

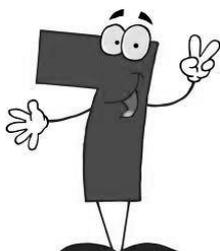
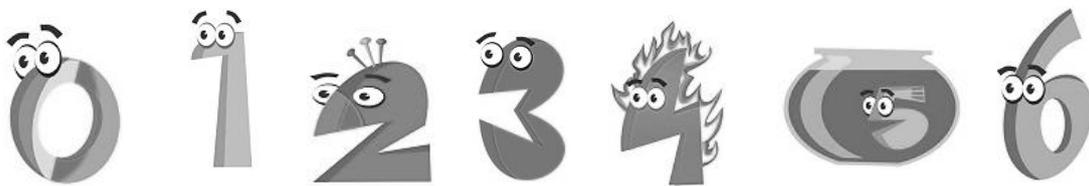


LOS NÚMEROS NATURALES Y OPERACIONES BÁSICAS

1. ¿Qué son los números naturales?
2. ¿Qué operaciones básicas conocemos? Problemas:

Suma
Resta
Multiplicación
División

3. ¿Qué son los múltiplos y divisores de un número?
4. ¿Cómo podemos descomponer un número?
factorización de un número.
5. ¿Qué es el mínimo común múltiplo (mcm)?
6. ¿Qué es el Máximo Común Divisor (MCD)?





1. ¿Qué son los números naturales?



Los números naturales son los números que usamos normalmente cuando hablamos de dinero, de personas, cuando vamos a comprar... Son todos los que conocemos, el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 y además todas las combinaciones entre ellos, como por ejemplo 12, 45, 658, 1285... y así sucesivamente.

Por eso es importante saber descomponer los números. Es muy fácil, fíjate en estos ejemplos:

24 → lo podemos descomponer en 4 unidades y 2 decenas.

168 → lo podemos descomponer en 8 unidades, 6 decenas y 1 centena.

2548 → lo podemos descomponer en 8 unidades, 4 decenas, 5 centenas y 2 unidades de mil.

Vamos a ver otro ejemplo. El número **3124** lo descomponemos en:

UNIDADES DE MIL	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES
3	1	2	4

Así tendremos:

- ⇒ 3 unidades de mil, o lo que es lo mismo, 3000. También 3 x 1000 unidades.
- ⇒ 1 centena, o lo que es lo mismo, 100. También 1x 100 unidades.
- ⇒ 2 decenas, o lo que es lo mismo, 20. También 2 x 10 unidades.
- ⇒ 4 unidades, o lo que es lo mismo, 4. también 4 x 1 unidad.

Entonces decir **3124** es lo mismo que decir **3000 + 100 + 20 + 4**

Por lo tanto, hay que tener en cuenta lo siguiente:

- El número más bajo siempre es la unidad. En nuestro ejemplo el 4.
- Las decenas son diez veces la unidad. En nuestro ejemplo el 2.
- Las centenas son cien veces la unidad. En nuestro ejemplo el 1.
- Las unidades de mil son mil veces la unidad. En nuestro ejemplo el 3.



2. ¿Qué operaciones básicas conocemos?

Con los números naturales que ya conocemos podemos realizar una serie de operaciones que son la suma, la resta, la multiplicación y la división.



La **suma** es el agregado de cosas, es una operación que permite añadir una cantidad a otra:

$$\begin{array}{r} 1 \\ +1 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ +80 \\ \hline 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 83569 \\ + 32894 \\ \hline 116463 \end{array} \quad \begin{array}{r} 446,23 \\ + 6,40 \\ \hline 452,63 \end{array}$$



La **resta**, dada una cantidad, se elimina una parte de ella y se obtiene un resultado. Se trata de disminuir o rebajar.

$$\begin{array}{r} 2 \\ -1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 80 \\ -20 \\ \hline 60 \end{array} \quad \begin{array}{r} 83569 \\ - 32894 \\ \hline 50675 \end{array} \quad \begin{array}{r} 446,23 \\ - 6,40 \\ \hline 439,83 \end{array}$$



La **multiplicación** consiste en sumar repetidamente la primera cantidad, tantas veces como indica la segunda. Así, $4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 5 \\ \hline 60 \end{array} \quad \begin{array}{r} 49264 \\ \times 32 \\ \hline 98528 \\ 147792 \\ \hline 1576448 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3456 \\ \times 3,2 \\ \hline 6912 \\ 10368 \\ \hline 11059,2 \end{array}$$



Para multiplicar dos números decimales lo haremos como si fueran números enteros y al resultado le pondremos tantas cifras decimales como tengan en total todos los números que hemos multiplicado



La **división** es una operación inversa a la multiplicación, su sentido es repartir. Consiste en averiguar cuántas veces se puede repartir un número en otro número. $12 : 2 =$ cuántas veces se puede repartir el número 12, entre 2, que sería 6 veces.

$$\begin{array}{r} 24 \overline{)12} \\ 04 \overline{)12} \\ \hline 0/ \end{array} \quad \begin{array}{r} 47852 \overline{)12} \\ 07 \overline{)12} \\ \hline 18 \\ 05 \\ 12 \\ \hline 0/ \end{array} \quad \begin{array}{r} 45,6 \overline{)12} \\ 05 \overline{)12} \\ \hline 16 \\ 0/ \end{array}$$



Para dividir un número decimal por un número entero se realiza como si fueran ambos números enteros; la coma se coloca en el cociente en el momento de bajar la primera cifra decimal del dividendo



1. Una señora se va a comprar y lleva en la cartera 75 euros, y compra 3 Kg. de cacahuetes que cuestan 4 euros/Kg, y un libro que cuesta 12 euros. ¿Cuánto dinero le sobrará en la cartera después de la compra?

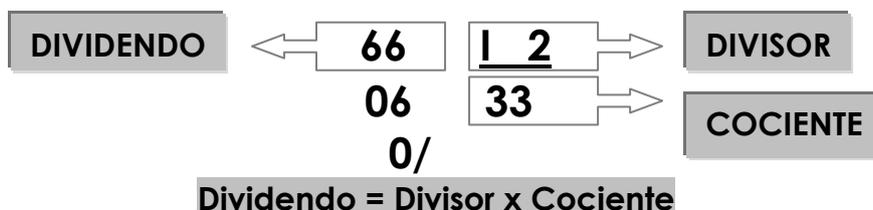
2. ¿Cuántos meses hay en 9 años? ¿Y cuántos hay en 18 años?

3. Pedro quiere repartir 168 monedas entre 8 niños, ¿cuántas monedas tendrá cada niño?

4. Hay en clase 7 paquetes de 25 cuadernos. Hemos gastado 67 cuadernos, ¿cuántos quedan?

3. ¿Qué son los múltiplos y divisores de número?

Recuerda que dividir significa repartir una cantidad en partes iguales. Si la división es exacta (o sea, si el resto es 0, no sobra nada) se cumple que:



$$66 = 2 \times 33$$
$$66 = 66$$



Pues para calcular los **múltiplos** de un número sólo tendremos que multiplicar ese número x 1, x 2, x 3, x 4, x 5, x 6..... Cada resultado será un múltiplo de ese número. Vamos a ver un ejemplo:

Múltiplos de 3 ⇒ 3 (3 x 1)
⇒ 6 (3 x 2)
⇒ 9 (3 x 3)
⇒ ...

Múltiplos de 4 ⇒ 4 (4 x 1)
⇒ 8 (4 x 2)
⇒ 12 (4 x 3)
⇒ ...

En el caso de los **divisores** es también muy sencillo. Son los números por el que se puede dividir un número de manera exacta:

Divisores de 12 ⇒ 12 (12: 12 = 1)
⇒ 6 (12: 6 = 2)
⇒ 4 (12: 4 = 3)
⇒ 3 (12: 3 = 4)
⇒ 2 (12: 2 = 6)
⇒ 1 (12: 1 = 12)

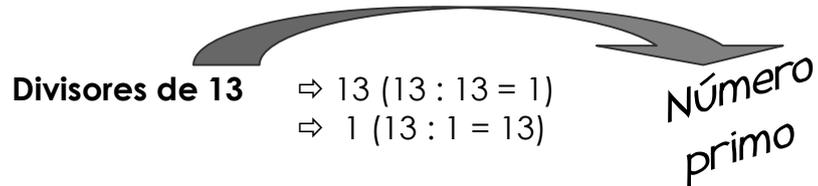


5. Escribe cinco múltiplos de los siguientes números:
5 ⇒
18 ⇒
20 ⇒
11 ⇒
7 ⇒

6. Escribe todos los divisores de los siguientes números:
8 ⇒
18 ⇒
36 ⇒
15 ⇒
48 ⇒

¿QUÉ SON LOS NÚMEROS PRIMOS?

Son aquellos números cuyos divisores son ellos mismos y el número uno:



Ejemplos: el 1, el 2, el 3, el 5, el 7, el 11, el 13, el 17...



RECUERDA QUE...

Todos los números son divisibles por sí mismos y por el número 1.

7. En un supermercado solo se venden los yogures en bloques de 4 unidades. Escribe la sucesión formada por el número posible de yogures que se pueden comprar.

4,

8. ¿De cuántas formas podemos colocar en filas y columnas los 30 alumnos de una clase?

Filas	1							
Columnas	30							

4. ¿Cómo podemos descomponer un número?

También se le llama descomposición factorial. Se trata de dividir un número entre todos los números primos que se pueda y después expresarlos (los n^{os} primos o factores) en forma de multiplicación.



RECUERDA QUE...

Los números primos son aquellos que sólo tienen como divisores él mismo y el 1. Ejemplos: El 1, el 2, el 3, el 5, el 7, el 11, el 13, el 17...

Intentemos comprenderlo con un ejemplo:

Tenemos el número 24, que debemos factorizar. A su lado dibujamos una raya. A la derecha de la raya escribiremos el número primo por el que podemos dividirlo, y el resultado lo escribiremos en la parte izquierda. Con este resultado volveremos a hacer lo mismo hasta que tengamos como resultado el número 1, ya que no se puede descomponer más:





$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Una vez descompuesto el número, hay que reescribirlo. Ahora tenemos que expresar el número en factores primos. Se haría de la siguiente manera:

$$24 = 2^3 \times 3$$

9. Factoriza los siguientes números: 30, 56 y 72:

10. Factoriza los siguientes números:

$18 =$

$36 =$

$54 =$

$95 =$

$125 =$

$72 =$



RECUERDA QUE...

$$2^{10}$$

← Potencia

← Base

Las potencias expresan un número multiplicado por sí mismo, donde **la base es el número** y **el exponente** es el número de veces que se repite.



5. ¿Qué es el mínimo común múltiplo (mcm)?

Para comprender el mínimo común múltiplo es importante recordar y tener claros estos conceptos:



- ❑ **Exponente:** número que dice cuantas veces se multiplica otro número por sí mismo. Ej: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.
- ❑ **Números primos:** son aquellos números que solo tienen como divisores él mismo y el 1.
- ❑ **Descomposición de un número:** descomponer un número expresándolo como una multiplicación de números primos. Ej: $24 = 2^3 \times 3$.



El **mínimo común múltiplo** (m.c.m.) de varios números es resultado de la multiplicación de los factores primos **comunes y no comunes** elevados al **mayor exponente** que aparecen en la descomposición factorial.

Vamos verlo mejor con un ejemplo: hallar el m.c.m de 18 y 20.

1. Descomponemos los números. Ej:

$$18 = 2 \times 3^2$$

18	2
9	3
3	3
1	

$$20 = 2^2 \times 5$$

20	2
10	2
5	5
1	



2. Señalamos los números que no se repitan en las descomposiciones, y de los que se repitan señalamos los mayores.

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$20 = 2^2 \times 5$$

3. Multiplicamos todos estos números y el resultado es el m.c.m.

$$\text{m.c.m.} = 3^2 \times 2^2 \times 5 = (3 \times 3) \times (2 \times 2) \times 5 =$$

$$9 \times 4 \times 5 = 180$$

11. Calcula el mínimo común múltiplo de:

a) 36 y 38





b) 55, 33 y 11

c) 45, 25, 60

6. ¿Qué es el Máximo Común Divisor (MCD)?



El **Máximo Común Divisor** (M.C.D) de varios números es la multiplicación de los **factores primos comunes a todos**, elevados cada uno al **menor** de los **exponentes** con que aparecen en su descomposición.

Vamos verlo con un ejemplo: hallar el M.C.D de 18 y 20.

1. Descomponemos los números. Ej:

$$18 = 2 \times 3^2$$

18	2
9	3
3	3
1	

$$20 = 2^2 \times 5$$

20	2
10	2
5	5
1	



2. Señalamos los números que se repitan en las descomposiciones, y de los que se repitan señalamos los más pequeños.

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$20 = 2^2 \times 5$$

3. Multiplicamos todos estos números y el resultado es el M.C.D

$$\text{M.C.D} = 2$$



12. Calcula el Máximo Común Divisor de:

a) 8 y 48

b) 30 y 45

c) 12 y 45

13. Una pareja que trabaja como ATS tiene guardias nocturnas. Él cada 8 días y ella cada 10. Si coinciden el 1 de enero haciendo guardia ¿cuánto tardarán en coincidir de nuevo?, ¿cuántas veces al año les toca guardia a la vez y tienen que contratar a una persona para que cuide a sus hijas?

14. Tenemos dos cuerdas, una de 12m. y la otra de 8m. ¿Cómo las dividiremos de modo que los trozos de una sean de igual longitud que los de otra y lo más largos posibles?



RECUERDA QUE... La forma de diferenciar los problemas de mínimo común múltiplo (m.c.m.) y de máximo común divisor (m.c.d) es que:

⇒ Si el problema busca **repetir o multiplicar** será un problema de **m.c.m.**

⇒ Si el problema busca **repartir o dividir** será un problema de **M.C.D.**



LOS NÚMEROS ENTEROS: POSITIVOS Y NEGATIVOS

1. ¿Qué son los números enteros?
2. ¿Cómo se representan los números enteros?
3. ¿Cómo operamos con números enteros?

Suma.
Resta.
Multiplicación.
División.
Potencia.

4. ¿Qué operación se realiza antes?





1. ¿Qué son los números enteros?



Si nos imaginamos el Monte Everest (que es el lugar más alto de la tierra) y las fosas de las Marianas (que son el lugar más profundo de la corteza terrestre) observamos que el Monte Everest sobresale del nivel del mar y las fosas Marianas se quedan muy por debajo. Así pues, al nivel del mar lo llamaremos punto 0.

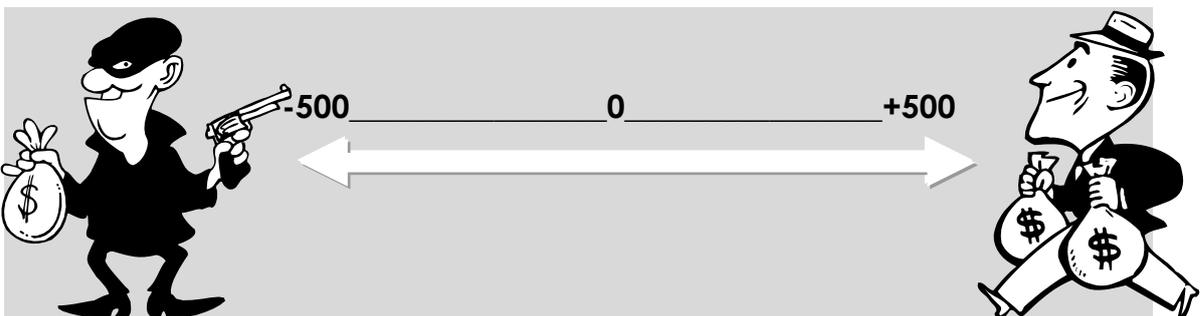
Con las temperaturas ocurre lo mismo. En Rusia en invierno soportan temperaturas de hasta -40 grados y en Sevilla en verano hace unos 40 grados de calor. El punto medio sería el 0. Estos ejemplos nos sirven para comprender todo lo que vamos a explicar a continuación.

Los números naturales en este tema se nos quedan cortos. Por eso vamos a trabajar con los **números enteros** que poseen dos signos: **positivo (+) y negativo (-)**. Esto quiere decir que cada número posee uno exactamente igual en sentido opuesto. Por ejemplo:



Si vamos al banco e ingresamos 500 euros en nuestra cartilla, nuestro saldo habrá aumentado 500 euros. Esto es un número positivo.

Si por el contrario tienen que cobrarse el seguro del coche, nos cobrarán 500 euros. En nuestro saldo aparecerá como -500 euros. Esto es un número negativo. Si observamos, uno es el opuesto del otro y en medio se encontraría el 0, a la misma distancia de los dos:



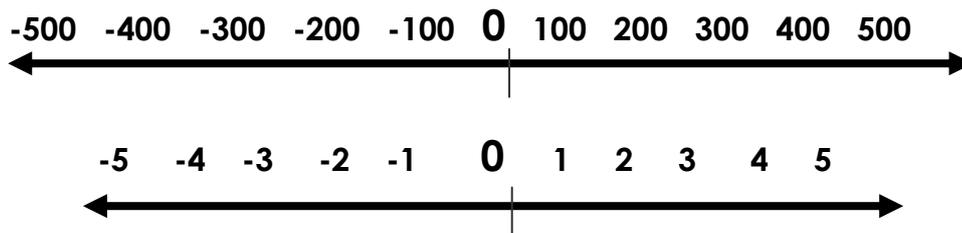
En los dos casos vemos que la cifra es igual, 500 . A ese número, si no hacemos caso del signo, le llamaremos, **VALOR ABSOLUTO**. Y lo vamos a expresar de la siguiente manera:

$$\text{El valor absoluto de } -500 \text{ y } +500 = /500/$$

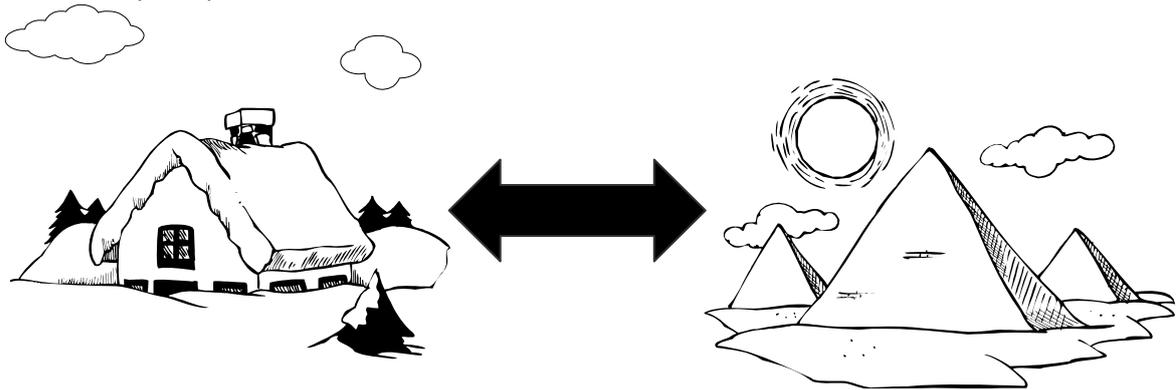


2. ¿Cómo se representan los números enteros?

Los números se representan gráficamente puestos en una línea recta, poniendo en algún lugar el 0 (el origen de referencia). Cuando elegimos el tipo de medida que vamos a situar (de 1 en 1, de 2 en 2, de 100 en 100), colocamos los positivos a la derecha y los negativos a la izquierda. Lo mismo que hemos visto en el ejemplo de los 500 euros.



Estaremos todos de acuerdo en que 1 es menor que 2. Del mismo modo -1 es mayor que -2.



Ejemplo:

Elegimos como unidad de medida 1° , así obtendríamos la siguiente escala:

$-3^\circ, -2^\circ, -1^\circ, 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$.

En este caso estaríamos midiendo temperatura, por lo tanto, el calor. Hace más calor con 2 grados que con 1. También hace menos calor con -2 grados que con -1 grado. Esto lo expresamos de la siguiente forma:

$2 > 1$ y $-2 < -1$.



RECUERDA QUE...

La boca del signo $>$ $<$ siempre apunta al número más grande.



1. Escribe el signo mayor o menor entre los siguientes pares de números:

-4 -3	0 - 7	-13 -27	3 1	0 -1
-7 -8	-2 0	-87 3	-9 -5	-6 -12

2. Escribe 5 números que sean menores que -8 y otros 5 números mayores que -5. Representalos gráficamente en una línea recta:

_____0_____

3. ¿Cómo operamos con números enteros?

Sumar, restar, multiplicar o dividir, no es muy diferente de hacerlo como todos sabemos. Pero debemos conocer una serie de reglas:

SUMA Y RESTA.



Cuando la suma o la resta tienen:

○ **Mismo signo:** se suman sus valores absolutos y se deja el mismo signo.

Ejemplo: $5 + 2 = 7$

$$- 3 - 2 = -3 + (- 2) = - 5$$

○ **Diferente signo:** se restan sus valores absolutos y se deja el signo del mayor.

Ejemplo: $- 4 + 6 = 2$

$$3 - 8 = 3 + (-8) = 5$$



RECUERDA QUE ...

⇒ Cuando un número no lleva ningún signo delante, es positivo:

$$32 = + 32$$

$$698 = + 698$$

⇒ El signo - delante de otro signo - hace que este se convierta en un signo positivo.



3. Calcula:

a) $(-5) + (-4) =$

b) $6 - 4 =$

c) $8 - 12 =$

d) $25 - (-15) =$

4. Calcula:

a) $(-24) - (-15 + 3) =$

b) $16 - (-3 - 2) =$

c) $-52 - (-12) =$

d) $8 - (+12) =$

e) $(-6) - (6 + 5) =$

5. Pitágoras nació en el año 580 a.C. y Newton en el año 1.643 d.C. Si se cree que Pitágoras murió a los 83 años de edad ¿cuántos años trascurrieron desde que murió Pitágoras hasta que nació Newton?

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN



Cuándo la multiplicación y la división tienen:

○ **Mismo signo:** resultado positivo (+)

Ejemplo:

$$4 \times 5 = 20$$

$$(-8) \times (-2) = 16$$

$$20 \div 10 = 2$$

$$(-12) \div (-4) = 3$$

○ **Diferente signo:** resultado negativo (-)

Ejemplo:

$$5 \times (-3) = -15$$

$$-4 \times 7 = -28$$

$$8 \div (-2) = -4$$

$$-16 \div 4 = -4$$

Ley de los signos

$$+ \cdot + = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$$- \cdot - = +$$

$$- \cdot + = -$$

$$+ \div + = +$$

$$+ \div - = -$$

$$- \div - = +$$

$$- \div + = -$$



RECUERDA QUE ...

- ⇒ El signo \times es el mismo que \cdot (multiplicación).
- ⇒ Cuando no se pone nada delante de un paréntesis, se supone que ese número está multiplicando:

$$32(8 + 16) = 32 \cdot (24) = 768$$

6. Calcula:

a) $12 \cdot 3 =$

e) $6 \cdot (-2) =$

b) $(-10) \cdot (-10) =$

f) $(-8) \cdot (-5) =$

c) $8 \cdot (-5) =$

g) $6 \cdot 3 =$

d) $(-14) \cdot 13 =$

h) $(-5) \cdot (-6) =$

7. En una ciudad va bajando la temperatura durante la noche 1 grado cada hora. Si en ese momento marca 0 grados:

a.- ¿Qué temperatura marcaba hace 4 horas?

b.- ¿Qué temperatura marcará dentro de 2 horas?

8. Realiza las siguientes divisiones:

a) $15 : (-3) =$

b) $(-18) : (-3) =$

c) $(-3) : (-3) =$

d) $(-12) : 6 =$



PROPIEDAD DISTRIBUTIVA:

Significa que si multiplicamos un número por otros dos que están sumando o restando, este número multiplicará a los dos números que se suman o se restan:

$$3 \cdot (9 - 2) = 3 \cdot 9 + 3 \cdot (-2) = 27 + (-6) = 27 - 6 = 21$$

9. Efectúa las siguientes operaciones utilizando la propiedad distributiva:

a) $(12 + 4) \cdot 7 =$

b) $32 \cdot (8 + 16) =$

c) $(10 - 9) \cdot 5 =$

d) $(6 + 9) \cdot 3 =$

POTENCIA



Recuerda:

$$2^{10}$$

Exponente

Base

$$2^{10} = 2 \cdot 2 = 1.024$$

La potencia es una operación que nos indica cuantas veces esta multiplicado un número por sí mismo. Es la operación contraria a la raíz cuadrada. Esta misma operación también se puede realizar con números enteros (positivos y negativos). Veamos cómo:

$$(-2)^{10} = (-2) \cdot (-2) = +1.024$$

Existe un truco para saber el signo del resultado final:

- Si el exponente es **par** = positivo (+)
- Si el exponente es **impar** = negativo (-).

Observa:

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32 \quad (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$$



10. Calcula:

a) $(-7)^3 =$

b) $(-5)^3 =$

c) $(-3)^3 =$

d) $-(-2)^3 =$

e) $(-3)^4 =$

f) $(-12)^2 =$

Las potencias también se pueden multiplicar, dividir, sumar y restar. Vamos a ver primero cómo se hace cuando la base de los dos números es la misma.

Misma Base: podemos encontrar:

MULTIPLICACIÓN: Se deja como base lo mismo y se suman los exponentes.
Ej: $3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$

DIVISIÓN: Se deja como base el mismo número y se restan los exponentes.
Ej: $3^6 : 3^4 = 3^{6-4} = 3^2$

Diferente Base: podemos encontrar:

MULTIPLICACIÓN: Se multiplican las dos bases y se deja igual el exponente.
Ej: $2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$

También se puede hacer al revés: $(2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$

DIVISIÓN: Se dividen las dos bases y se deja igual el exponente.
Ej: $8^5 : 2^5 = (8:2)^5 = 4^5$

POTENCIA DE UNA POTENCIA:

Se deja como base el mismo número y como exponente la multiplicación de los dos exponentes.

$$((-2)^3)^4 = (-2)^{3 \cdot 4} = (-2)^{12}$$



RECUERDA QUE ...

Cualquier número elevado a 0 es igual a 1
Cualquier número elevado a 1 es ese mismo número

11. Efectúa:

a) $2^3 \cdot 2^5 =$

g) $(4^1) =$

b) $(-5)^4 \cdot (-5)^7 =$

h) $(-2)^3 \cdot (-2)^5 =$

c) $(-3)^5 : (-3)^4 =$

i) $3^5 \cdot 3^7 =$

d) $(-7)^5 : (-7)^3 =$

j) $8^5 : 8^5 =$

e) $((2^3)^5) \cdot 2^4 =$

k) $((-2)^2)^5 =$

f) $((2)^2)^9 =$

l) $39^0 =$

4. ¿Qué operación se realiza antes?

En la vida real se nos van a presentar todas estas operaciones matemáticas mezcladas, como por ejemplo en los inventarios de grandes almacenes, en los ingresos, gastos... Es importante para esto que conozcamos el orden que deben seguir las operaciones.



1. Las potencias: (2^5)
2. La multiplicación y la división: $(x) (:)$
3. Las sumas y las restas: $(+) (-)$



Ejemplo:

$$-3 + 2 \cdot 5^2 =$$

Primero realizamos la potencia 5^2 , que nos da **25**.

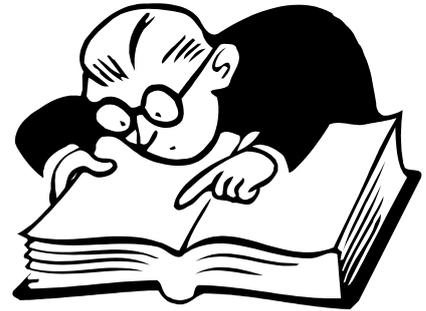
$$-3 + 2 \cdot 5^2 = -3 + 2 \cdot 25 =$$

Después la multiplicación $25 \cdot 2$, que nos da **50**.

$$-3 + 2 \cdot 5^2 = -3 + 2 \cdot 25 = -3 + 50 =$$

Por último la suma $-3+50$. El resultado sería **47**.

$$-3 + 2 \cdot 5^2 = -3 + 2 \cdot 25 = -3 + 50 = 47$$



RECUERDA QUE ...

Los paréntesis es lo primero que hemos de realizar, teniendo en cuenta la prioridad de las operaciones.

12. Indica si son iguales, mayores o menores los siguientes números:

a) $-7 - 8$

c) $0 - 5$

e) $-51 - 3$

b) $-2 - 0$

d) $-6 - 12$

f) $-3 - 1$

13. Realiza las siguientes sumas y restas de números enteros:

a) $5 + 4 + (-9) - 5 + 3 + (-2) - (-4) =$

b) $6 + 2 + 1 - 8 - 1 + (-5) + (-2) - (-4) =$



14.- Calcula las siguientes operaciones:

a) $-15 + 7 - (-8) + (-9) =$

g) $-12 \cdot (-4) =$

b) $12 + (-10) - 5 - (-21) =$

h) $2 \cdot (-3 + 1) =$

c) $-(-8) + 12 + (-5) - 3 =$

i) $-1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-5) =$

d) $-(-6) - (6 + 3) =$

j) $-3 \cdot (-5 + 2) =$

e) $1 - (-7 + 4) + (-2) =$

k) $-4 \cdot (-3) \cdot (-5) =$

f) $-12 - (-8 + 4 - 5) + (-1) =$

l) $-2 \cdot 3 \cdot (-5) =$

15.- Calcula los siguientes cocientes:

a) $15 : (-3) =$

c) $(-10 + 2) : (-2) =$

e) $-30 : (-7 + 10) =$

b) $-3 : 3 =$

d) $-12 : 4 =$

f) $-(-15) : (-5) =$

16.- Realiza las siguientes operaciones:

a) $-(-8 \cdot 5 \cdot (-9)) : 12 =$

e) $(-18) : 3 \cdot (-2) =$

b) $(-4 \cdot (-2) \cdot 7) : (-14) =$

f) $(-18) : (3 \cdot (-2)) =$

c) $-(-2) \cdot 5 \cdot (-12) : (-4) =$



17.- Mónica parte en ascensor desde la planta cero de su edificio. El ascensor sube 5 plantas, después baja 3, sube 5, baja 8, sube 10, sube 5 y baja 6. ¿En qué planta está?

18.- Juan debe 40 euros a un taller por la reparación de su moto. Si abona 35 euros, ¿cuánto debe?

19.- En una estación de esquí el termómetro marcaba 14° bajo cero a las 8 de la mañana; al mediodía la temperatura había subido 10 grados y a las 19.00 había bajado 5 grados respecto al mediodía. ¿Cuál era la temperatura a esa hora?



FRACCIONES

1. ¿Qué son las fracciones?
2. Cálculos aplicados:

Regla de tres y porcentajes

3. ¿Cómo calcular una fracción equivalente? ¿Cómo simplificar?
4. ¿Cómo se operan las fracciones?

Suma.

Resta.

Multiplicación.

División.

Potencia.

Comparación de fracciones

5. ¿Cómo resolver problemas?





1. ¿Qué son las fracciones?

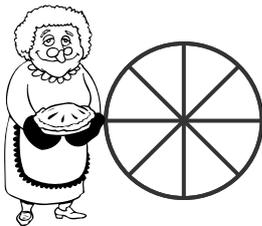
Una fracción es la representación de un reparto y la utilizamos comúnmente más de lo que parece, por ejemplo: en el supermercado, cuando compramos medio kilo de carne; cuando pedimos un tercio de cerveza o cuando compramos un décimo de lotería en Navidad..., en todos estos casos, utilizamos fracciones.

Los términos de la fracción se llaman:

$$\frac{1}{2} \rightarrow \text{NUMERADOR}$$
$$2 \rightarrow \text{DENOMINADOR}$$

Las fracciones pueden tener diferentes significados y tener varias aplicaciones, se pueden utilizar para:

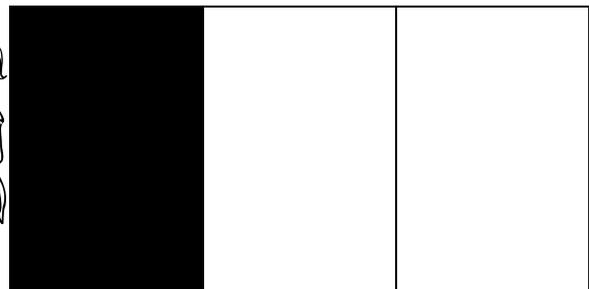
REPARTIR



Si queremos repartir una tarta con 8 trozos entre 2 personas lo expresaríamos de la siguiente manera $8/2$. Si realizamos la división nos daría que a cada persona le corresponden 4 trozos.

FRACCIONAR O DIVIDIR

Imaginad que un pintor coge una pared y pinta una tercera parte ($1/3$), esto quiere decir que ha tomado la pared (que es la unidad (1)) y la ha dividido en tres partes, de las que ha pintado una. Ha pintado un tercio de pared.



REPRESENTAR UNA RELACIÓN O RAZÓN



Se puede representar la relación o "razón" que existe entre dos cantidades. Así, por ejemplo, si para hacer un determinado pastel necesitamos 6 huevos por cada kg de harina, la relación existente entre la harina y los huevos se expresaría de la siguiente forma: $1/6$.



2. Cálculos aplicados: Regla de tres y porcentajes

1. Hallar las partes de un número

En ocasiones nos podrán preguntar como hallar una fracción de un número. Veamos un ejemplo:

¿Cuánto son las $\frac{2}{3}$ partes de 600 euros?

$$\frac{2}{3} \text{ de } 600 \longrightarrow \frac{2}{3} \times 600 = \frac{2 \cdot 600}{3} = \frac{1200}{3} = 400 \text{ euros}$$

Multiplicamos el 2 por la cantidad (600) y el resultado se divide entre 3. El resultado es 400 euros.

2. Hallar el tanto por cien de un número (porcentajes)



A veces, en algunos problemas nos pueden preguntar cómo hallar el tanto por cien de un número. Saber calcularlo puede sernos muy útil sobre todo de cara a ir de compras. Veamos un ejemplo:

Nos hacen un descuento del 35% en un pantalón de 20 euros, si queremos saber cuánto nos descuentan debemos de calcular el 35% de 20.

Calcular el 35% de 20 e

-El 35% es lo mismo que poner como proporción 35/100

$$35\% = \frac{35}{100}$$

-Ahora multiplicamos esta fracción por el número en este caso 20

$$\frac{35}{100} \times 20 = \frac{35 \cdot 20}{100} = \frac{700}{100} = 7$$

Así mismo podemos decir que el 35% de 20 euros son 7 euros. Luego sabemos que nos descuentan 7 euros.

Si queremos saber cuánto nos cuesta el pantalón rebajado debemos de restar a lo que valía el pantalón (20 euros) lo que le descuentan (7 euros).

$$20 - 7 = 23 \quad \text{El pantalón cuesta 23 euros}$$



3. Regla de tres



La regla de tres la utilizaremos sobre todo para resolver problemas. Principalmente aquellos en los que los datos mantienen una relación proporcional directa.

Se le llama regla de tres porque conocemos tres de las valores del problema y tenemos que hallar otro más.

Para ver cómo se resuelven los problemas de regla de tres debemos ver un ejemplo:



Si un verdulero vende 12kg de tomate a 36 euros, ¿a qué precio venderá 5 Kg de tomate?

Lo primero que hacemos es plantear el problema, teniendo en cuenta el colocar los datos agrupados: en la derecha colocamos kg con kg y en la izquierda colocamos euros con euros.

si 12 Kg _____ son 36 euros
5 Kg _____ serán x euros

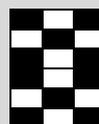
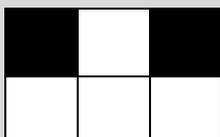
Luego tenemos que saber que la incógnita siempre es igual a la multiplicación de los dos datos que quedan cruzados, divididos por el otro dato que queda:

12 Kg ←————→ 36 euros
5 Kg ←————→ x euros (pongo x porque no conozco el número)

$$x = \frac{5 \cdot 36}{12} = \frac{180}{12} = 15$$

Finalmente, realizamos las operaciones y el número que nos da es la incógnita que buscábamos: 15 euros.

1.- Expresa con una fracción la parte sombreada de cada figura:





2.- Calcula:

Los $\frac{2}{3}$ de 24 →

25% de 45 →

Los $\frac{5}{6}$ de 82 →

15% de 244 →

Los $\frac{4}{7}$ de 124 →

30% de 6450 →



3.- Cada uno de los 200 socios de un gimnasio paga 37 euros de abono trimestral. El próximo trimestre el número de socios se espera que aumente un 4 % y el abono se incrementará un 5 % ¿Cuántos socios habrá? ¿Cuánto se recaudará con los abonos?



4.- Un fontanero ha realizado un trabajo. Por pagar al contado ha efectuado un descuento de 5%, lo que supone una rebaja de 16 euros. ¿Cuál era el importe total del trabajo? ¿Qué cantidad supone el IVA del 16% sobre el importe total del trabajo?



5.- Un coche realiza un viaje y consume la sexta parte de la gasolina que lleva y al final del trayecto todavía le quedan 25 litros en el depósito ¿Cuántos litros llevaba al iniciar el recorrido?



3. ¿Cómo calcular una fracción equivalente? ¿Cómo simplificar?

Dos fracciones son equivalentes cuando indican la misma proporción, o representan lo mismo.

Hacer fracciones equivalentes

Para **obtener fracciones equivalentes** debemos multiplicar tanto el numerador como el denominador de la fracción por el mismo número, el que queramos (2, 3, 4, 15,...). Así de fácil. Siempre que multipliquemos por el mismo número tanto el numerador como el denominador obtendremos fracciones equivalentes. Por ejemplo:

$$\frac{1}{4} \stackrel{x 2}{=} \frac{2}{8} \stackrel{x 3}{=} \frac{3}{12}$$

Comprobar si dos fracciones son equivalentes

Para **comprobar si dos fracciones son equivalentes** debemos hacer una multiplicación cruzada:

1. Multiplicar el numerador de la 1ª por el denominador de la 2ª.
2. Multiplicar el denominador de la 1ª por el numerador de la 2ª.
3. Si los resultados del numerador y denominador son iguales, son fracciones equivalentes.

Ejemplo:

Comprueba si se cumple la igualdad y por lo tanto si son equivalentes:

$$\frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{2}{8} \quad \frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{8}{8}$$

Hemos multiplicado 1×8 y 4×2 (**multiplicación cruzada**) y nos ha dado el mismo resultado, por lo tanto; ambas fracciones son equivalentes.

Simplificar fracciones

A veces resolver una operación en la que el resultado es una fracción podremos simplificar dicha fracción. Esto quiere decir, que podremos obtener fracciones más sencillas.



Para hacerlo tan solo debemos dividir el numerador y el denominador por el mismo número, (que será el máximo común divisor (M.C.D.) de los dos, recordar el tema 1). Veamos un ejemplo:

Para simplificar $\frac{6}{8}$ hay que buscar un número que pueda dividir al 6 y al 8. Si no sabemos buscarlo podemos hallar el M.C.D. de 6 y 8:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 8 = 2^3 \end{array}
 \implies
 \text{M.C.D. (6 y 8)} = 2$$

Ya sabemos que tanto 6 como 8 pueden ser divididos por 2. Así que dividimos los dos números y así conseguimos la fracción equivalente.

$$\frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$$

6.- Calcula tres fracciones equivalentes a:

a) $4/6 =$

b) $1/5 =$

c) $1/10 =$

7.- Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{40}{105}$

b) $\frac{145}{35}$

c) $\frac{440}{605}$

4. ¿Cómo se operan las fracciones?

SUMA Y RESTA.

- **CUANDO TIENEN EL MISMO DENOMINADOR:** dejamos el mismo denominador y sumamos los numeradores.

Ejemplo:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$$





- CUANDO TIENEN DISTINTO DENOMINADOR:

1. Hallar el m.c.m. de los denominadores.
2. Ponemos el m.c.m como nuevo denominador.
3. Calculamos el nuevo numerador.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9}$$

1ER PASO: Hallar el mínimo común múltiplo (m.c.m) de los denominadores:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

m.c.m. = $3^2 \times 1 = 9$
El Nuevo Denominador

$$3 = 3 \times 1$$

$$9 = 3^2$$

2DO PASO: Ponemos el m.c.m (9) como denominador:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} = \frac{?}{9} + \frac{?}{9}$$

3ER PASO: Calculamos el nuevo Numerador:

Para ello haremos la operación siguiente:

$$\text{Numerador Nuevo} = \frac{\text{Denominador Nuevo}}{\text{Denominador Viejo}} \times \text{Numerador Viejo}$$


$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} = \frac{?}{9} + \frac{?}{9} \longrightarrow \frac{2}{3} + \frac{6}{9} = \frac{6}{9} + \frac{6}{9} = \frac{12}{9}$$



8.- Calcula las fracciones equivalentes de estas, y que a la vez sea el mismo denominador de todas:

a) $1/3, 2/5, 4/7$

b) $3/8, 2/5, 1/4$

b) $1/2, 3/4, 100/7$

d) $1/2, 2/3, 5/6$

9.- Efectúa en cada caso las operaciones indicadas:

a) $1/5 + 3/5 =$

b) $2/3 - 1/4 + 3/16 =$

c) $4/7 + 1/7 - 3/7 =$

d) $1/2 - 7/15 - 3/16 =$

e) $2/3 + 3/5 + 1/7 =$

f) $2/3 - 1/6 =$

10.- Escribe tres fracciones equivalentes a cada una de ellas:

$2/3$			
$4/5$			



MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para **multiplicar** fracciones solo tenemos que multiplicar el numerador por el numerador y el denominador por el denominador. Multiplicamos en línea. *Ejemplo:*



$$\frac{2}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{4 \times 3} = \frac{10}{12}$$

Y para **dividir** es también muy sencillo. Debemos multiplicar los productos cruzados de las fracciones. Multiplicamos en cruz. *Ejemplo:*

$$\frac{2}{4} : \frac{5}{3} = \frac{2 \times 3}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$$

Además también pueden aparecer fracciones en las que el numerador como el denominador aparezcan fracciones. Entonces deberemos solucionar primero la fracción del numerador y después la fracción del denominador, de manera que poco a poco quedará una fracción simple. Vamos a ver un ejemplo:



$$\begin{aligned} \frac{(1 - 2/3) : 3/5}{(2/3 + 4/5) \cdot 1/2} &= \frac{(3/3 - 2/3) : 3/5}{(10/15 + 12/15) \cdot 1/2} = \frac{1/3 : 3/5}{22/15 \cdot 1/2} = \frac{(1 \times 5)/(3 \times 3)}{(22 \cdot 1)/(15 \cdot 2)} = \frac{5/9}{22/30} = \\ &= \frac{5 \cdot 30}{9 \cdot 22} = \frac{150}{198} = \frac{25}{33} \end{aligned}$$



RECUERDA QUE ...

En las operaciones se realiza siempre primero lo de dentro del paréntesis



⇒ Es sencillo. Solucionamos por un lado el numerador y por otro el denominador, y vamos operando y simplificándolo hasta que sólo nos queda una sola fracción.

✍ 11.- Efectúa las operaciones combinadas:

a) $1/4 : (3/5 : 2/3) =$

b) $(1/2 : 3/4) : (1/4 : 2/3) =$

c) $2/3 : (4/5 : 7/3) =$

d) $2/4 + 3/2 - (2/5 + 1/4) =$

e) $(2/3 + 5/6 - 7/12) : (3/4 + 2/3) =$

f) $1/3 - 3/5 \cdot 2/3 =$

✍ 12.- Soluciona las siguientes fracciones y simplifica los resultados:

a) $\frac{\left(3 + \frac{1}{3}\right)}{\left(8 - \frac{1}{2}\right)} =$

b) $\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} =$



POTENCIAS

Cuando una fracción está elevada a una potencia, el resultado se opera como lo hemos hecho hasta ahora. Recordad que, en este caso, se eleva tanto el numerador como el denominador al exponente.

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

Las potencias también pueden estar elevados a números enteros (es decir, a números positivos y/o negativos). Vemos un ejemplo:

$$7^2 \Rightarrow \text{Esta expresión sale de } \frac{7^5}{7^3} = 7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$$

$$7^{-2} \Rightarrow \text{Esta expresión sale de } \frac{7^3}{7^5} = 7^3 : 7^5 = 7^{3-5} = 7^{-2}$$

Si desarrollamos la expresión $\frac{7^3}{7^5}$ $\Rightarrow \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$

13.- Escribe de distintas formas las siguientes expresiones:

a) 2^{-1}

b) 100^{-2}

c) $0,01^{-3}$

d) $(1/4)^{-1}$

f) $((0,01)^2)^{-5}$

g) $((1/3)^{-2})^2$

14.- Calcula las siguientes potencias:

a) $(3/7)^6 : (3/7)^3 =$

b) $(1/3)^2 \cdot (1/3)^3 : (1/3)^4 =$

c) $(-2/3)^{-1} : (-2/3)^3 =$

d) $(-3)^{-1} : (-1/3)^3 =$



COMPARACIÓN DE FRACCIONES

Diremos que una fracción es mayor ($>$) que otra cuando su diferencia o resta sea positiva. Por lo tanto, cuando la diferencia nos dé un número negativo diremos que la fracción es menor ($<$).



Ejemplo:

$\frac{2}{3} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{1}{4}$ porque si las restamos $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$, y el resultado es un **número positivo**.

$\frac{1}{7} < \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{1}{7}$ es menor que $\frac{2}{5}$ porque al restarlas $\frac{1}{7} - \frac{2}{5} = \frac{5}{35} - \frac{14}{35} = -\frac{9}{35}$ y el resultado es un **número negativo**.

15.- Compara los siguientes pares de fracciones e indica cuál es la mayor:

- a) $\frac{1}{6}$ y $\frac{5}{8}$
- b) $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{2}$
- c) $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{5}$
- d) $\frac{1}{6}$ y $\frac{6}{3}$

16.- Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones: $\frac{6}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$, $-\frac{1}{5}$



NÚMEROS DECIMALES

Al realizar una fracción (es decir, al hacer una división) podemos obtener un número entero (ej. $4/2=2$) o también un número decimal (ej. $4/3=1.33$). Cuando el resultado sea un número decimal podemos encontrar:



Decimal exacto → Es un número decimal finito (que tiene fin).

Ejemplo: $2/5=0.4$

Decimal periódico → Es un número decimal infinito (que no tiene fin) y en el que, en algunas ocasiones, se repiten las cifras. Ejemplo: $35/11=3,181818...$



RECUERDA QUE...

Fíjate en el gorrito:

$$1,\hat{5} = 1,555555... \quad 248,\overline{38} = 248,38383838...$$

A este gorrito se le llama "**periodo**" e indica que ese número se repetirá hasta el infinito.

5. ¿Cómo resolver problemas?

La primera vez que leemos el enunciado de un problema nos puede parecer una mezcla engorrosa de números, relaciones, preguntas, unidades... Si leemos despacio y entendemos el problema nos resultará mucho más fácil encontrar la solución.



El primer paso para solucionar un problema es comprenderlo, y para eso hay que **leer despacio el problema** y si es necesario **leerlo 2 y 3 veces**. Después, debemos **subrayar lo más importante** y entender lo que nos dice. Esto nos ayudará a establecer qué es lo que nos piden y cómo organizar los datos que tenemos, algo también muy importante.

Es fundamental saber bien que es lo que nos piden, y apuntarlo en un **apartado de datos** de manera adecuada. Un problema bien organizado es casi un problema resuelto.

Una vez obtenido el resultado es fundamental **comprobar** que **la solución** es correcta.



Los **pasos** a seguir en la resolución de problemas son:

1. Leer el enunciado al menos dos veces

Después de leer el enunciado, es importante que seas capaz de contestar todas estas preguntas:

- ¿De qué trata el problema?
- ¿Cuál es la incógnita del problema? ¿Qué es lo que te piden averiguar?
- ¿Cuáles son los datos del problema?
- ¿Has realizado algún problema igual o parecido? Si es así recuerda como lo resolviste.

2. Subrayar los datos y lo que nos piden

3. Apuntar los datos y lo que nos piden en un apartado

4. Crear un plan y ejecutarlo

- Si puedes realiza una estimación mental del resultado.
- Si es posible, realiza un dibujo o esquema que te ayude a visualizar el proceso de resolución.
- Efectúa las operaciones que requieras para hallar la solución. Los cálculos se deben realizar en el orden correcto.
- Escribe la solución de una manera clara y ordenada. Siempre que la solución sea una cantidad numérica, debe ir acompañada de las unidades de medida correspondientes.

5. Comprobar los datos

- Verifica que el resultado cumple con lo que te piden en el enunciado.
- Contrasta el resultado obtenido con la estimación mental que has realizado anteriormente.
- Reflexiona si la solución es lógica según el enunciado del problema.
- Repasa el método que has empleado para hallar la solución.



17.- Si una barra de un metro de longitud pesa $\frac{2}{5}$ Kg ¿cuánto pesará una barra de $\frac{3}{4}$ m?

18.- Se reparte un terreno de 350 Hectáreas entre tres personas. A la primera le corresponde $\frac{2}{7}$ del total, a la segunda la cuarta parte de lo que queda y a la tercera el resto ¿qué cantidad de terreno recibe cada uno?



19.- En unas compras nos hacen el 20% de descuento y nos cargan un 6% de IVA. Comprueba que es indiferente aplicar primero el descuento y a continuación el IVA, que aplicar primero el impuesto y luego el descuento.



✍️ 20.- Al pagar una factura nos han hecho un descuento del 15% de su importe total y la misma ha quedado reducida a 127,5 euros. ¿Cuál era el importe inicial de la factura?

✍️ 21.- Un trayecto de 215 Km lo recorre un coche en 2 horas y otro en $\frac{3}{2}$ de hora. En una hora, ¿qué ventaja saca el segundo coche al primero?

✍️ 22.- Un grifo llena un estanque en 20 horas y otro en 12 horas. Se abre el primer grifo y se echa agua durante una hora. A continuación se abren los dos a la vez durante tres horas y se cierran. ¿Qué fracción del estanque queda por llenar?