Material para el desarrollo de las competencias

Coordinador: Carlos Marchena
Autores: Juan Antonio Díaz y Cristóbal Navarrete

www.anayaeducacion.es

En la web dispone de una rúbrica para la evaluación de este material.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

1. Telepatía con números de dos cifras

Accede a la página http://descartes.cnice.mec.es/matemagicas/index.htm, pulsa la opción **"Magia"** y haz clic en **"Telepatía".**

Realiza varias pruebas. ¿Es magia o es telepatía?

Tratemos de averiguar cómo es posible que nos adivinen el pensamiento.

a) Elige varios números de dos cifras, resta la suma de sus cifras y observa qué tienen en común los resultados obtenidos:

NÚMERO	SUMA DE SUS CIFRAS	DIFERENCIAS
92	9 + 2 = 11	92 – 11 = 81
35		
17		
88		

b) Ahora elige un número, resta la suma de sus cifras y observa qué figura de las de la tabla le corresponde.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
0 ♥	1 ✈	2 ✐	3 ✓	4 ✛	5 ✪	6 @	7 ●	8 ❐	9 ♥	10 ✐	11 ◗	1
12 ♥	13 ●	14 @	15 ◗	16 ✪	17 ❡	18 ♥	19 ❐	20 ✈	21 ♣	22 @	23 ●	2
24 ◗	25 ✐	26 ❡	27 ♥	28 ✓	29 ♣	30 ✓	31 ❝	32 ✓	33 ✛	34 ❐	35 ❡	3
36 ♥	37 ●	38 ➶	39 ✈	40 ◗	41 ✪	42 ♣	43 ●	44 ❡	45 ♥	46 ➶	47 ✪	4
48 ◗	49 ✪	50 @	51 ●	52 ✈	53 ❐	54 ♥	55 ➶	56 @	57 ✛	58 ♣	59 ➶	5
60 ❝	61 ♣	62 ❡	63 ♥	64 ➶	65 ➶	66 ✛	67 ◗	68 ●	69 ✓	70 ❝	71 ✐	6
72 ♥	73 ●	74 ✪	75 ✐	76 ♣	77 ◗	78 ➶	79 ✈	80 ❡	81 ♥	82 ✈	83 ✛	7
84 ◗	85 ●	86 ✈	87 @	88 ✛	89 ❡	90 ♥	91 ➶	92 ✓	93 ♣	94 ❝	95 ◗	8
96 @	97 ♥	98 ❡	99 ♥	100 ➶	101 ❝	102 ✛	103 ➶	104 ✐	105 ◗	106 ❐	107 ❡	9

Esa misma figura aparece varias veces en la tabla, asociada a distintos números. Búscalos y anótalos. ¿Qué tienen todos esos números en común?

c) María estuvo trabajando con este problema. Después de pensar mucho, se dio cuenta de que al restar al número pensado la suma de sus cifras, siempre obtenía un múltiplo de 9. ¿Podría demostrar ella este resultado?

Para hacerlo, tuvo en cuenta (porque necesita utilizarlo) que la descomposición polinómica de un número de dos cifras xy es $10x + y$. Observa:

NÚMERO	DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA	SUMA DE SUS CIFRAS	DIFERENCIAS
92	$9 \cdot 10 + 2$	$9 + 2 = 11$	$92 - (9 + 2) = 81$
29	$2 \cdot 10 + 9$	$2 + 9$	$92 - (2 + 9) = 18$
xy	$10x + y$		
yx			

Acaba tú su demostración completando la tabla.

2. Telepatía con números de tres o más cifras

Si se desea hacer el mismo truco de magia con números de tres cifras, ¿a qué números habría que colocar el mismo símbolo en la tabla? Tratemos de averiguarlo utilizando el procedimiento anterior.

a) Cuál sería la descomposición polinómica de un número de tres cifras, *xyz*? Completa la siguiente tabla:

NÚMERO	DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA	SUMA DE SUS CIFRAS	DIFERENCIAS
321	$3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1$	$3 + 2 + 1 = 6$	$321 - 6 = 315$
845	$8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$		
927			
xyz			
zxy			

b) Observa los resultados obtenidos en la última columna. ¿Tienen alguna relación?

c) ¿Podrías demostrar que si a un número de tres cifras se le resta la suma de sus cifras se obtiene un múltiplo de 9?

d) ¿Se podría generalizar el resultado para cualquier número? Justifica tu respuesta.

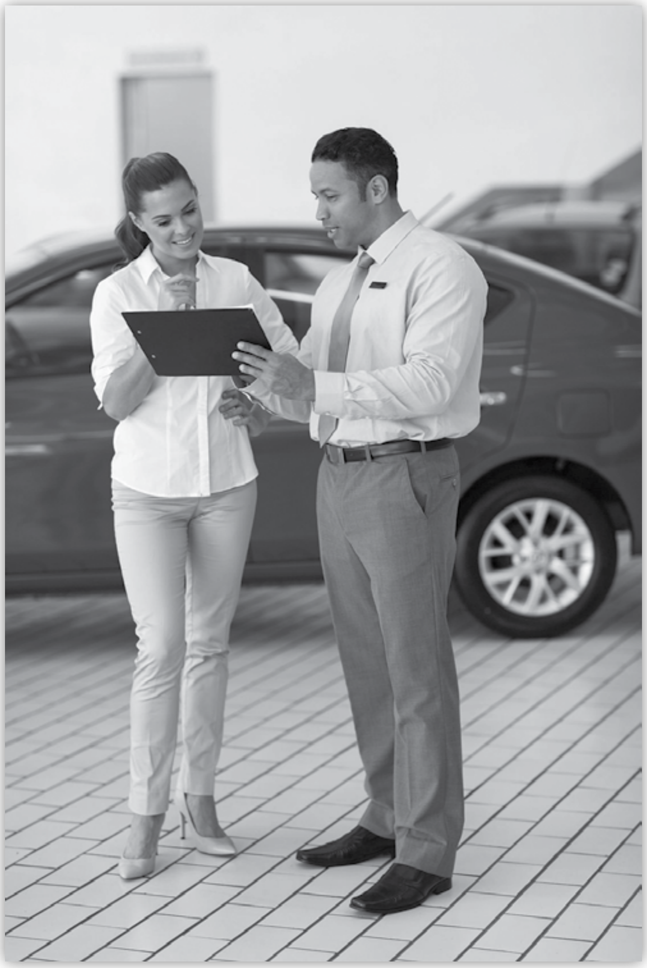
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

1. Un impuesto, el IVA

María, que quiere comprar un vehículo, ha ido a dos concesionarios y le han hecho dos ofertas que le han sorprendido:

- En el concesionario **CARS,** el coche que le interesa cuesta 15 000 €. Le hacen un descuento del 10 % y, posteriormente, le añaden el IVA.
- En el concesionario **AUTOS,** el precio del vehículo es el mismo, pero primero le añaden el IVA y posteriormente le descuentan, también, un 10 %.



a) El porcentaje de IVA que hay que añadir a cada producto no siempre es el mismo. Busca qué significan las siglas IVA y elabora una tabla indicando el porcentaje de IVA que hay que añadir según el tipo de producto.

TIPO IVA	PORCENTAJE DE INCREMENTO	BIEN O SERVICIO
Superreducido		
Reducido		
General		

b) Calcula el precio de los siguientes artículos, con el IVA correspondiente incluido:

ARTÍCULO	PRECIO SIN IVA	PRECIO CON IVA
Aspirinas	1,70 €	
Perfume	40 €	
Billete de tren	25 €	
Barra de pan	0,60 €	
Libro	19,50 €	

Nombre y apellidos: ....

c) Calcula, sin utilizar la calculadora, cuánto tendría que pagar María por el vehículo en cada concesionario.

d) Realiza los mismos cálculos utilizando la calculadora. Ten en cuenta que debes multiplicar por el índice de variación.

Para aumentar un n% debes multiplicar por $1 + \frac{n}{100}$:

15 000 ⊠ 1 ⊞ (n ÷ 100)

Para reducir un n% debes multiplicar por $1 - \frac{n}{100}$:

15 000 ⊠ 1 ⊟ (n ÷ 100)

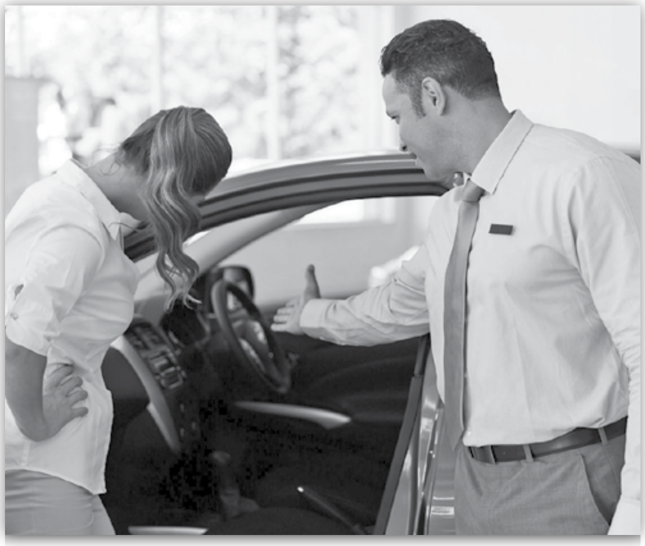
- Concesionario CARS

15 000 ⊠ 10 % − = × IVA % + =

- Concesionario AUTOS

¿Obtienes los mismos resultados que en el cálculo anterior?

e) ¿Qué es preferible para María, que le apliquen primero el descuento y después el impuesto, o al revés?



f) El IVA es un impuesto que el concesionario debe pagar a Hacienda. ¿Qué concesionario pagará mas dinero, en concepto de IVA, por la venta de dicho vehículo?

g) Para el concesionario, ¿qué es mejor, aplicar primero el descuento y después el impuesto o al revés?

Nombre y apellidos: ....

2. Descuentos

En un supermercado hemos encontrado las siguientes ofertas:

- LLÉVESE TRES Y PAGUE DOS
- COMPRE TRES Y LE REGALAMOS UNO
- COMPRE UNO Y LE DESCONTAMOS UN 30 %

a) ¿Qué porcentaje de descuento sobre un producto se aplica en cada caso?

b) ¿Qué oferta te parece más ventajosa?

3. El 0,7 % del PIB

Existen asociaciones que piden que los países desarrollados destinen el 0,7 % de su Producto Interior Bruto (PIB) a ayudas a países en vías de desarrollo.

a) ¿Qué es el PIB?

b) ¿A qué compromiso han llegado los países desarrollados actualmente?

c) En 2013, España aportó 1 656 millones de euros, sobre un PIB de 1 393 040 millones de euros. ¿Qué porcentaje supone?

d) ¿Qué cantidad habría destinado España a los países en vías de desarrollo si hubiese cencedido el 0,7 % de su PIB?

Material para el desarrollo de las competencias. Probabilidad

Nombre y apellidos: ....

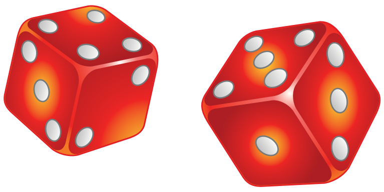
Curso: .... Fecha: ....

La probabilidad es una manera de medir el azar. La probabilidad de que ocurra un suceso es igual al número de casos favorables a ese suceso dividido entre el número de casos posibles.

Por ejemplo, si en una clase en la que hay 10 niños y 15 niñas se hace un sorteo, la probabilidad de que el premio le toque a un niño es $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$, y la de que le toque a una niña, $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

1. Dados y fracciones

Miguel y Julia están enfrascados en una discusión sobre probabilidad. El experimento consiste en lanzar dos dados y formar una fracción propia (esto es, menor que la unidad) con los números obtenidos. Así, por ejemplo, si se obtienen los números 2 y 6 se formaría la fracción $\frac{2}{6}$.



Miguel dice que lo más probable es que se obtenga una fracción reducible. Sin embargo, Julia asegura que lo más probable es que sea irreducible. ¿Quién de los dos lleva razón?

a) Construye una tabla con los distintos resultados que se pueden obtener.

		NUMERADOR					
		1	2	3	4	5	6
DENOMINADOR	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

b) Simplifica las fracciones obtenidas.

c) Calcula la probabilidad de obtener una fracción irreducible y la de obtener una fracción reducible.

Nombre y apellidos: ....

2. Cumpleaños felices

Tres amigas se encuentran en el parque.

María presume de su fecha de nacimiento, ya que ninguno de sus dígitos se repite en ella. Nació el 23 de abril del año 1967 (23-04-1967).

Ana comenta que es más especial la fecha de nacimiento de su hija Violeta, ya que fue un 29 de febrero, concretamente el 29-02-2004.

Teresa dice que el caso más singular es el de su hijo Alberto, ya que la fecha de nacimiento de su hijo forma un número capicúa. Alberto nació el 10 de febrero de 2001 (10-02-2001).

Después de mucho discutir, llegaron a un acuerdo: deberían calcular cuál de los tres casos tiene mayor probabilidad de que ocurra durante los próximos diez años (desde el 1 de enero de 2011 al 31 de diciembre de 2020).

¿Podrías ayudarlas?

- Veamos primero el caso de VIOLETA.

  a) Averigua qué condición deben cumplir los dígitos de un año para que sea bisiesto.

  b) ¿Cuántos años bisiestos hay entre 2011 y 2020, ambos incluidos?

  c) ¿Cuál es la probabilidad de nacer un 29 de febrero entre las fechas indicadas?

- El caso de ALBERTO es fácil.

  d) ¿Cuántos números capicúas de dos cifras existen?

  ¿Y de tres cifras?

  ¿Y de cuatro cifras?

Nombre y apellidos: ....

e) Un número capicúa de ocho cifras se puede formar uniendo dos números de cuatro cifras: ABCDDCBA

Si sustituyes DCBA por los posibles años entre 2011 y 2020, rápidamente podrás formar todos los números capicúas que buscas.

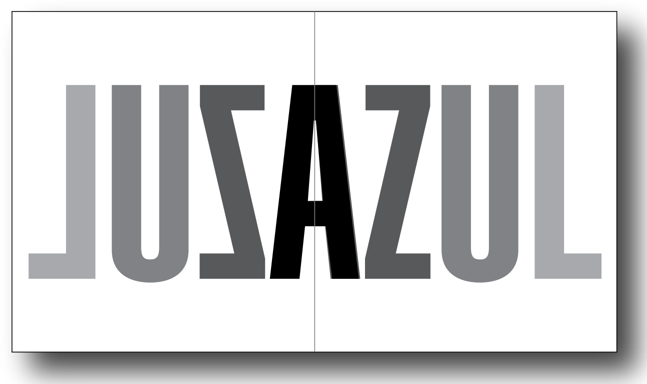
f) ¿Cuál es la probabilidad de que la fecha de nacimiento forme un número capicúa?

g) Busca en la Wikipedia el significado de la palabra *palíndromo*. Pon ejemplos de palíndromos no numéricos como los siguientes:

Allí ves Sevilla

Amor a Roma

Dábale arroz a la zorra el abad



- El caso de MARÍA parece complicado.

h) Si empiezas probando por el año e intentas completar la fecha añadiendo el mes, te darás cuenta, rápidamente, del resultado.

¿Cuál es la probabilidad de que la fecha de nacimiento tenga todos los dígitos distintos?

Nombre y apellidos: ....

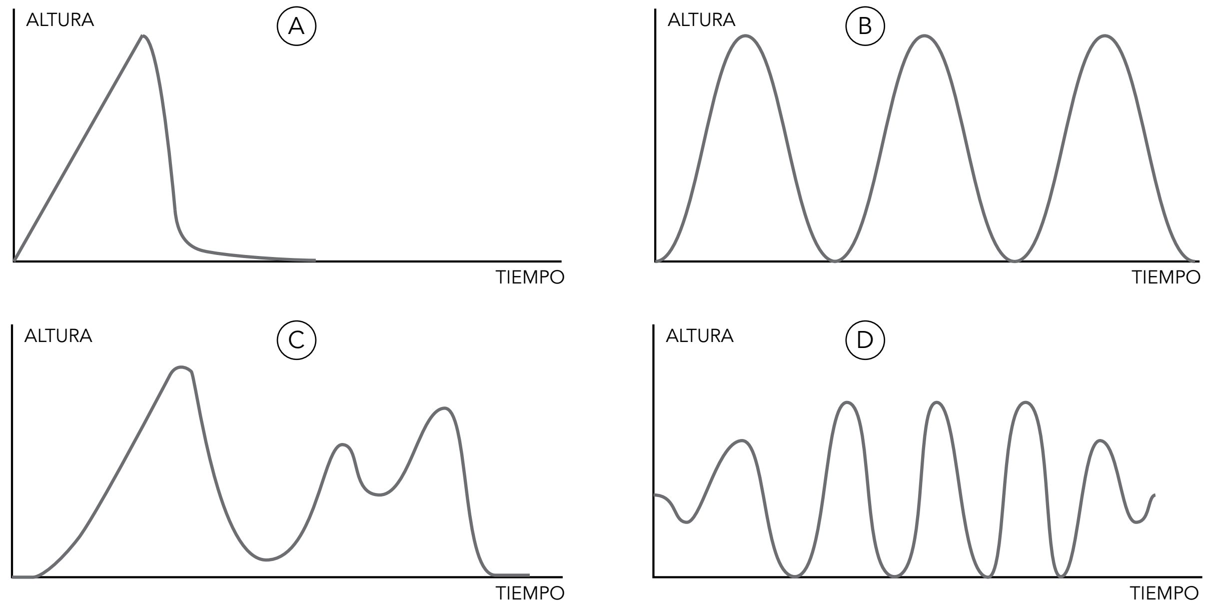
Curso: .... Fecha: ....

1. En el parque de atracciones

Marcos se ha ido con sus amigos al parque de atracciones. Se han montado en muchas de las atracciones, sobre todo en las que suben y bajan a gran velocidad. Las que más les ha gustado han sido estas cuatro:

- La *montaña rusa*, que sube cuestas muy empinadas y luego baja a gran velocidad, realiza rizos que te dejan cabeza abajo…
- El *galeón pirata*, que se balancea cada vez más hasta quedarse en vertical, una vez arriba y otra abajo.
- La lanzadera, que sube despacio en vertical y baja en caída libre.
- La noria, que da vueltas muy despacio pero sube a mucha altura, desde donde se pueden contemplar unas vistas preciosas.

Estas cuatro gráficas muestran la altura a la que se encuentra Marcos cada vez que sube a una de las atracciones:



a) Asocia cada gráfica con su correspondiente atracción de feria.

b) ¿Cuál de ellas es periódica en todo su trayecto?

c) ¿Por qué una de ellas empieza y acaba a una cierta altura del suelo?

Nombre y apellidos: ....

Hay una atracción que se llama el *tirachinas*. Consiste en una cabina esférica en la que entran los ocupantes. De esta esfera, que está anclada al suelo, salen dos gomas muy largas que llegan a los extremos de dos grandes grúas. Cuando las gomas están muy tensas, se suelta el anclaje y la cabina sale despedida a gran velocidad hasta llegar a una gran altura, hasta que las gomas no la dejan subir más. Después, se van destensando las gomas hasta dejar anclada al suelo la cabina nuevamente.

d) Dibuja sobre estos ejes la altura a la que se encontraría Marcos si se montara en esta atracción.

ALTURA

TIEMPO

e) Dibuja sobre estos otros ejes la altura a la que estaría Marcos otro día que fuera a hacer *goming*. Se trata de saltar de un puente atado de los pies a una goma elástica que deja que el que salta se acerque mucho al suelo sin tocarlo. Después de subir y bajar unas cuantas veces, se va soltando la goma para situar al saltador en el suelo.

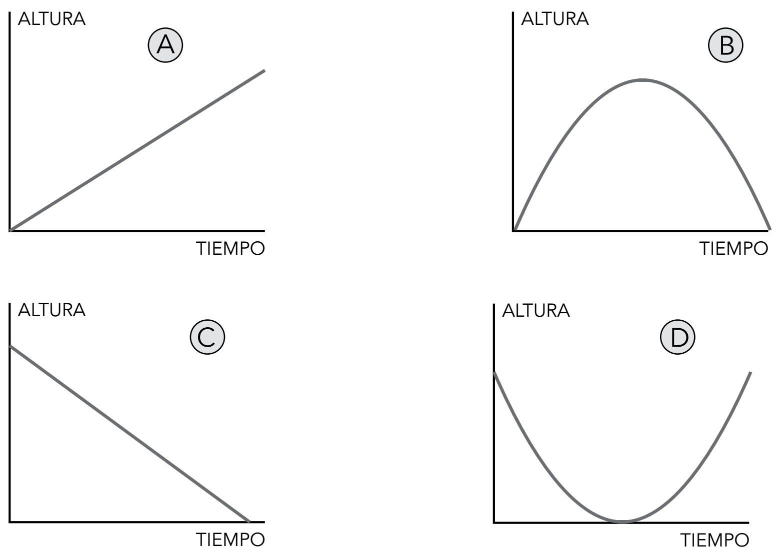
ALTURA

TIEMPO

Nombre y apellidos: ....

2. Más atracciones

Las siguientes gráficas representan la función *altura-tiempo* de algunas atracciones del parque para niños pequeños.



a) Escribe una breve explicación de lo que tú interpretas que puede hacer cada una.

b) Asocia cada una de las siguientes expresiones analíticas a una gráfica del apartado anterior.

I. $y = -x^2 + 8x$ II. $y = \frac{3x}{4}$ III. $y = -\frac{3x}{4} + 20$ IV. $y = x^2 - 8x + 16$

3. Entrada en el parque

Para entrar en el parque y montar en las atracciones hay dos opciones de entrada, que dependen del número de veces que quieras disfrutar de las atracciones:

A. Pagas 20 euros por entrar y 5 euros por cada atracción en la que te montes.

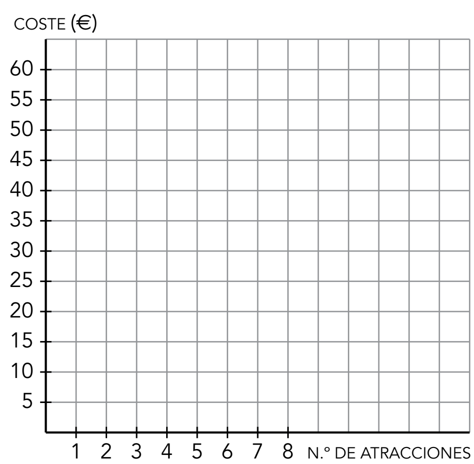
B. Pagas 60 euros y puedes montar en todas las atracciones que quieras.

a) Escribe las expresiones analíticas de las dos opciones que relacionan el número de atracciones a las que montas con el dinero que te gastas, en euros.

b) Representa las dos funciones juntas en los siguientes ejes. Recuerda que puedes representar los puntos, pero no puedes unirlos.

c) ¿A cuántas atracciones debe montarse Marcos para que le dé lo mismo elegir una u otra opción de pago?

d) ¿Se trata de una función continua? ¿Por qué no se pueden unir los puntos?



V

Material para el desarrollo de las competencias. Geometría y funciones

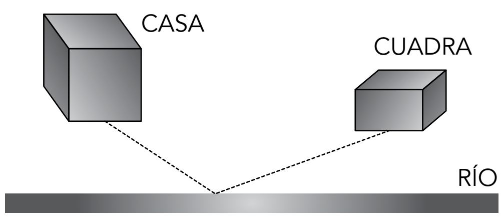
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

1. Paseos por el río

Antonio tiene que llevar agua, todos los días, a la cuadra. Para ello debe ir, primero, desde su casa al río a cogerla y, posteriormente, desde el río a la cuadra.

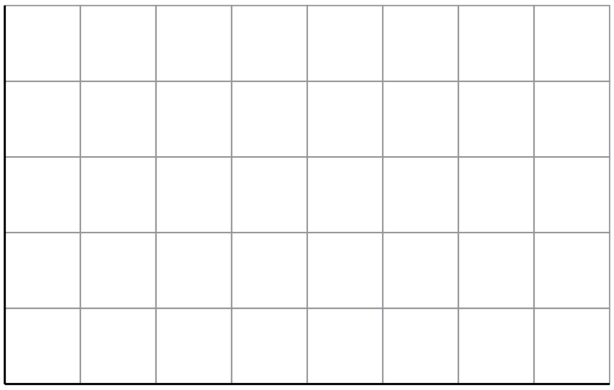
La situación es la que ves a la derecha.



¿En qué punto del río debe coger el agua para que el camino sea lo más corto posible?

Intentaremos resolver el problema gráficamente, viendo las distintas posibidades y midiendo.

a) Representa la situación en unos ejes cartesianos: el río será el eje de abscisas (OX), la casa estará en el punto $A(0, 4)$ del eje de ordenadas y la cuadra, en el punto $B(7, 3)$.



b) Como todos sabemos, el camino más corto entre dos puntos es una línea recta.

Imagina que el agua del río puede cogerla en los puntos en los que las coordenadas son enteras. Mide las distancias desde cada uno de esos puntos a la casa y a la cuadra. Súmalas.

¿Cuál de los resultados es el menor?

PUNTO	DISTANCIA A **A**	DISTANCIA A **B**	DISTANCIA TOTAL
(0, 0)			
(1, 0)			
(2, 0)			
(3, 0)			
(4, 0)			
(5, 0)			
(6, 0)			
(7, 0)			

c) Resuelve nuevamente el problema, pero sin utilizar una regla para medir: construye triángulos rectángulos y usa el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre cada dos de esos puntos.

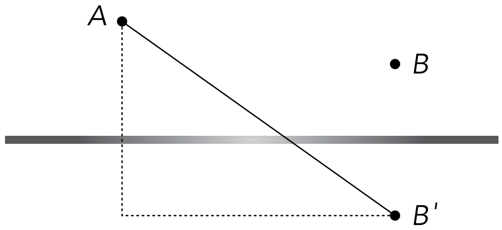
Nombre y apellidos: ....

PUNTO	DISTANCIA A **A**	DISTANCIA A **B**	DISTANCIA TOTAL
(0, 0)			
(1, 0)			
(2, 0)			
(3, 0)			
(4, 0)			
(5, 0)			
(6, 0)			
(7, 0)			

d) Vamos a tratar de resolver el problema utilizando simetrías y álgebra.

- Escribe las coordenadas del simétrico del punto $B(7, 3)$ respecto al eje de abscisas OX. Lo llamaremos B'.

- Calcula, utilizando el teorema de Pitágoras, la distancia del punto A al punto B'. Comprueba que el resultado es el mismo que has obtenido anteriormente.



- Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B', que tendrá una expresión de la forma $y = ax + b$. Para obtener los valores de a y b, sustituye las coordenadas de los puntos A y B' en dicha expresión.

- Calcula la intersección de la recta que pasa por AB' con el eje OX. Para ello, resuelve el sistema que forman sus ecuaciones. ¿Obtienes la misma solución?

2. Simetría en la naturaleza

La simetría está presente en la naturaleza. Busca ejemplos en los que esté presente, en el mundo animal, en el vegetal o en el mineral.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

1. Supermercado

Juan, cuando va al supermercado, se fija en los precios de muchos artículos y se pregunta las cosas más insospechadas. En la tabla se indican los precios y características de algunos productos que anotó el último día que fue al supermercado:

PRODUCTO	PESO O CONTENIDO	PRECIO
Papel higiénico	6 rollos (30 m aprox. cada uno)	1,85 €
Pasta de dientes	75 *ml*	2,50 €
Agua mineral sin gas	33 *cl*	25 cts
Agua mineral sin gas	50 *cl*	30 cts
Agua mineral sin gas	1,5 *l*	55 cts
Agua mineral sin gas	5 *l*	1,20 €
Galletas	800 g (50 galletas aprox.)	2,20 €
Suavizante concentrado	1,5 *l* (50 lavados)	2,15 €
Suavizante diluido	3 *l* (30 lavados)	2,20 €
Arroz	1 kg	1,20 €
Gel	750 *ml*	1,70 €
Naranjas de zumo	5 kg	2,90 €

a) Compara los precios que ha anotado Juan con los de otros supermercados. ¿Existe mucha diferencia de precios? Si no tienes un supermercado a mano, puedes buscar dichos precios a través de Internet.

b) ¿Podrías ayudarle con las siguientes cuestiones?

- ¿Cuánto cuesta un metro de papel higiénico?

- ¿Cuánto cuesta un litro de pasta de dientes?

- ¿Cuánto cuesta una galleta?

Nombre y apellidos: ......

c) ¿Qué sale más barato: comprar agua mineral sin gas en botellas de 33 *cl*, en botellas de 50 *cl*, en botellas de litro y medio o en botellas de 5 litros? ¿Qué diferencia habría de precio, en cada caso, si compráramos 60 litros de agua?

LITROS DE AGUA	CAPACIDAD	NÚMERO DE BOTELLAS	PRECIO POR BOTELLA	TOTAL
60	0,33 *l*			
60	0,50 *l*			
60	1,5 *l*			
60	5 *l*			

d) ¿Es, en realidad, más económico comprar un suavizante concentrado que diluido?

e) Para resolver las siguientes cuestiones tendrás que hacer cálculos aproximados.

- ¿Cuánto costará un grano de arroz?

- ¿Cuánto costará un vaso de zumo de naranjas recién exprimidas?

- ¿Cuánto costará el gel que utilizas en un baño o ducha?

VII

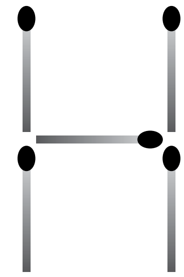
Material para el desarrollo de las competencias. Pitágoras

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

1. Cuadrados perfectos

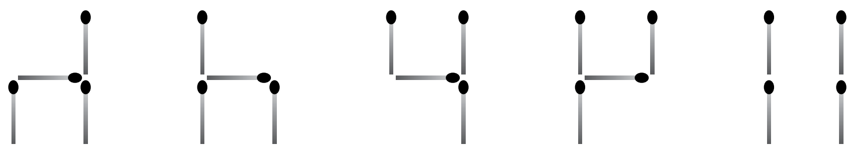
María propuso un reto a su profesor de Matemáticas:



- Quitando solamente una cerilla de esta figura, debes conseguir un cuadrado perfecto.
- Eso es imposible, resopló el profesor, pero se puso manos a la obra.
- Tan solo tenemos 5 cerillas, bastaría con ir probando una a una hasta agotar todas las posibilidades.

Antes de seguir leyendo, toma tú cinco cerillas, colócalas como se indica en el dibujo e intenta conseguir un cuadrado perfecto quitando una de ellas.

El profesor no consiguió construir un cuadrado. Aquí tienes los distintos resultados que obtuvo:



María le comentó que había truco:

- Lo que se puede construir es un 4, que es un cuadrado perfecto, concretamente el cuadrado de 2. Observa la tercera figura.

Tras esto, el profesor le propuso a María nuevos retos:

a) ¿Cuántos cuadrados perfectos hay entre los números 1 900 y 2 100?

b) Si una persona contaba con x años de edad en el año x^2, ¿qué edad tenía en 1985?

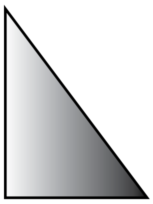
Para resolver el problema puedes utilizar los resultados obtenidos en el problema anterior, pero ten en cuenta que la persona debe seguir viva en 1985. Por ejemplo:

- Podría tener 40 años en $1\,600 = 40^2$, pero no seguiría viva en 1985.
- También podría tener 50 años en el año $2\,500 = 50^2$, pero no habría nacido antes de 1985.

Nombre y apellidos: ....

2. Terna pitagórica

Observa que la terna de números 3, 4 y 5 son naturales y cumplen el teorema de Pitágoras: $5^2 = 3^2 + 4^2$.



Por este motivo se la llama *terna pitagórica*.

a) Escribe otras ternas pitagóricas.

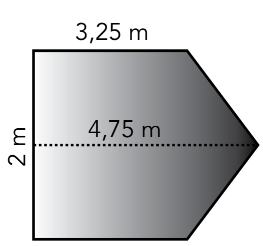
b) ¿Existe alguna relación entre la terna 3, 4 y 5 y las ternas que has obtenido?

c) Dibuja un triángulo cuyos lados midan 3 cm, 4 cm y 5 cm. ¿Qué tipo de triángulo obtienes?

d) Dibuja otro triángulo cuyos lados midan lo mismo que otras ternas que hayas obtenido. ¿Existe alguna relación entre los triángulos construidos?

3. Mi extraña habitación

Necesito pintar el suelo y las paredes de mi dormitorio, que tiene una planta como figura en el dibujo. Hechas todas las mediciones necesarias y habiéndome informado de los precios de los materiales para pintar, tengo todos estos datos:



- La altura de la habitación es de 2,5 m.
- Hay una ventana que mide 1,5 m × 1,5 m.
- La puerta tiene 1 m de ancho y 2 m de altura.
- La pintura necesaria para pintar un metro cuadrado cuesta 1,50 €.

¿Cuánto me costará pintar la habitación, techo incluido?

4. Música y matemáticas

La Matemáticas están más presentes en la vida cotidiana de lo que te imaginas. Por ejemplo, en la música. Busca información sobre este tema.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

1. Mosaicos y cenefas

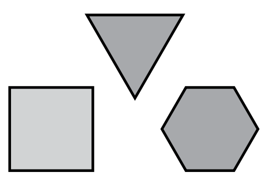
Un mosaico es un recubrimiento del plano mediante figuras geométricas. Un mosaico puede superponerse en sí mismo mediante distintos movimientos: traslaciones, giros o simetrías.

a) Busca mosaicos que encuentres a tu alrededor y dibújalos sobre una cuadrícula.

b) Un **mosaico regular** es aquel que está formado por un único tipo de polígono regular.

Investiga, dibujando, qué polígonos regulares rellenan el plano.

c) Demuestra que, entre los polígonos regulares, solo los triángulos, los cuadrados y los hexágonos llenan el plano.

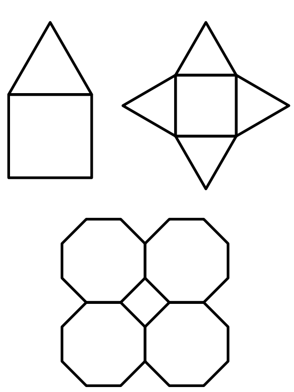


d) Completa la siguiente tabla con el valor de los ángulos interiores de los polígonos regulares que tienen el número de lados indicado:

POLÍGONO REGULAR (N.° DE LADOS)	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
ÁNGULO INTERIOR (GRADOS SEXAGESIMALES)	60°	90°								

e) Un **mosaico semirregular** es aquel que está formado por dos o más tipos de polígonos regulares.

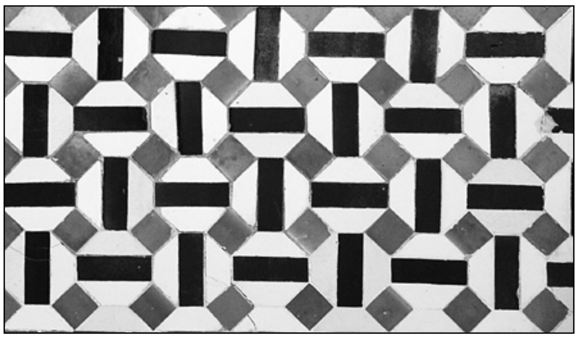
Dibuja sobre papel cuadriculado algunos mosaicos semirregulares. Aquí tienes, como ejemplo, algunas piezas compuestas por dos tipos de polígono regular.

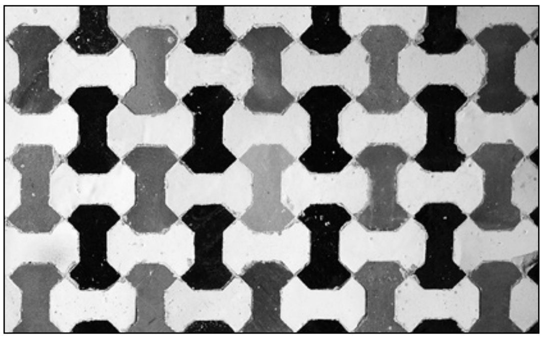


Nombre y apellidos: ....

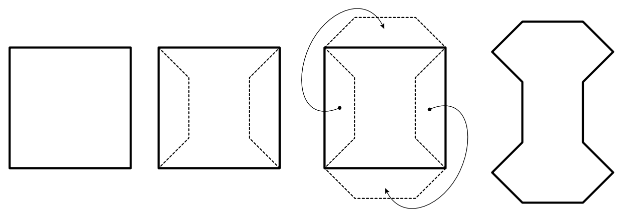
f) Un mosaico irregular es aquel que está formado por polígonos irregulares.

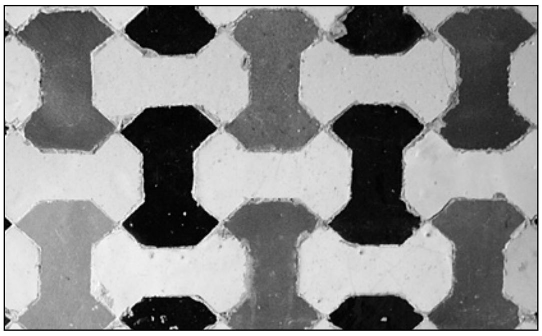
Dibuja, en un papel cuadriculado, algunos ejemplos de mosaicos construidos con polígonos no regulares. Observa aquí algunos ejemplos:

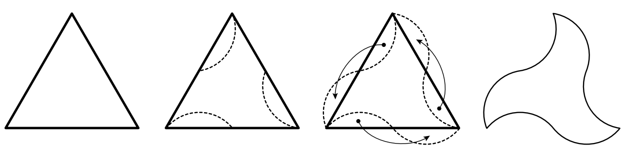




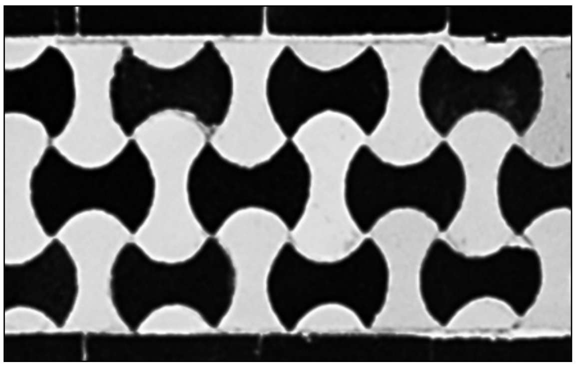
g) Algunos mosaicos irregulares están formados a partir de polígonos regulares:







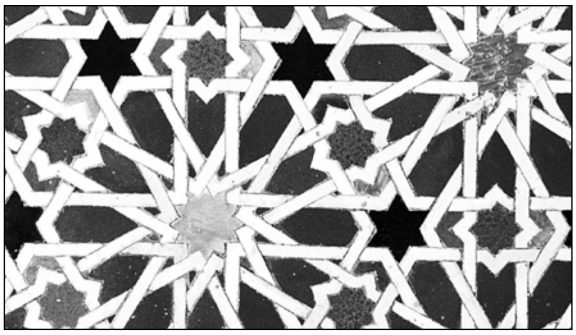
Estudia cómo se han obtenido los siguiente mosaicos a partir de polígonos regulares:

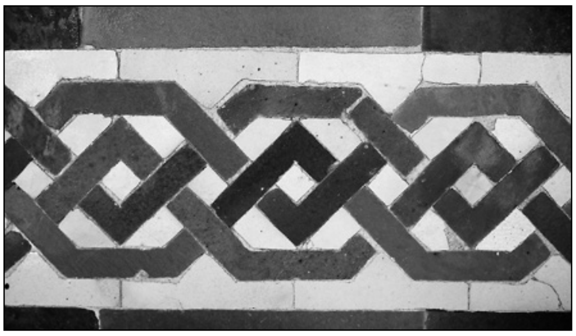


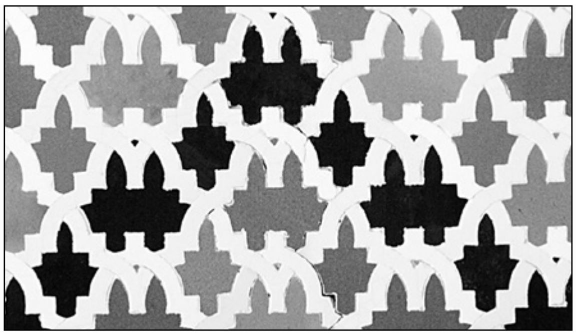
Nombre y apellidos: ....

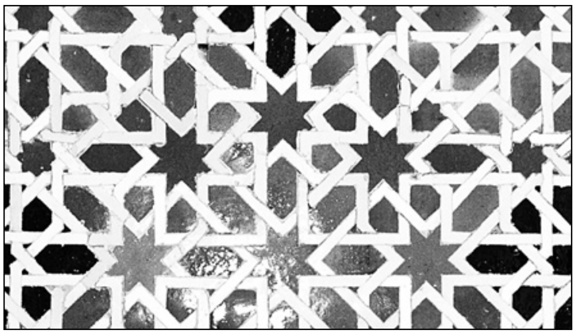
h) Clasifica los mosaicos que aparecen en las siguientes fotografías tomadas en el Real Alcázar de Sevilla y en la Alhambra de Granada.

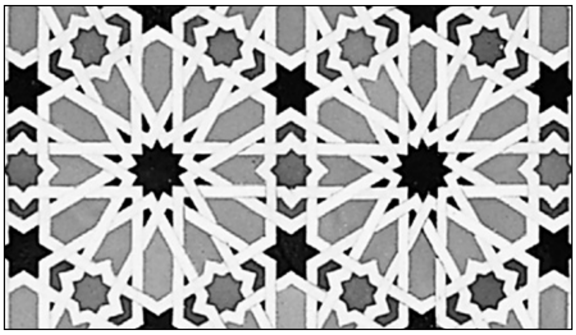
A


B


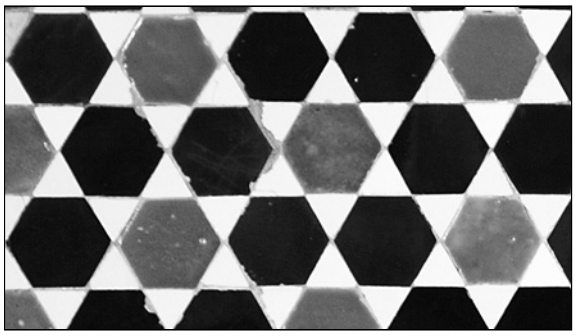
C


D


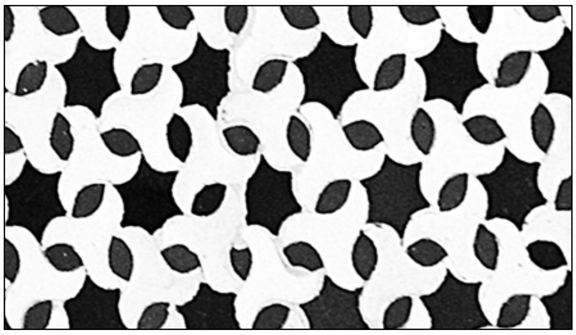
E


F


G


H


I


J


Material para el desarrollo de las competencias. Estadística

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

1. Calificaciones

Las notas que obtuvieron los alumnos de 3.° ESO A de cierto centro en el último examen de Matemáticas fueron las siguientes:

NOTAS EN MATEMÁTICAS	FRECUENCIA ABSOLUTA
Insuficiente (tomar como valor, 2)	x
Suficiente (tomar como valor, 5)	7
Bien (tomar como valor, 6)	$2x$
Notable (tomar como valor, 7)	5
Sobresaliente (tomar como valor, 9)	1

a) Halla el valor de x sabiendo que, en total, hay 25 alumnos y alumnas en la clase.

b) Calcula su nota media.

c) ¿Cuál es la calificación más repetida entre los alumnos de dicha clase?

d) ¿Qué tanto por ciento de personas han aprobado el examen?

e) María está satisfecha porque la mitad de la clase obtuvo menor o igual nota que ella, aunque la otra mitad obtuvo mayor calificación o igual. ¿Cuál es la nota de María?

f) Halla el tanto por ciento de alumnos y alumnas que obtuvieron notable o sobresaliente.

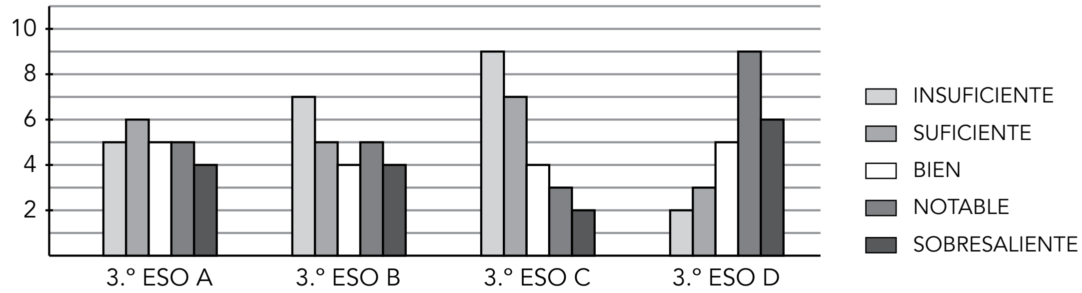
Nombre y apellidos: ....

g) Si el profesor ha decidido subir un punto a todos los estudiantes de la clase por buen comportamiento, ¿cuál será la nueva nota media? ¿Y el porcentaje de aprobados?

h) Elige el gráfico que te parezca más adecuado y representa los datos anteriores.

2. Más calificaciones

Las siguientes gráficas representan las notas finales de Matemáticas que obtuvieron los alumnos y alumnas de los cursos 3.° ESO A, 3.° ESO B, 3.° ESO C y 3.° ESO D del mismo centro en el curso 2008-2009.



a) ¿Qué grupo tiene mejor nota media? ¿Qué grupo tiene la media más baja?

b) ¿En qué grupo están los estudiantes que sacaron en dicho examen las mejores notas?

c) ¿Qué grupo de los anteriores posee un nivel más homogéneo en Matemáticas?

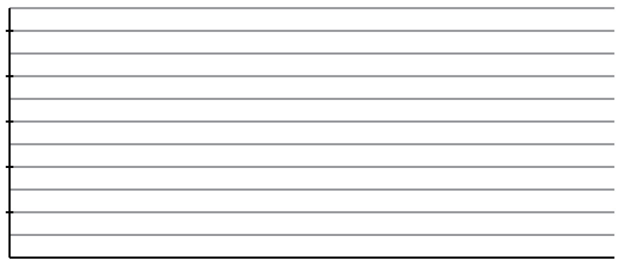
d) ¿En qué grupo o grupos hay un nivel más disperso en cuanto a las calificaciones de Matemáticas?

Nombre y apellidos: ....

3. Calificaciones de tus compañeros y compañeras

Realiza una encuesta a tus compañeros y compañeras sobre las calificaciones que obtuvieron en el último examen de Matemáticas.

a) Haz una representación gráfica de dichos resultados.



¿A qué grupo de los anteriores se aproxima más?

b) Imagina que uno de tus compañeros ha obtenido en sus últimos exámenes de Matemáticas y Ciencias estas calificaciones:

MATEMÁTICAS	5,25	6	6,5	5	7,25
CIENCIAS	5,75	6,5	7	5,5	7,75

- Se examina de Matemáticas y obtiene un 6,25. ¿Qué nota esperará sacar en Ciencias si sigue la tendencia de los últimos exámenes?

- ¿Podrías obtener una fórmula que relacione sus calificaciones en Matemáticas (x) con sus calificaciones en Ciencias (y)?

Material para el desarrollo de las competencias. Álgebra II

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

1. Un acertijo

Te proponemos el siguiente acertijo:

"Piensa un número, súmale 5, resta 3, suma 10, resta 9, suma 8, resta 4, resta el número que habías pensado al principio".

Si no te has confundido, el resultado es 7.

a) ¿Se obtendrá siempre el mismo resultado? Compruébalo con otros números.

b) Demuestra matemáticamente que siempre se obtiene 7. Para ello, llama x al número que se piensa y efectúa las operaciones indicadas.

2. Acertijos

a) Piensa un número, súmale 5, resta 2, multiplica por 2, suma 6, divide entre 2, resta el número que habías pensado al principio.

¿Cuál es el resultado? Comprueba que siempre se obtiene el mismo resultado y demuéstralo matemáticamente.

b) Piensa un número, súmale 8, resta 5, multiplica por 3, resta 6, divide entre 3, resta el número que habías pensado al principio.

¿Cuál es el resultado? Comprueba que siempre sale el mismo resultado y demuéstralo matemáticamente.

Nombre y apellidos: ....

c) Piensa un número, súmale 5, resta 1, suma 8, resta 4, suma 3, resta 2, resta el número que habías pensado al principio y halla la raíz cuadrada del resultado obtenido.

¿Cuál es el resultado? Comprueba que siempre se obtiene el mismo resultado y demuéstralo matemáticamente.

d) Inventa un acertijo y propónselo a tus compañeros (cuida que el resultado siempre sea el mismo y no dependa del número que se haya pensado).

3. Acertijos a la inversa

a) María le propuso a su profesor hacer el juego a la inversa: plantear primero una igualdad matemática y, a partir de ella, enunciar el acertijo. ¿Cuál sería el enunciado de este acertijo y cuál es el resultado que siempre obtendremos?

$$(5 \cdot x + 3 - 1 + 4 - 1) : 5 - x$$

b) ¿Cuál sería el enunciado y el resultado del siguiente acertijo?

$$\frac{6 \cdot x - 5 + 2 \cdot x - 2 + 3}{4} + 1 - 2 \cdot x$$

4. Lenguaje algebraico

a) Expresa en lenguaje algebraico las siguientes situaciones:

I. El doble de un número más su tercera parte es ocho.

II. La mitad de un número menos su doble es veinticuatro.

III. El cuadrado de un número menos quince unidades es igual al doble de dicho número más una unidad.

IV. La raíz cuadrada de un número más la mitad de dicho número es doce.

b) Escribe en lenguaje algebraico las siguientes expresiones o fórmulas:

I. La densidad de un cuerpo en función de su masa y el volumen que ocupa.

II. La velocidad de un móvil en función del espacio recorrido y el tiempo empleado.

III. Fórmula para calcular el índice de masa corporal.

IV. Relación entre un kilobyte y un gibabyte.

V. Volumen de un prisma.

XI

Material para el desarrollo de las competencias. Fracciones

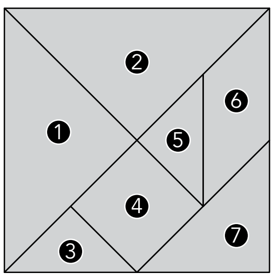
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

1. Tangram

El tangram es un puzzle construido a partir de un cuadrado. Busca el origen de este entretenido pasatiempo y construye uno sobre una cartulina.

a) ¿Existe alguna relación entre el área de las figuras que componen el tangram?

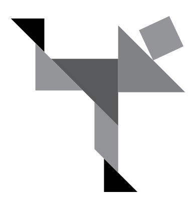


b) ¿Qué fracción, con respecto al área total, corresponde a cada figura?

FIGURA	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
FRACCIÓN							

c) Tengo un pequeño tangram cuya área total es de 36 cm². ¿Cuál es el área de cada pieza?

FIGURA	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
ÁREA (cm²)							



d) Mi amigo Mario tiene un tangram, y el lado de su figura n.º 4 mide 4 cm. ¿Cuál es el área de cada una de sus piezas?

FIGURA	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
ÁREA (cm²)							

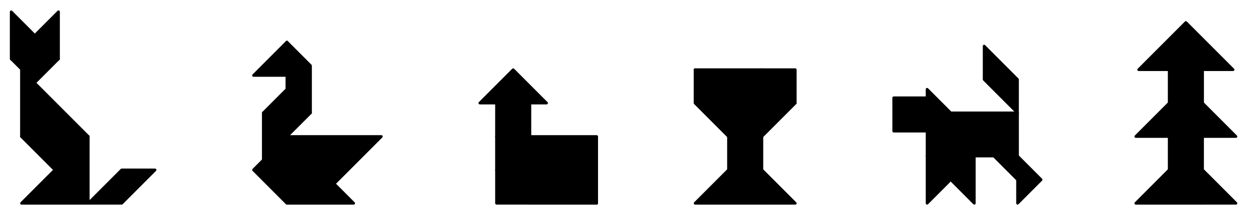
e) Mi amiga María se acaba de comprar un tangram. El lado del cuadrado completo mide 8 cm. ¿Cuál es el perímetro de cada figura?

FIGURA	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
PERÍMETRO							

Nombre y apellidos: ....

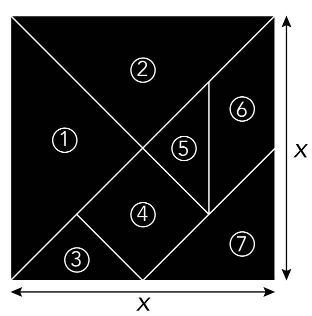
f) ¿Existe alguna relación entre los perímetros que has calculado anteriormente?

g) Intenta construir alguna de las siguientes figuras (no olvides que debes utilizar las siete piezas del tangram).



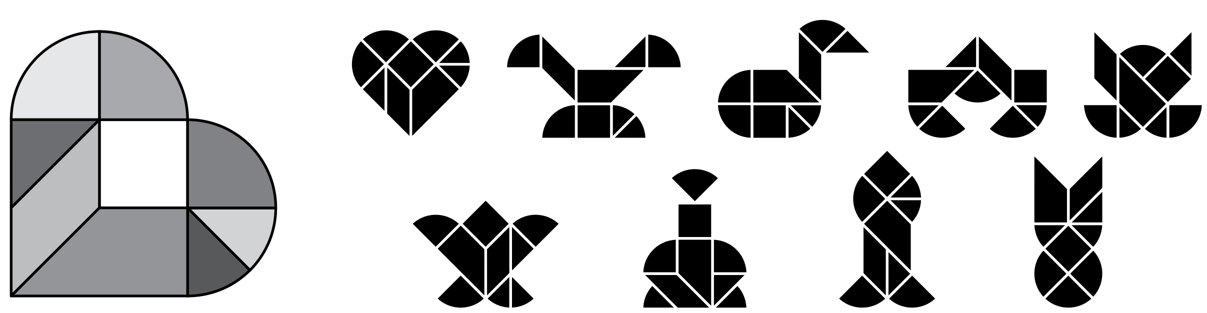
h) Calcula el área y el perímetro de las figuras anteriores. ¿Podrías sacar alguna conclusión?

i) Si el lado del cuadrado grande de un tangram mide x cm, calcula el área de todas la figuras en función de x.



j) Conocido el perímetro y el área de una de las figuras del tangram, ¿se podría obtener el área y el perímetro del resto de las figuras?

k) Construye sobre una cartulina un nuevo modelo de tangram. Puedes utilizar cualquier figura, geométrica o no. No olvides dibujar las propuestas y sus soluciones. Aquí tienes un ejemplo, el *cardio tangram*.



l) ¿Podrías construir un puzzle para demostrar el teorema de Pitágoras?

I. Álgebra I

1. Telepatía con números de dos cifras

a)

NÚMERO	SUMA DE SUS CIFRAS	DIFERENCIAS
92	9 + 2 = 11	92 – 11 = 81
35	3 + 5 = 8	35 – 8 = 27
17	1 + 7 = 8	17 – 8 = 9
88	8 + 8 = 16	88 – 16 = 72

Los resultados obtenidos son, todos, múltiplos de 9.

b) Los números son el 0 y los múltiplos de 9:

0 - 9 - 18 - 27 - 36 - 45 - 54 - 63 - 72 - 81 - 90 - 99

c)

NÚMERO	DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA	SUMA DE SUS CIFRAS	DIFERENCIAS
92	$9 \cdot 10 + 2$	9 + 2	92 – (9 + 2) = 81
29	$2 \cdot 10 + 9$	2 + 9	29 – (2 + 9) = 18
xy	$10x + y$	$x + y$	$10x + y - (x + y) = 9x$
yx	$10y + x$	$y + x$	$10y + x - (y + x) = 9y$

2. Telepatía con números de tres o más cifras

a)

NÚMERO	DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA	SUMA DE SUS CIFRAS	DIFERENCIAS
321	$3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1$	3 + 2 + 1 = 6	321 – 6 = 315
845	$8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$	8 + 4 + 5 = 17	845 – 17 = 828
927	$9 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7$	9 + 2 + 7 = 18	927 – 18 = 909
xyz	$100x + 10y + z$	$x + y + z$	$99x + 9y = 9 \cdot (11x + y)$
zxy	$100z + 10x + y$	$z + x + y$	$99z + 9x = 9 \cdot (11z + x)$

b) Son, todos ellos, múltiplos de 9.

c) $100x + 10y + z - (x + y + z) = 99x + 9y =$
$= 9 \cdot (11x + y)$

d) Sí, porque siempre se obtiene un múltiplo de 9. Por ejemplo, con números de cuatro cifras $xyzt$:

$1\,000x + 100y + 10z + t - (x + y + z + t) =$
$= 999x + 99y + 9z = 9 \cdot (111x + 11y + z)$

II. Porcentajes

1. Un impuesto, el IVA

a) IVA, Impuesto sobre el Valor Añadido.

TIPO IVA	PORCENTAJE DE INCREMENTO	BIEN O SERVICIO
Superreducido	4 %	Algunos alimentos, libros y periódicos, especialidades farmacéuticas.
Reducido	10 %	Algunos alimentos, productos sanitarios, transporte de viajeros y hostelería.
General	21 %	En otros casos.

b)

ARTÍCULO	PRECIO SIN IVA	PRECIO CON IVA
Aspirinas	1,70 €	1,77 €
Perfume	40 €	48,40 €
Billete de tren	25 €	27,50 €
Barra de pan	0,60 €	0,62 €
Libro	19,50 €	20,28 €

c) CARS: 15 000 – 1 500 + 2 835 = 16 335

AUTOS: 15 000 + 3 150 – 1 815 = 16 335

d) Se obtienen los mismos resultados.

$x \cdot 0,9 \cdot 1,21 = 1,089x$

$x \cdot 1,21 \cdot 0,9 = 1,089x$

e) Para María es indiferente.

f) El concesionario AUTOS, porque tiene que aplicarlo a una cantidad mayor.

g) Para el concesionario es mejor aplicar primero el descuento.

2. Descuentos

a) LLÉVESE TRES Y PAGUE DOS. El descuento sobre cada producto es del 33,33 %.

COMPRE TRES Y LE REGALAMOS UNO.

El descuento en cada producto es del 25 %.

COMPRE UNO Y LE DESCONTAMOS UN 30 %. Descuentan en cada producto un 30 %.

b) La oferta más ventajosa es la primera, siempre que necesitemos comprar tres productos. Si solo necesitásemos comprar uno, nos convendría la tercera.

3. El 0,7% del PIB

a) El producto interior bruto, PIB, es el total de la producción de un país en bienes y servicios durante un año.

b) Respuesta no cerrada.

c) 0,12 %

d) 9 751 millones de euros.

III. Probabilidad

1. Dados y fracciones

a) y b)

		NUMERADOR					
		1	2	3	4	5	6
DENOMINADOR	1	$\frac{1}{1} = 1$					
	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2} = 1$				
	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3} = 1$			
	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4} = 1$		
	5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5} = 1$	
	6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6} = 1$

c) Probabilidad de obtener una fracción irreducible: 12/21

Probabilidad de obtener una fracción reducible: 9/21

2. Cumpleaños felices

a) Para que un año sea bisiesto, debe ser múltiplo de 4, excepto si es divisible entre 100, pero no entre 400.

b) Hay tres: 2012, 2016, 2020.

c) 3/3 653

d) De dos cifras hay 9 números capicúas, tantos como números de una cifra distinta de 0.

De tres cifras hay 90 números capicúas, tantos como números de dos cifras. De cuatro cifras también hay 90.

e) 11 022 011, 21 022 012, 31 022 013, 41 022 014, 51 022 015, 61 022 016, 71 022 017, 81 022 018, 91 022 019, 02 022 020.

f) Las posibles fechas de nacimiento son 11/02/2011, 21/02/2012 y 02/02/2020. La probabilidad pedida es, por tanto, 3/3 653.

g) Palíndromo es una palabra, frase o número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

h) La probabilidad es nula.

IV. Gráficas

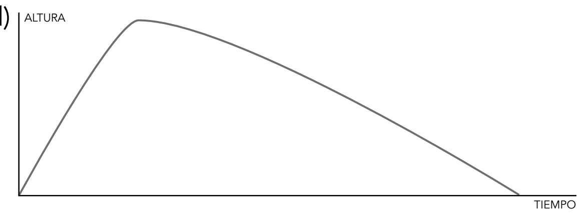
1. En el parque de atracciones

a) A. Lanzadera; B. Noria; C. Montaña rusa; D. Galeón pirata.

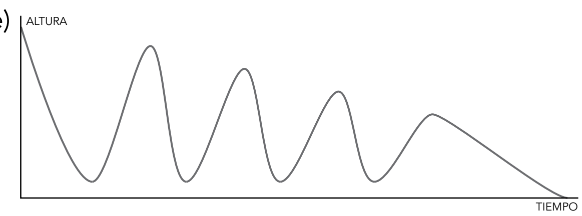
b) B. Noria.

c) El galeón pirata, porque está a una cierta altura del suelo antes de comenzar a moverse.

d)



e)



2. Más atracciones

a) A. La atracción sube lentamente.

B. La atracción sube lentamente hasta llegar a una altura y vuelve a caer a la misma velocidad.

C. Desde cierta altura se deja caer la atracción, lentamente, hasta que toca el suelo.

D. Desde cierta altura, se deja caer la atracción, lentamente, hasta que toca el suelo y vuelve a subir a la misma velocidad.

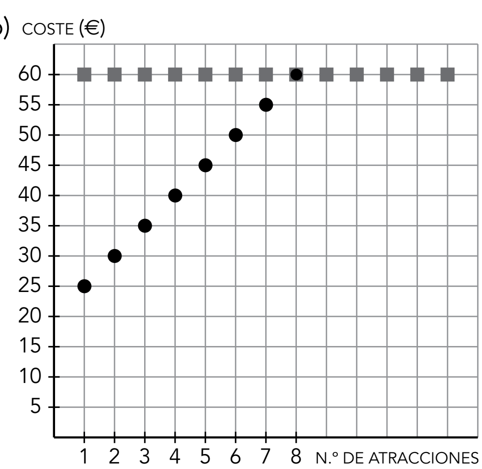
b) I - B; II - A; III - C; IV - D

3. Entrada en el parque

a) A. $y = 20 + 5x$

B. $y = 60$

b)



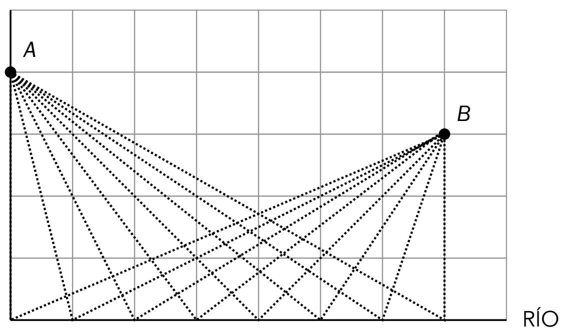
c) A 8 atracciones.

d) Es una función discontinua porque la variable independiente solo puede tomar valores enteros, se mueve a saltos.

V. Geometría y funciones

1. Paseos por el río

a)



b)

PUNTO	DISTANCIA A A	DISTANCIA A B	DISTANCIA TOTAL
(0, 0)	4	7,6	11,6
(1, 0)	4,1	6,7	10,8
(2, 0)	4,5	5,8	10,3
(3, 0)	5	5	10
(4, 0)	5,7	4,2	9,9
(5, 0)	6,4	3,6	10
(6, 0)	7,2	3,2	10,4
(7, 0)	8,1	3	11,1

El menor resultado, 9,9, se obtiene cuando coge el agua del río en el punto (0, 4).

c)

PUNTO	DISTANCIA A A	DISTANCIA A B	DISTANCIA TOTAL
(0, 0)	4	$\sqrt{58}$	11,62
(1, 0)	$\sqrt{17}$	$\sqrt{45}$	10,83
(2, 0)	$\sqrt{20}$	$\sqrt{34}$	10,3
(3, 0)	5	5	10
(4, 0)	$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$	$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$	$7\sqrt{2} = 9,9$
(5, 0)	$\sqrt{41}$	$\sqrt{13}$	10,01
(6, 0)	$\sqrt{52}$	$\sqrt{10}$	10,37
(7, 0)	$\sqrt{65}$	3	11,06

d) • $B'(7, -3)$

• $dist\,(A, B') = \sqrt{49} = 7$

• El punto de corte es (4, 0).

2. Simetría en la naturaleza

Respuesta abierta.

VI. Proporcionalidad

1. Supermercado

a) Respuesta libre.

b) • Un metro de papel higiénico, 0,01 €.

• Un litro de pasta de dientes, 33,33 €.

• Una galleta, 0,044 €.

c)

LITROS DE AGUA	CAPACIDAD	NÚMERO DE BOTELLAS	PRECIO POR BOTELLA	TOTAL
60	0,33 *l*	180	0,25 €	45 €
60	0,50 *l*	120	0,30 €	36 €
60	1,5 *l*	40	0,55 €	22 €
60	5 *l*	12	1,20 €	14,40 €

d) Suavizante concentrado: 0,043 €/lavado

Suavizante diluido: 0,073 €/lavado

Es más barato el suavizante concentrado.

e) Respuestas libres.

VII. Pitágoras

1. Cuadrados perfectos

a) $44^2 = 1\,936$; $45^2 = 2\,025$

b) Tenía 44 años en 1936. En 1985 tendría 93 años.

2. Terna pitagórica

a) Por ejemplo: 6, 8 y 10; 12, 16 y 20; 9, 12 y 15.

b) Algunas son proporcionales.

c) Triángulo rectángulo.

d) Son semejantes.

3. Mi extraña habitación

Paredes: $(3,25 + 3,25 + 4 + 2,5 + 2,5) \cdot 2,5 -$

$- 1,5 \cdot 1,5 - 1 \cdot 2 = 34,5$ m^2

Techo: $3,25 \cdot 4 + 4 \cdot 1,5 = 19$ m^2

Precio de la pintura: $(34,50 + 19) \cdot 1,5 = 80,25$ €

VIII. Movimientos en el plano

1. Mosaicos y cenefas

a) Respuesta libre.

b) Triángulo equilátero, cuadrado y hexágono.

c) Las medidas de los ángulos interiores de estos polígonos son divisores de 360°.

Triángulo: ángulo interior, 60° (seis triángulos)

Cuadrado: ángulo interior, 90° (cuatro cuadrados)

Hexágono: ángulo interior, 120° (tres hexágonos)

d)

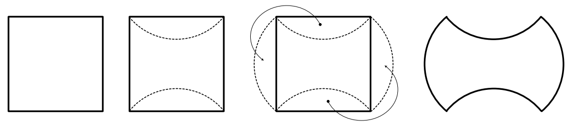
POLÍGONO REGULAR (N.° DE LADOS)	3	4	5	6	7
ÁNGULO INTERIOR (GRADOS SEXAGESIMALES)	60°	90°	108°	120°	128,57°

POLÍGONO REGULAR (N.° DE LADOS)	8	9	10	12	15
ÁNGULO INTERIOR (GRADOS SEXAGESIMALES)	135°	140°	144°	150°	156°

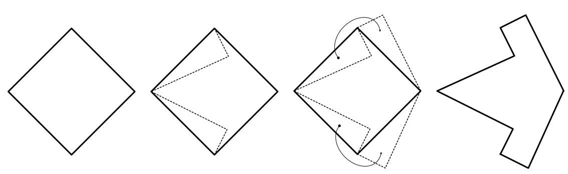
e) Respuesta libre.

f) Respuesta libre.

g) A. Se puede partir de un cuadrado.



B. Se puede partir de un cuadrado.



h) Todos son irregulares, salvo el H, que es semirregular.

IX. Estadística

1. Calificaciones

a) $x = 4$

b) $\overline{x} = 5,4$

c) Bien

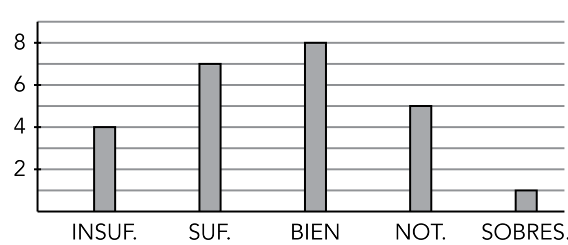
d) 84 %

e) Bien

f) 24 %

g) $\overline{x} = 6,4$. El porcentaje de aprobados es el mismo, 84 %.

h)



b) $y = x + 0,5$

2. Más calificaciones

a) La mejor media es del grupo D y la más baja, del C.

b) En el grupo D.

c) El grupo más homogéneo es el A.

d) En los grupos C y D.

3. Calificaciones de tus compañeros

a) Respuesta libre.

b) • En Ciencias obtendría un 6,75.

• $y = x + 0,5$

X. Álgebra II

1. Un acertijo

a) Sí.

b) $x + 5 - 3 + 10 - 9 + 8 - 4 - x = x + 23 - 16 - x = 7$

2. Acertijos

a) $[(x + 5 - 2) \cdot 2 + 6] : 2 - x = 6$

b) $[(x + 8 - 5) \cdot 3 - 6] : 3 - x = 1$

c) $\sqrt{x + 5 - 1 + 8 - 4 + 3 - 2 - x} = 3$

d) Respuesta libre.

3. Acertijos a la inversa

a) Piensa un número, multiplícalo por 5, suma 3, resta 1, suma 4, resta 1, divide el resultado entre 5 y resta el número pensado. El resultado es 1.

b) Piensa un número, multiplícalo por 6, resta 5, suma el doble del número pensado, resta 2, suma 3, divide el resultado entre 4, suma 1 y resta el doble del número pensado. El resultado es 0.

4. Lenguaje algebraico

a) I. $2x + \frac{x}{3} = 8$

II. $\frac{x}{2} - 2x = 24$

III. $x^2 - 15 = 2x + 1$

IV. $\sqrt{x} + \frac{x}{2} = 12$

b) I. $\rho = \frac{m}{V}$ (m = masa, V = volumen)

II. $v = \frac{e}{t}$ (e = espacio, t = tiempo)

III. $IMC = \frac{m}{e^2}$ (m = masa, e = estatura)

IV. 1 Gb = 1 020 Kb

V. $A \cdot h$ (A = área de la base, h = altura)

XI. Fracciones

1. Tangram

a) La relación entre las áreas es la siguiente:

① = ②　　④ = ⑥ = ⑦

③ = ⑤　　④ = $\frac{1}{2}$ de ①

③ = $\frac{1}{2}$ de ④　　③ = $\frac{1}{4}$ de ①

b)

FIGURA	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
FRACCIÓN	1/4	1/4	1/16	1/8	1/16	1/8	1/8

c)

FIGURA	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
ÁREA (cm^2)	9	9	2,25	4,5	2,25	4,5	4,5

d) • Área de la figura ④ = 16 m^2

• Área total = 128 m^2

FIGURA	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
ÁREA (cm^2)	32	32	8	16	8	16	16

e)

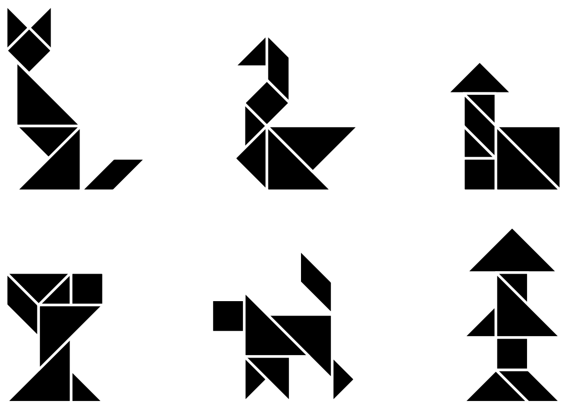
FIGURA	ÁREA (cm^2)
①	$8 + 2\sqrt{32} = 8 + 8\sqrt{2}$
②	$8 + 2\sqrt{32} = 8 + 8\sqrt{2}$
③	$4 + 2\sqrt{8} = 4 + 4\sqrt{2}$
④	$4\sqrt{8} = 8\sqrt{2}$
⑤	$4 + 2\sqrt{8} = 4 + 4\sqrt{2}$
⑥	$8 + \sqrt{32} = 8 + 4\sqrt{2}$
⑦	$8 + \sqrt{32} = 8 + 4\sqrt{2}$

f) Sí hay algunas relaciones entre los perímetros:

① = ②　　③ = ⑤

⑥ = ⑦　　① = 2 · ⑤

g)



h) El área siempre es la misma; el perímetro, no.

i)

FIGURA	ÁREA (cm^2)
①	$\frac{x}{4}u^2$
②	$\frac{x}{4}u^2$
③	$\frac{x}{16}u^2$
④	$\frac{x}{8}u^2$
⑤	$\frac{x}{16}u^2$
⑥	$\frac{x}{8}u^2$
⑦	$\frac{x}{8}u^2$

j) Sí.

k) Respuesta libre.

l) Por ejemplo: