Tarefa 1.1. (2.25 puntos) Tempo estimado para a resolución: 25'. Estímase que unha persoa *macro-influencer* (persoa que acumula entre 50.000 e 100.000 *followers* —seguidoras/es—) percibe entre 500 e 1.200€ por publicación, dependendo de diversos factores como a rede social, a exclusividade coa marca, o formato, ..., tal e como se recolle no estímulo 1.1.

Sofía é *macro-influencer*. Nas súas publicacións comparte rutinas de exercicios para facer na casa e publicita marcas de roupa, calzado deportivo e equipamento de ximnasio de baixo custo e que utilizan materiais ecolóxicos na súa fabricación. Na seguinte táboa reflíctense o número de publicacións de Sofía nunha determinada rede social nos tres últimos meses onde, como podes ver, non lembra os ingresos do mes de xullo :

Mes	Marca A	Marca B	Marca C	Ingresos totais
Xullo	5	7	3	? €
Agosto	4	6	5	11.200€
Setembro	6	3	4	9.300€

1. (1,25 puntos) Investiga o que pagan as marcas A, B e C por cada publicación (podes empregar algún software como Geogebra, Sage ou Maxima).
2. (0,5 puntos) En función do resultado anterior, poderías descubrir cal é o rango de valores dos ingresos de Sofía no mes de xullo?
3. (0,5 puntos) Segundo os resultados, para que ingresos totais no mes de xullo se maximizan e se minimizan os ingresos pola marca C?

Solución. **(1)** Sexan x, y e z o que pagan as marcas A, B e C, respectivamente, por cada publicación. Tendo en conta a información recollida na táboa, podemos formular o seguinte sistema de ecuacións lineares:

$$\begin{cases} 5x + 7y + 3z = mz, \\ 4x + 6y + 5z = 11.200 \\ 6x + 3y + 4z = 9.300 \end{cases} \tag{1.1}$$

onde m é un valor descoñecido. Se definimos as matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 11.200 \\ 9.300 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

podemos formular o sistema de ecuacións (1.1) como

$$AX = B. \tag{1.3}$$

Temos que

$$\det(A) = 71, \tag{1.4}$$

de xeito que o rango de A é máximo e coincide co rango da matriz ampliada $(A|B)$, que tamén é 3. Xa que logo, en virtude do teorema de Rouché-Frobenius temos garantido que o sistema é compatible e determinado, é dicir, existe unha única solución do sistema para cada valor fixo de m.

Se resolvemos o sistema (1.3) cun programa de cálculo simbólico, como os sinalados no enunciado, obtemos

$$x = \frac{1}{71}(9m - 54.700), \quad y = \frac{2}{71}(7m - 49.250), \quad z = \frac{2}{7}(13.375 - m). \tag{1.5}$$

(2) Posto que os ingresos determinados en (1.5) teñen que ser cantidades non negativas, obtemos que

$$9m - 54.700 \geq 0, \quad 7m - 49.250 \geq 0, \quad 13375 - m \geq 0, \tag{1.6}$$

de onde resultan as seguintes tres desigualdades

$$m \geq 6.077{,}78, \quad m \geq 7.035{,}71, \quad m \leq 13.375. \tag{1.7}$$

Xa que logo, os ingresos do mes de xullo estiveron no intervalo

$$m \in [7.035{,}71\,,\ 13.375]. \tag{1.8}$$

(3) Temos o valor mínimo en z (ingresos pola marca C) cando $m = 13.375$, de xeito que $z = 0$. Ao termos unha recta con pendente negativa o valor máximo ocorre cando

$$m = \frac{49250}{7} \approx 7.035{,}71. \tag{1.9}$$

□

Tarefa 1.2. (2.25 puntos) Tempo estimado para a resolución: 30'. Nunha empresa de márketing e análise de datos de *influencers*, queren estudar os datos de crecemento das contas de tres *influencers* (Sofía, Xoán e Lucas) para recomendarlle a unha marca sobre a quen deben contratar pola súa proxección nas redes.

A empresa emprega un sistema de coordenadas tridimensional (x, y, z) onde:

- x representa o tempo en meses.
- y representa o número de *followers* (podes lembrar o estímulo 1.3).
- z representa o número de interaccións que recibe dos seus *followers* (comentarios, *likes*, etc).

Con estas notacións temos

$$\text{Conta Sofía}\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 1 + t, \end{cases} \quad \text{Conta Xoán}\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 3 + 7t, \\ z = 1, \end{cases} \quad \text{Conta Lucas}\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 8 + 2t, \\ z = t/2. \end{cases} \tag{1.10}$$

O departamento de análise de datos da empresa de márketing determina que o plano π representa o número máximo de interaccións que pode ter un *influencer* segundo o número de *followers* ao longo do tempo, e a súa ecuación é:

$$\pi : 7x - y - 5z = 6. \tag{1.11}$$

Ese departamento determinou que os *influencers* son idóneos cando a súa conta se acerca ao límite máximo de interaccións máis veces.

Para facer esta tarefa deberanse formar grupos de seis persoas. Cada grupo deberá estudar a posición da conta dun dos *influencers* con respecto ao número máximo de interaccións dos seus *followers*. Unha vez calculado, o grupo deberá decidir cal sería o consello que a empresa debería darlle á marca en función dos resultados obtidos. Finalmente, farase unha posta en común do resultado de todos os grupos para tomar unha decisión entre toda a clase. A avaliación terá as seguintes puntuacións: traballo en grupo, 1 punto; cálculo da posición de cada recta respecto ao plano, 0,75 puntos; elección de *influencer*, 0,5 puntos.

Solución. Temos que estudar a posición relativa das tres rectas das contas de Sofía, Xoán e Lucas co plano π, que representa o número máximo de interaccións. O vector normal do dito plano π é $\vec{n}_\pi = (7, -1, -5)$.

No caso da conta de Sofía, a recta pasa polo punto $P_S(2,3,1)$ e ten vector director $\vec{v}_S = (1,2,1)$. Se facemos o produto escalar do vector normal do plano co vector director da recta resulta

$$(1,2,1) \cdot (7,-1,-5) = 7 - 2 - 5 = 0, \tag{1.12}$$

de xeito que ou ben a recta da conta de Sofía é paralela ao plano ou ben a recta está contida no plano π que representa o número máximo de interaccións. Estudamos se o punto P_S está contido no plano:

$$7 \cdot 2 - 3 - 5 = 6, \tag{1.13}$$

polo que a recta correspondente a Sofía está contida no plano π. Xa que logo, o número de interaccións axústase ao óptimo establecido pola empresa en todo momento.

No caso da conta de Xoán, temos o punto $P_X(1,3,1)$ e o vector director $\vec{v}_X = (1,7,0)$. Neste caso, se calculamos o produto escalar do vector normal $\vec{n}_\pi$ e o correspondente vector director resulta

$$(1,7,0) \cdot (7,-1,-5) = 7 - 7 = 0, \tag{1.14}$$

polo que novamente ou ben a recta é paralela ao plano ou ben a recta está contida no plano. Estudamos se o punto P_X está contido no plano:

$$7 - 3 - 5 = -1 \neq 6 \tag{1.15}$$

de xeito que a recta é paralela. Isto significa que o número de interaccións non se axusta ao óptimo establecido pola empresa en ningún momento.

Finalmente, no caso da conta de Lucas, temos o punto $P_L(2,8,0)$ mais o vector director $\vec{v}_L = (1,2,1/2)$. Neste caso temos que

$$(1,2,1/2) \cdot (7,-1,-5) = 7 - 2 - \frac{5}{2} \neq 0, \tag{1.16}$$

polo que a recta corta o plano, o que significa que o número de interaccións só se axusta ao óptimo establecido pola empresa nun instante de tempo.

Logo desta análise podemos afirmar que a empresa debe contratar a Sofía porque o número de interaccións está axustado ao óptimo estabelecido pola empresa en todo momento. $\square$

Tarefa 1.3. **(2.25 puntos)** Tempo estimado para a resolución: 25'. Unha *influencer* comeza a súa carreira nas redes sociais e espera ter

$$f(t) = 10(t - 10)^3 + 10.000 \tag{1.17}$$

followers en cada instante de tempo t medido en meses, que estará comprendido no intervalo $[0, 30]$.

1. (0,5 puntos) Segundo o esperado pola *influencer*, o seu número de *followers* será unha función crecente no tempo ou haberá períodos de decrecemento? Analiza os intervalos de tempo onde se espera que crezan e que decrezan.
2. (0,5 puntos) Segundo a previsión estimada, haberá algún punto de inflexión no número de *followers* da *influencer*? No caso de que exista, que indica ese punto de inflexión en relación ao crecemento de *followers*?
3. (0,5 puntos) Representa graficamente os *followers* esperados pola *influencer* utilizando algún software como Geogebra, Sage ou Maxima.
4. (0,75 puntos) Determina o promedio mensual de *followers* durante os 20 primeiros meses, sabendo que o promedio dunha función $f(t)$ nun intervalo $[a, b]$ vén dado por
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt. \tag{1.18}$$

Solución. **(1)** Para analizar os intervalos de crecemento e decrecemento da función calculamos a derivada

$$f'(t) = 30(t - 10)^2. \tag{1.19}$$

Posto que se trata dunha función polinomial, os posibles extremos relativos da función son os puntos onde se anule a derivada:

$$30(t - 10)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 10. \tag{1.20}$$

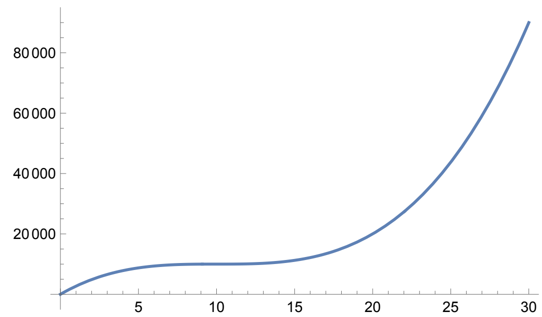
O único posible extremo está no mes décimo. Se analizamos o signo da derivada antes e despois do posible extremo, temos que antes do punto $t = 10$ a derivada é positiva ao ser un cadrado, igual que o signo despois do punto $t = 10$. Polo tanto, non hai extremo relativo nese punto. Máis aínda, empregando que $f'(t) \geq 0$ temos que a función é crecente en todo o seu dominio, polo que atinxe o mínimo absoluto en $t = 0$ e o máximo absoluto en $t = 30$.

(2) Posto que

$$f''(t) = 60(t - 10) \tag{1.21}$$

temos un posible punto de inflexión no punto $t = 10$. Ademais, no intervalo $(0, 10)$ temos que $f''(t) < 0$ polo que $f(t)$ é cóncava como a función $-t^2$ e no intervalo $(10, 30)$ temos que $f''(t) > 0$ polo que $f(t)$ é convexa como a función t^2. Isto implica un cambio na tendencia no crecemento de *followers*.

(3) A representación gráfica da función $f(t)$ é a seguinte:



(4) Para determinar o promedio mensual de *followers* nos 20 primeiros meses integramos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{20}\int_0^{20} f(t)dt = \frac{1}{20}\int_0^{20}\left(10(t-10)^3 + 10.000\right)dt \\
= \frac{1}{20}\left[\frac{5t^4}{2} - 100t^3 + 1500t^2\Big|_{x=0}^{x=20}\right] \\
= \frac{1}{20}\left[\frac{5\cdot 20^4}{2} - 100\cdot 20^3 + 1500\cdot 20^2\right] \\
= \frac{200.000}{20} = 10.000 \text{ } \textit{followers} \text{ ao mes.} \quad (1.22)
\end{aligned}$$

□

Tarefa 1.4. (2.25 puntos) Tempo estimado para a resolución: 25'. Analizada a conta de Sofía, atopamos que a probabilidade de que un dos seus *followers* interaccione con ela en cada publicación (comentarios, *likes*, etc) por calquera das redes sociais que aparecen no estímulo 1.2 é de 0,45. Escollidas 100 destas persoas ao chou, queremos que calcules a probabilidade exacta (0,5 puntos), e que calcules a probabilidade aproximada (0,75 puntos) de que, logo dun *post* (publicación), 40 desas 100 persoas interaccionen con Sofía. Explica os resultados obtidos (0,5 puntos). Para a resolución podes consultar a táboa da distribución normal N(0; 1).

Solución. En primeiro lugar, indicamos como se podería calcular a probabilidade exacta. Temos que a variable aleatoria é unha binomial de tamaño $n = 100$ e probabilidade $p = 0{,}45$:

$$X \sim \mathrm{B}(100; 0{,}45). \tag{1.23}$$

Entón, para obter o resultado exacto temos que calcular

$$P(X = 40) = \binom{100}{40} 0{,}45^{40} \cdot 0{,}55^{60} = 0{,}0488. \tag{1.24}$$

Posto que

$$n = 100 \geq 30, \quad np = 45 > 5, \quad nq = 55 > 5, \tag{1.25}$$

podemos aproximar a distribución binomial por unha distribución normal con media e desviación

$$\mu = np = 45, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{24{,}75} = 4{,}9749. \tag{1.26}$$

Xa que logo, se denotamos con Z a distribución normal con media $\mu = 0$ e desviación $\sigma = 1$, a probabilidade con corrección de continuidade é

$$\begin{aligned} P(X = 40) &\approx P\left(\frac{39{,}5 - 45}{4{,}975} < Z \leq \frac{40{,}5 - 45}{4{,}975}\right) = P(-1{,}11 < Z \leq -0{,}9) \\ &= P(Z \leq -0{,}9) - P(Z \leq -1{,}11) = 1 - P(Z \leq -0{,}9) - (1 - P(Z \leq -1{,}11)) \\ &= P(Z \leq 1{,}11) - P(Z \leq 0{,}9) = 0{,}8665 - 0{,}8159 = 0{,}0506. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Pode ser interesante observar o erro cometido ao aproximar o resultado exacto empregando a distribución binomial (1.24) polo resultado aproximado empregando a distribución normal (1.27):

$$|0,0488 - 0{,}0506| = 0{,}0018. \tag{1.28}$$

□