} \Rightarrow$ No son paralelos $\Rightarrow \overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ forman una base

$$\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} \Rightarrow (-26, 27) = x(-2, 1) + y(5, -6) \Rightarrow (-26, 27) = (-2x + 5y, x - 6y) \Rightarrow \begin{cases} -26 = -2x + 5y \\ 27 = x - 6y \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $x = 3,\ y = -4$. Luego las componentes son $(3, -4)$

Vector de posición de un punto

Se llama vector de posición de un punto P(x, y) al vector $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OP}$, siendo O(0, 0) el origen de coordenadas.

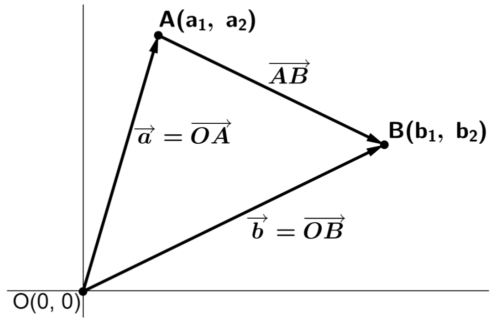


Como puedes observar las componentes del vector de posición de P coinciden con las coordenadas del punto P.

Por ejemplo, el vector de posición del punto A(1, –5) es $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a} = (1, -5)$

Vector determinado por dos puntos

Sean dos puntos del plano $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ y sea $O(0, 0)$ el origen de coordenadas



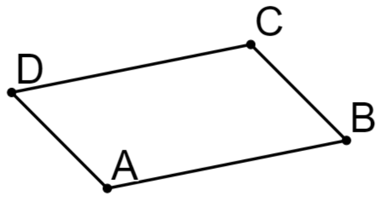
Fíjate en la figura: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = (b_1,\ b_2) - (a_1,\ a_2) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)}$

Luego, para hallar las componentes de $\overrightarrow{AB}$ restamos las coordenadas de B menos las de A

Ejemplo: Si $A(5, -1)$ y $B(-2, 4)$ entonces $\overrightarrow{AB} = (-2-5,\ 4-(-1)) = (-7,\ 5)$

Ejercicio resuelto

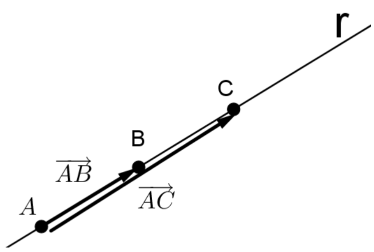
Los puntos A(1, 0), B(6, 1) y C(4, 3) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Determina las coordenadas del cuarto vértice.



Resolución: Sea D(x, y) Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (5, 1) = (4-x, 3-y) \Rightarrow \begin{matrix} 5 = 4 - x \rightarrow x = -1 \\ 1 = 3 - y \rightarrow y = 2 \end{matrix}$. Luego, D(–1, 2)

Puntos alineados

Tres o más puntos del plano están alineados si están contenidos en la misma recta.



$\boxed{\text{A, B y C están alineados} \leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}}$

Ejemplo:

Averigua si los puntos A, B y C están alineados:

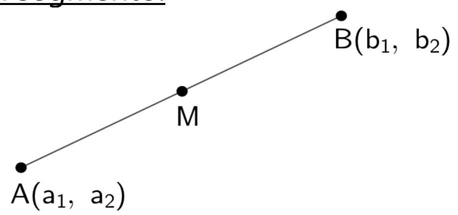
a) A(2, –1), B(6, 1), C(8, 2).

Resolución: $\overrightarrow{AB} = (4, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (6, 3)$. Como $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Rightarrow$ Los puntos están alineados

b) A(–3, –3), B(6, 5), C(8, 7)

Resolución: $\overrightarrow{AB} = (9, 8)$, $\overrightarrow{AC} = (11, 10)$. Como $\frac{11}{9} \neq \frac{10}{8} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC} \Rightarrow$ Los puntos NO están alineados

Punto medio de un segmento.



Sea AB un segmento del plano y M su punto medio.

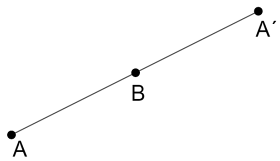
Usando que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ se obtiene $\boxed{M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)}$

Por tanto, las coordenadas del punto medio M son la media aritmética de las coordenadas de A y B

Ejemplo: Si A(5, –1) y B(–2, 3) entonces el punto medio es $M\left(\frac{5+(-2)}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

Simétrico de un punto respecto de otro

El punto simétrico de un punto A respecto de un punto B es el punto A´ que cumple $\overrightarrow{AA'} = 2\,\overrightarrow{AB}$.
Es decir, B es el punto medio del segmento AA´.



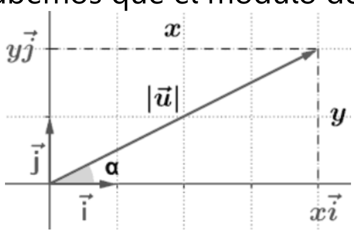
Usando que $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB}$ se obtienen las coordenadas de A´

Ejemplo: Si A(5, –1) y B(–2, 3) entonces el punto simétrico de A respecto de B sería A´(x, y)

Como $\overrightarrow{AA'} = 2\,\overrightarrow{AB} \Rightarrow (x-5,\ y+1) = 2(-7,\ 4) \Rightarrow \begin{cases} x-5=-14 \rightarrow x=-9 \\ y+1=8 \rightarrow y=7 \end{cases} \Rightarrow A'(-9,\ 7)$

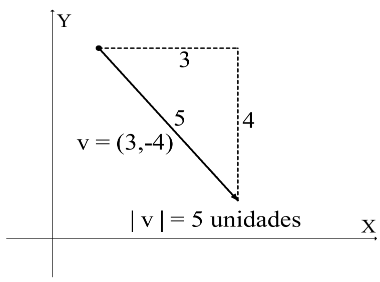
Módulo de un vector a partir de sus componentes

Ya sabemos que el módulo de un vector nos indica lo que mide dicho vector.



$$Si\ \vec{u} = (x,\ y) \xrightarrow{\text{Usando el teorema de Pitágoras}} \boxed{|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2}}$$

Ejemplo: El módulo del vector $\vec{u} = (3,-4)$, $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ que significa que el vector mide 5 unidades.

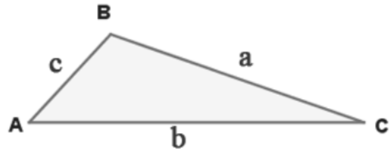


Distancia entre dos puntos

Se define la distancia entre dos puntos A y B, y se representa por d(A, B), como la longitud del segmento $\overline{AB}$. Por tanto, d(A, B) = $|\overrightarrow{AB}|$

Ejemplo: Halla la distancia entre los puntos (2, –3) y (–4, 7): d $= |(-6,\ 10)| = \sqrt{(-6)^2+10^2} = \sqrt{136}$ u

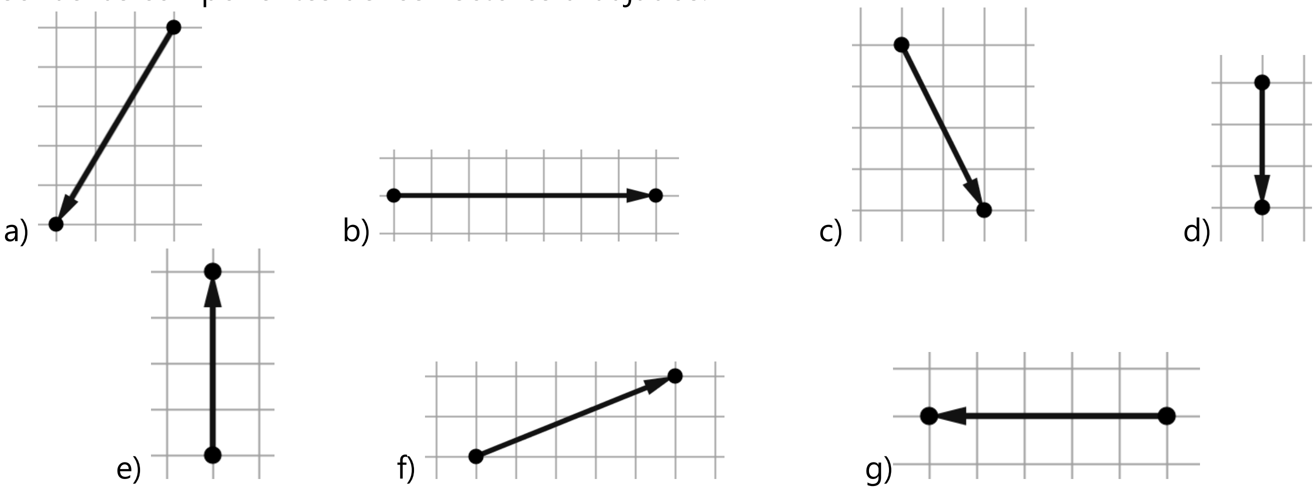
Aplicación: Dado un triángulo de vértices A, B y C:



Si calculamos la longitud de sus lados, $a = |\overrightarrow{BC}|$, $b = |\overrightarrow{AC}|$ y $c = |\overrightarrow{AB}|$ podemos determinar su perímetro, P = a + b + c

ACTIVIDADES

1.- Escribe las componentes de los vectores dibujados:



2.- Halla los valores de m para que sean paralelos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en los siguientes casos:
a) $\vec{u} = (3 - m,\ 2m - 3)$ y $\vec{v} = (m - 7,\ 4 - m)$ b) $\vec{u} = (-7m - 5,\ m + 1)$ y $\vec{v} = (5m - 2,\ 1 - m)$

3.- Dados los puntos A(2, 7) y B(6, 4). Halla las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ y haz la representación gráfica

4.- Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 1)$ y $\vec{v} = (5, -3)$. Comprueba que forman una base y halla las componentes del vector $\vec{w}$ en dicha base en los siguientes casos:
a) $\vec{w} = (4, -3)$ b) $\vec{w} = (26, -15)$ c) $\vec{w} = (-17, 10)$

5.- Averigua el valor de x para que P(2, –3), Q(2x – 1, x + 2), R(–6, –1) y S(–5, –7) sean los vértices consecutivos de un paralelogramo.

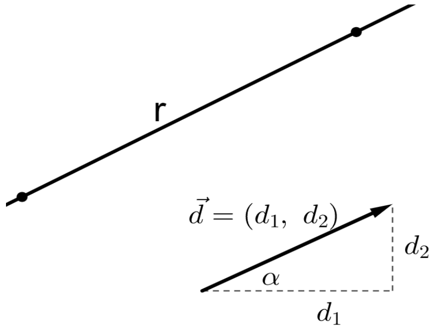
6.- Calcula el perímetro del triángulo de vértices A, B y C, redondeando el resultado a las centésimas:
a) A(0, 3), B(3, 7) y C(6, 0) b) A(1, 3) , B(4, 7) , C(–3, 6)

Actividades del libro: 1, 7 (pág. 137), 11 (pág. 139), 45, 47, 49, 52 (pág. 148), 90 y 91 (pág. 151)

2.- ECUACIONES DE UNA RECTA

Pendiente de una recta

Sea r una recta del plano y un vector $\vec{d} = (d_1, d_2)$ en la misma dirección que la recta (llamado vector director de la recta).

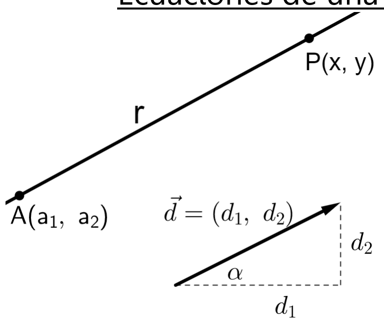


Se define la pendiente de la recta así: $\boxed{\underline{\text{pendiente}} \text{ de } r = m = \text{tg}\,\alpha = \dfrac{d_2}{d_1}}$

Si d_1 fuese cero se dice que la pendiente es infinito o simplemente que no existe la pendiente. Esto sólo ocurre cuando la recta es vertical.

Por ejemplo, si el vector director es $\vec{d} = (-3, 5)$, la pendiente sería $m = \dfrac{5}{-3} = \dfrac{-5}{3}$ pero si el vector director es $\vec{d} = (0, 3)$, como $\dfrac{3}{0}$ no existe, entonces no existe la pendiente. La recta sería vertical.

Ecuaciones de una recta



$\vec{d} \neq \vec{0}$

Como $\overrightarrow{AP} \,//\, \vec{d} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda\,\vec{d}\ \ (\lambda \in \mathbb{R}) \Rightarrow \vec{p} - \vec{a} = \lambda\,\vec{d} \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{c}\text{Ecuación vectorial} \\ r:\ \vec{p} = \vec{a} + \lambda\,\vec{d}\end{array}}$

A partir de la ecuación vectorial, sustituyendo, obtenemos: $r: (x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(d_1, d_2)$

Operando e igualando las componentes: $\boxed{\begin{array}{c}\text{Ecuaciones} \\ \text{paramétricas} \\ r: \begin{cases} x = a_1 + d_1\lambda \\ y = a_2 + d_2\lambda \end{cases}\end{array}}$

Despejando λ en las ecuaciones paramétricas e igualando: $\begin{array}{l}\dfrac{x-a_1}{d_1} = \lambda \\ \dfrac{y-a_2}{d_2} = \lambda\end{array} \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{c}\text{Ecuación continua} \\ r: \dfrac{x-a_1}{d_1} = \dfrac{y-a_2}{d_2}\end{array}}$

Si fuese $d_1 = 0$ ó $d_2 = 0$ la ecuación anterior no debemos entenderla como una división sino como un simbolismo. Por ejemplo, la ecuación $\dfrac{x+2}{0} = \dfrac{7-y}{5}$ que equivale a $\dfrac{x+2}{0} = \dfrac{y-7}{-5}$ representa a la recta que pasa por (–2, 7) y tiene vector director (0, –5)

Si $d_1 \neq 0$ entonces $\dfrac{y-a_2}{x-a_1} = \dfrac{d_2}{d_1} = m \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\textbf{Ecuación}\\ \textbf{punto - pendiente}\\ r: y-a_2 = m(x-a_1)\end{array}}$.

Un vector director de la recta es $\overrightarrow{d} = (d_1, d_2) \,/\!/\, (\dfrac{d_1}{d_1}, \dfrac{d_2}{d_1}) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{d} = (1, m)}$

Si $d_1 = 0$ entonces no se puede obtener la ecuación punto-pendiente. En este caso, r es una recta vertical.

Operando en la ecuación continua resulta

$$d_2(x-a_1) = d_1(y-a_2) \Rightarrow \overbrace{d_2}^{a}x \overbrace{-d_1}^{b} y \overbrace{-d_2a_1 + d_1a_2}^{c} = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\textbf{Ecuación implícita}\\ \textbf{o general}\\ r: ax+by+c=0\end{array}}$$

Un vector director de la recta es $\boxed{\overrightarrow{d} = (d_1, d_2) = (-b, a)}$. En este caso, la pendiente es $m = \dfrac{d_2}{d_1} \Rightarrow \boxed{m = \dfrac{-a}{b}}$

Si despejamos "y" en la ecuación punto-pendiente o en la ecuación implícita obtenemos:

$$y-a_2 = m(x-a_1) \rightarrow y = mx \overbrace{-ma_1 + a_2}^{n}$$

$$ax+by+c=0 \xrightarrow{\text{si } b\neq 0} y = \overbrace{\frac{-a}{b}}^{m}x + \overbrace{\frac{-c}{b}}^{n} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\textbf{Ecuación}\\ \textbf{explícita}\\ r: y = mx+n\end{array}}$$

. El término independiente, n, se llama ordenada en el origen. Un vector director de la recta es $\boxed{\overrightarrow{d} = (1, m)}$

Si $d_1 = 0$ (lo que es lo mismo, $b = 0$) entonces no se puede obtener la ecuación explícita.
En este caso, r es una recta vertical.

Ejemplo:

Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(2, –5) y es paralela al vector $\overrightarrow{d} = (-3, 7)$.

Ecuación vectorial $r: \overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \lambda\,\overrightarrow{d}$ $\text{pendiente} = m = \dfrac{7}{-3} = \dfrac{-7}{3}$ **Ecuaciones paramétricas** $r: \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = -5+7\lambda \end{cases}$ $\Rightarrow$ **Ecuación continua** $r: \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+5}{7}$

Ecuación punto - pendiente $r: y+5 = \dfrac{-7}{3}(x-2)$ $\Rightarrow 3y+15 = -7x+14 \Rightarrow$ **Ecuación implícita o general** $r: 7x+3y+1=0$ **Ecuación explícita** $r: y = \dfrac{-7}{3}x - \dfrac{1}{3}$

<u>Rectas especiales</u>

<u>**El eje X**</u> pasa por el origen de coordenadas 0(0,0) y tiene como vector director $\overrightarrow{d} = (1,0)$

Luego, las ecuaciones del eje X son: $\boxed{(x,y) = (0,0) + \lambda(1,0)} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-0}{0}} \Rightarrow \boxed{y = 0}$

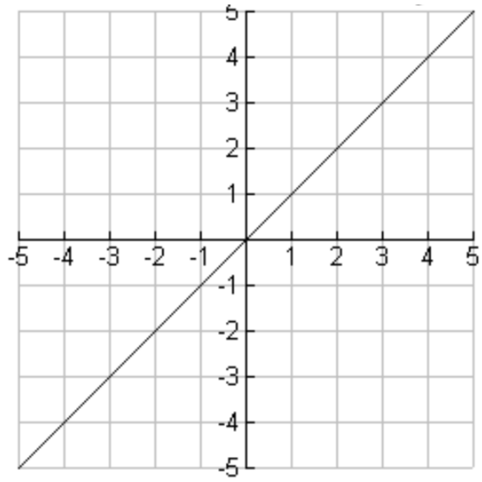
La ecuación de la <u>recta paralela al eje X u horizontal</u> que pasa por el punto (a, b) es $\boxed{y = b}$

<u>El eje Y</u> pasa por el origen de coordenadas 0(0,0) y tiene como vector director $\overrightarrow{d}=(0,1)$

Por tanto, las ecuaciones del eje Y son: $\boxed{(x,y)=(0,0)+\lambda(0,1)} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x-0}{0}=\dfrac{y-0}{1}} \Rightarrow \boxed{x=0}$

La ecuación de la <u>recta paralela al eje Y ó vertical</u> que pasa por el punto (a, b) es $\boxed{x = a}$

<u>Bisectriz del I y III cuadrante</u>: Es la recta que pasa por (0, 0) y forma un ángulo de 45º con OX y, por tanto, su pendiente es m = tg 45º = 1. Su ecuación sería entonces: y – 0 = 1(x – 0) → $\boxed{y=x}$



<u>Algunas consideraciones importantes</u>

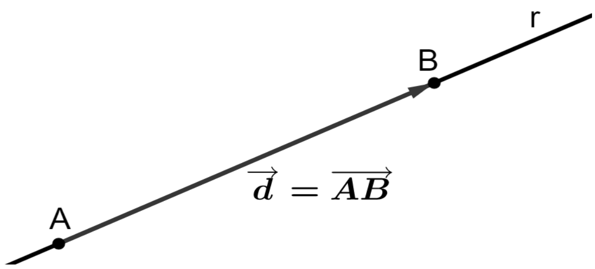
1) Si $\overrightarrow{d}$ es un vector director de r, cualquier vector proporcional a $\overrightarrow{d}$ también lo es.

<u>*Ejemplo*</u>:

Si queremos calcular las ecuaciones de la recta de vector director $(\frac{-3}{8}, \frac{1}{6})$, como $(\frac{-3}{8}, \frac{1}{6}) \overset{\cdot 24}{\approx} (-9, 4)$, podemos tomar como vector director de la recta $\overrightarrow{d}=(-9, 4)$

O si el vector director es $(36, -54)$, como $(36, -54) \overset{:18}{\approx} (2, -3)$, podemos tomar como vector director $\overrightarrow{d}=(2, -3)$

2) Para obtener las ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos A y B podemos tomar como vector director $\overrightarrow{AB}$ o cualquiera proporcional y como punto de referencia A ó B



<u>*Ejemplo*</u>:

Si queremos calcular las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(\frac{-3}{5}, \frac{1}{2})$ y $B(2, -1)$, como $\overrightarrow{AB}=(2+\frac{3}{5}, -1-\frac{1}{2})=(\frac{13}{5}, \frac{-3}{2}) \approx (26, -15)$, para que los cálculos fuesen menos engorrosos tomaríamos como punto de referencia B(2, – 1) y como vector director $\overrightarrow{d}=(26, -15)$

3) Para obtener puntos de una recta le damos valores a λ en las ecuaciones paramétricas.
En los otros casos, le damos un valor cualquiera a una de las incógnitas sustituimos y hallamos la otra incógnita.

Ejemplos:

a) Vamos a obtener puntos de la recta $r:\begin{cases} x=-1+3\lambda \\ y=5-\lambda \end{cases}$, distintos del punto de referencia (– 1, 5).

Para ello, le damos valores a λ (los que queramos).

Por ejemplo, si $\lambda = 1 \rightarrow \begin{cases} x=-1+3.1 \\ y=5-1 \end{cases} \rightarrow$ punto (2, 4) Si $\lambda = -2 \rightarrow \begin{cases} x=-1+3.(-2) \\ y=5-(-2) \end{cases} \rightarrow$ punto (–7, 7)

b) Vamos a obtener puntos de la recta 3x – 2y + 7 = 0. Para ello, le damos un valor a una incógnita (el que queramos). Por ejemplo, x = 1 → 3.1 – 2y + 7 = 0 → 10 = 2y → y = 5 → punto (1, 5)

y = –3 → 3x – 2(–3) + 7 = 0 → 3x = – 13 → x = $\frac{-13}{3}$ → punto $(\frac{-13}{3}, -3)$

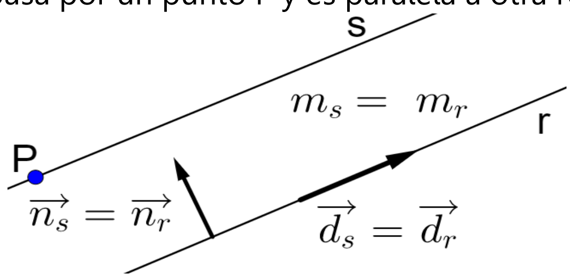
4) Para que un punto P pertenezca a una recta r sus coordenadas deben cumplir sus ecuaciones.

Ejemplo:

El punto $P(-4,5) \notin r:\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=\lambda \end{cases}$ porque al sustituir sus coordenadas $\begin{cases} -4=1-2\lambda \rightarrow \lambda=\frac{5}{2} \\ 5=\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2}=5$, imposible

Sin embargo $P \in r: 3x+2y+2=0$ porque al sustituir sus coordenadas $3(-4)+2.5+2=0$ (se cumple)

5) Ecuación de la recta s que pasa por un punto P y es paralela a otra recta r.



Tomamos como vector director de s el vector director de r o cualquier proporcional a él. Las rectas r y s tendrán, por tanto, la misma pendiente y el mismo vector normal.

Ejemplos:

a) Hallar la ecuación general de la recta s paralela a $r: 2x-y+4=0$ por el punto P(3, – 5)

$\overrightarrow{n_s} \,//\, \overrightarrow{n_r} = (2,-1) \xrightarrow{\text{Como } P \in s} s: 2(x-3)+(-1)(y+5)=0 \Rightarrow s: 2x-y-11=0$

b) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta s paralela a $r: x-2=\frac{y+7}{6}$ por el punto P(1, 0)

$\overrightarrow{d_s} \,//\, \overrightarrow{d_r} = (1,6) \xrightarrow{\text{Como } P \in s} s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=6\lambda \end{cases}$

c) Hallar la ecuación explícita de la recta s paralela a $r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=4+5\lambda \end{cases}$ por el punto P(1, 6)

$\overrightarrow{d_s} \,//\, \overrightarrow{d_r} = (-1,5) \Rightarrow m_s = m_r = \frac{5}{-1} = -5 \xrightarrow{\text{Como } P \in s} s: y-6=-5(x-1) \Rightarrow s: y=-5x+11$

Ecuación reducida de la circunferencia

La circunferencia de centro C y radio r es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia R de C.

Si P(x, y) es cualquier punto de la circunferencia de centro C(a, b) y radio r, d(C, P) = r

$$\left|\overrightarrow{CP}\right| = r \Rightarrow \left|(x-a,\ y-b)\right| = r \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \xrightarrow{\text{elevando al cuadrado}} \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2}$$

Por ejemplo, la ecuación de la circunferencia de centro (2, 5) y radio 3 es $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$

ACTIVIDADES

1.- Dada la recta r: 2x + 3y – 5 = 0 y el punto P(1, –2).

a) Averigua si la recta r pasa por el punto P b) Calcula el punto de la recta r que tiene abscisa x = 4

c) Halla un vector de dirección

d) Usando el punto A del b) y el vector director del c) halla las ecuaciones paramétricas, continua y explícita de la recta r

e) Halla la ecuación general de la recta s paralela a r que pasa por P

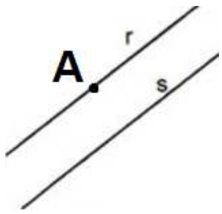
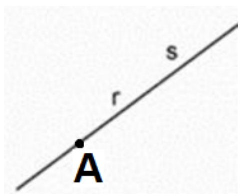
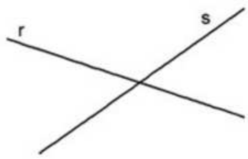
2.- Halla la ecuación de la recta paralela al eje Y que pasa por (–3, 5)

3.- Calcula la pendiente de la recta r: 2x – 5y + 12 = 0 y el ángulo con la horizontal

Actividades del libro: 21, 23, 25, 26, 27 (pág. 143), 31, 34 (pág. 145) y 74 (pág. 149)

3.- POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Cuándo tenemos dos rectas en el plano, únicamente se pueden dar las siguientes situaciones:

PARALELAS	COINCIDENTES	SECANTES
 $\overrightarrow{d_r} \parallel \overrightarrow{d_s}$ y $A \in r \to A \notin s$ ó Si r: y = mx + n, s: y = m´x + n´ m = m´ y n ≠ n´ ó Si r: ax + by + c = 0, s: a´x + bý + c´ = 0, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	 $\overrightarrow{d_r} \parallel \overrightarrow{d_s}$ y $A \in r \to A \in s$ ó Si r: y = mx + n, s: y = m´x + n´ m = m´ y n = n´ ó Si r: ax + by + c = 0, s: a´x + bý + c´ = 0, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	 $\overrightarrow{d_r} \nparallel \overrightarrow{d_s}$ ó Si r: y = mx + n, s: y = m´x + n´ m ≠ m´ ó Si r: ax + by + c = 0, s: a´x + bý + c´ = 0, $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

Cuando las rectas son secantes pueden ser perpendiculares o no serlo.

En el caso de que r y s sean secantes, para calcular el punto donde se cortan se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas

Ejemplos:

1) $r:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-2+3\lambda \end{cases}$ $s: 6x+2y+1=0 \Rightarrow \begin{matrix} \overrightarrow{d_r}=(-1,3) \\ \overrightarrow{d_s}=(-2,6)\,//\,(-1,3) \end{matrix}$. Como $\begin{matrix} A(1,-2)\in r \\ 6.1+2.(-2)+1\neq 0 \to A\notin s \end{matrix} \Rightarrow r\,//\,s$

2) $r: -9x+6y-15=0 \quad s: 6x-4y+10=0 \Rightarrow$ Como $\dfrac{-9}{6}=\dfrac{6}{-4}=\dfrac{-15}{10}$, $r=s$

3) $r: y=5x-4 \quad s: y=-5x-4 \Rightarrow \begin{matrix} m_r=5 \\ m_s=-5 \end{matrix}$. Como $m_r \neq m_s$, r y s son secantes

Punto de corte: $\begin{cases} y=5x-4 \\ y=-5x-4 \end{cases} \Rightarrow 5x-4=-5x-4 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=-4 \end{matrix}. \Rightarrow P(0,-4)$

4) $r:\begin{cases} x=1-3\lambda \\ y=2+\lambda \end{cases}$ $s:\begin{cases} x=2+\mu \\ y=-5+3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \overrightarrow{d_r}=(-3,1) \\ \overrightarrow{d_s}=(1,3) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{d_r} \not\parallel \overrightarrow{d_s}$. Hallemos el punto P de corte

$\begin{cases} 1-3\lambda=2+\mu \\ 2+\lambda=-5+3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3\lambda+\mu=-1).3 \\ \lambda-3\mu=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9\lambda+3\mu=-3 \\ \lambda-3\mu=-7 \end{cases}$

Sumando las ecuaciones $10\lambda=-10 \to \lambda=-1$. Sustituyendo, $-1-3\mu=-7 \to \mu=2$

Sustituimos ahora en las ecuaciones de r (o en las de s): $\begin{cases} x=1-3(-1) \\ y=2+(-1) \end{cases} \to \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \to P(4,1)$

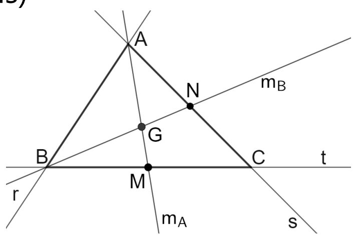
5) Sea ABC el triángulo cuyos lados están en las rectas r: 2x + y – 13 = 0, s: x – y – 2 = 0, t: y + 1 = 0.

a) Halla los vértices

Soluc.: $A=r\cap s: \begin{cases} 2x+y-13=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow A(5,3)$. $B=r\cap t: \begin{cases} 2x+y-13=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Rightarrow B(7,-1)$. $C=s\cap t: \begin{cases} x-y-2=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Rightarrow C(1,-1)$.

b) Calcula dos medianas (recta que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto) y el baricentro G (punto de corte de las medianas)

Solución



$M(4,-1)$, $\vec{d}\,//\,\overrightarrow{MA}=(1,4) \Rightarrow \vec{n}=(-4,1) \Rightarrow m_A: -4(x-4)+1(y+1)=0 \to -4x+y+17=0$

$N(3,1)$, $\vec{d}\,//\,\overrightarrow{NB}=(4,-2)\,//\,(2,-1) \Rightarrow \vec{n}=(1,2) \Rightarrow m_B: 1(x-3)+2(y-1)=0 \to x+2y-5=0$

$G=m_A\cap m_B: \begin{cases} -4x+y+17=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow$ El baricentro es $G(\dfrac{-13}{3},\dfrac{1}{3})$.

ACTIVIDADES

1.- Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de rectas y determina su punto de corte en caso de que sean secantes:

a) $r:\begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=2\lambda \end{cases}$ $s:\begin{cases} x=2+3\mu \\ y=-4 \end{cases}$ b) $r: \dfrac{x+4}{3}=y+7$ $s:\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-5+\lambda \end{cases}$ c) $r:\begin{cases} x=-3\lambda \\ y=7\lambda \end{cases}$ $s: x+y-8=0$

d) $r: \dfrac{x-2}{10}=\dfrac{y+5}{-15}$ $s: 21x+14y+32=0$ e) $r: 2x-12y+3=0$ $s: y=-6x+5$ f) $r: y=2x-5,\ \ s: y=2x+3$

2.- Calcula el área de la región que determina la recta $r: \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}=1$ al cortar a los ejes de coordenadas.

Actividades del libro: 28 (pág. 145) y 70 (pág. 149)