Tarefa extra 1.1. Constrúe un texto sobre as problemáticas do abuso das redes sociais en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta.

Tarefa extra 1.2. Unha consultora externa á empresa quere analizar se hai nesgo de xénero nas cantidades que reciben as persoas por publicar *posts* nunha determinada rede social. Para iso analizan as publicacións e os ingresos de catro *macro-influencers*. A consultora revisa o número de publicacións e estima en función dun parámetro m as cantidades recibidas en miles de euros, xa que a empresa non quere dar os datos. Os valores cos que traballa a consultora están recollidos na seguinte táboa:

Mes	Pedro	Ramón	Iria	Mariña	Ingresos
Xaneiro	6	0	4	0	m€
Febreiro	3	2	0	5	m+1€
Marzo	0	6	4	0	m+3€
Abril	2	4	1	3	2m€

1. Estuda para que valores de m é correcta a conxectura dos ingresos realizada pola consultora.
2. Estuda para que valores de m non hai nesgo de xénero, é dicir, cando a suma das cantidades percibidas polos homes é igual á suma das cantidades percibidas polas mulleres.
3. Existen valores de m para os cales os ingresos de Iria e Mariña son superiores aos de Pedro e Ramón?
4. Que rexión de valores de m ten maior área, a superficie na que Pedro e Ramón teñen máis ingresos ou a superficie na que Iria e Mariña teñen máis ingresos? Podes explicar o resultado obtido?

Solución. **(1)** Consideramos as matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} P \\ R \\ I \\ M \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m+1 \\ m+3 \\ 2m \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

Se resolvemos o sistema $AX = B$ obtemos que

$$P = \frac{1}{30}(23m - 40), \quad R = \frac{1}{30}(23m - 25), \tag{1.30}$$

$$I = \frac{1}{30}(60 - 27m), \quad M = \frac{1}{30}(40 - 17m). \tag{1.31}$$

Posto que os ingresos teñen que ser cantidades non negativas, resultan as seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} m \geq \dfrac{40}{23} \approx 1{,}7391, \quad m \geq \dfrac{25}{23} \approx 1{,}0869, \\ m \leq \dfrac{60}{27} \approx 2{,}222, \quad m \leq \dfrac{40}{17} \approx 2{,}3592. \end{cases} \tag{1.32}$$

Xa que logo, para que as catro persoas teñan ingresos non negativos resulta o seguinte intervalo para o parámetro m:

$$m \in \left[\frac{40}{23}, \frac{60}{27}\right]. \tag{1.33}$$

(2) Para que non haxa nesgo de xénero ten que suceder que a suma dos ingresos de Pedro e Ramón dadas en (1.30) sexa igual á suma dos ingresos de Iria e Mariña dadas en (1.31), é dicir:

$$\frac{1}{30}(23m - 40) + \frac{1}{30}(23m - 25) = \frac{1}{30}(60 - 27m) + \frac{1}{30}(40 - 17m), \tag{1.34}$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{30}(46m - 65) = \frac{10}{3} - \frac{22m}{15} \Leftrightarrow 3m - \frac{11}{2} = 0, \tag{1.35}$$

de onde o único valor para o cal non existiría nesgo de xénero é

$$m = \frac{11}{6}. \tag{1.36}$$

(3) Para determinar se hai valores para os cales os ingresos de Iria e Mariña son superiores aos ingresos de Pedro e Ramón, temos que analizar a desigualdade

$$\frac{10}{3} - \frac{22m}{15} \geq \frac{1}{30}(46m - 65). \tag{1.37}$$

Posto que xa temos o único valor no que se produce a igualdade, analizamos o signo da inecuación antes (ou despois) de $m = 11/6$ de onde obtemos que os valores de m para os que os ingresos de Iria e Mariña son superiores aos ingresos de Pedro e Ramón están no intervalo

$$m \in \left[\frac{40}{23}, \frac{11}{6}\right]. \tag{1.38}$$

(4) Finalmente, a rexión na que os ingresos de Pedro e Ramón son maiores ten a seguinte área

$$A_{PR} = \int_{m=11/6}^{m=60/27} \left(3m - \frac{11}{2}\right) dm = \frac{49}{216} \approx 0{,}226852, \tag{1.39}$$

mentres que

$$A_{IM} = \int_{m=40/23}^{m=11/6} \left(\frac{11}{2} - 3m\right) dm = \frac{169}{12696} \approx 0{,}0133, \tag{1.40}$$

polo que a área de Pedro e Ramón é (moi) superior á de Iria e Mariña.

$\square$

Tarefa extra 1.3. Un dos buscadores de Internet máis célebres ten o seu fundamento no chamado cálculo de valores e vectores propios de matrices. Máis concretamente, cando buscamos información sobre un tema concreto e obtemos unha listaxe ordenada de páxinas web que poden resolver a nosa dúbida, como se obtén a orde na que aparecen cada unha das opcións? A idea de fondo é supoñer que a importancia x_j de cada páxina P_j é proporcional á suma das importancias das páxinas que enlazan con P_j. Por exemplo, supoñamos que a páxina P_1 aparece citada nas páxinas P_2, P_{33} e P_{51}; por outra banda, a páxina P_2 aparece citada nas páxinas P_4 e P_7; logo veñen moitas páxinas, e que a n-ésima páxina P_n (e derradeira!) aparece citada en P_1, P_2, P_{33}, P_{51}, P_4 e P_7. Entón as importancias x_j de cada páxina P_j teñen esta representación onde k é unha constante de proporcionalidade:

$$\begin{cases} x_1 = k\left(x_2 + x_{33} + x_{51}\right), \\ x_2 = k\left(x_4 + x_7\right), \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_n = k\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + x_{33} + x_{51}\right). \end{cases} \tag{1.41}$$

Podemos escribir a anterior relación como un (enorme) sistema de ecuacións lineares:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0_{32} & 1_{33} & 0 & \cdots & 0_{50} & 1_{51} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0_{32} & 1_{33} & 0 & \cdots & 0_{50} & 1_{51} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Isto lévanos a analizar o problema como o cálculo das constantes λ e dos vectores X (distintos do cero) para unha matriz dada M do seguinte xeito

$$MX = \lambda X. \tag{1.43}$$

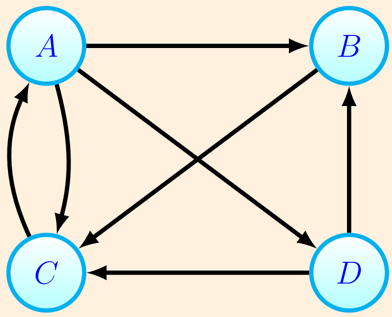
Os valores das constantes λ chámanse valores propios da matriz M e os vectores X distintos do cero para cada unha das constantes reciben o nome de vectores propios da matriz M (asociados ao valor propio λ). Para o cálculo dos valores propios λ dunha matriz cadrada M simplemente resolvemos a ecuación

$$\det(M - \lambda I) = 0, \tag{1.44}$$

onde I é a matriz identidade do mesmo tamaño ca M, e posteriormente para cada valor propio calculamos os vectores propios asociados.

Un problema semellante é o que se atopa en calquera liga deportiva. Normalmente as clasificacións veñen dadas polo número de vitorias durante a liga. Pero non sería máis xusto ter en conta a que equipos se lles gaña? Por dar un exemplo bastante representativo, na liga de baloncesto norteamericana (NBA) todos os equipos xogan 82 partidos durante a chamada «tempada regular» antes de xogar os denominados *play-offs*. Debido ás grandes distancias que terían que percorrer, dividen os equipos en dúas conferencias (leste e oeste) que, á súa vez, están divididas en tres divisións. A conferencia leste está dividida nas divisións atlántica, central e sueste, mentres que a conferencia oeste está dividida nas divisións suroeste, noroeste e pacífica. Se ben todos xogan 82 partidos, non todos xogan o mesmo número de partidos contra cada equipo, senón que adoitan xogar máis partidos contra os da propia conferencia, xustamente para minimizar os desprazamentos. Unha vez remata a tempada regular e hai que escoller 16 equipos para os *play-offs*, o que se fai é simplemente ter en conta o número de vitorias obtidas por cada equipo. A pregunta que xorde de xeito natural é a seguinte: se unha conferencia é especialmente forte ou especialmente débil, e xa que os equipos xogan máis partidos contra os equipos da súa propia conferencia, non habería que ter en conta a «calidade» das vitorias de cada equipo? Iso é xustamente a idea do buscador ao que antes nos referiamos. Esta mesma idea aparece en moitos outros contextos.

Se retomamos o buscador, matematicamente formulamos o modelo dicindo que a importancia de cada páxina é proporcional á suma ponderada das importancias das páxinas que apuntan a ela, onde ponderada significa que debemos dividir estas importancias entre o número de ligazóns saíntes. O modelo reflicte o que ocorrería se unha persoa navegase seguindo ligazóns ao azar (isto chámaselle unha *cadea de Markov*); a importancia convenientemente normalizada será a porcentaxe de visitas. Considera a seguinte estrutura web moi simplificada:



1. Escribe o sistema de ecuacións das importancias das páxinas web.
2. Comproba que $\lambda = 1$ é unha solución da ecuación $\det(M - \lambda I) = 0$.
3. Calcula os vectores propios asociados ao valor propio $\lambda = 1$.
4. Cal é o valor da importancia de cada páxina web? Que páxina web é a máis importante?

Solución. **(1)** Sexan x, y, z e w a importancia de cada páxina web A, B, C e D, respectivamente. Formulamos o sistema de ecuacións lineares:

$$x = \lambda z, \quad y = \lambda \left(\frac{x}{3} + \frac{w}{2} \right), \quad z = \lambda \left(\frac{x}{3} + y + \frac{w}{2} \right), \quad w = \lambda \frac{x}{3}, \tag{1.45}$$

que podemos escribir en forma matricial mediante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}. \tag{1.46}$$

(2) Para os valores propios temos que resolver a ecuación

$$\det(M-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -\lambda & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & -\lambda & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 - \frac{\lambda^2}{3} - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{6} = 0. \quad (1.47)$$

É doado verificar que $\lambda = 1$ é unha raíz do polinomio de grao catro.

(3) Para $\lambda = 1$, resolvemos o sistema de ecuacións lineares

$$MX = X, \quad (1.48)$$

que conduce a

$$x = z, \quad y = \frac{x}{3} + \frac{w}{2}, \quad z = \frac{x}{3} + y + \frac{w}{2}, \quad w = \frac{x}{3}, \quad (1.49)$$

que ten por solucións

$$t\begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad t \neq 0. \quad (1.50)$$

(4) O autovector obtido en (1.50) indica que as páxinas web A e C son igual de importantes e teñen a maior importancia (valor 3). A páxina web B ten a seguinte importancia (valor 3/2). A páxina web D ten a menor importancia (valor 1). □