UD 7. PROPORCIONALIDAD NUMÉRICA TEORÍA

Razones y proporciones

La **razón** de dos números a y b es la fracción $\frac{a}{b}$ (o su irreducible)

Una **proporción** es la igualdad de dos razones. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Se lee: a es a b como c es a d

Ejemplo:

La razón de las edades de Marcos y su madre es un tercio.

$$\frac{\text{EDAD DE MARCOS}}{\text{EDAD DE LA MADRE}} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$$

Proporción: $\frac{14}{77} = \frac{2}{11}$ → La edad de Marcos es a la de su abuelo, como 2 es a 11.

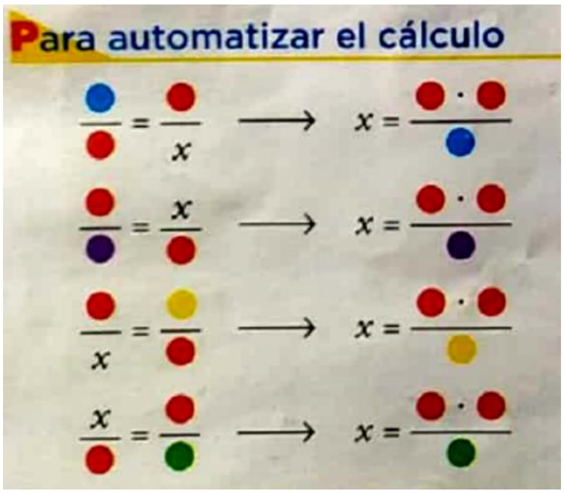
Para calcular el término desconocido de una proporción, se aplica esta propiedad de las fracciones equivalentes:

El producto de los extremos, a y x, es igual al de los medios, b y c.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \rightarrow a \cdot x = b \cdot c \rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Ejemplo:

$$\frac{6}{x} = \frac{15}{25} \rightarrow 6 \cdot 25 = x \cdot 15 \rightarrow 150 = x \cdot 15 \rightarrow x = \frac{150}{15} = 10$$

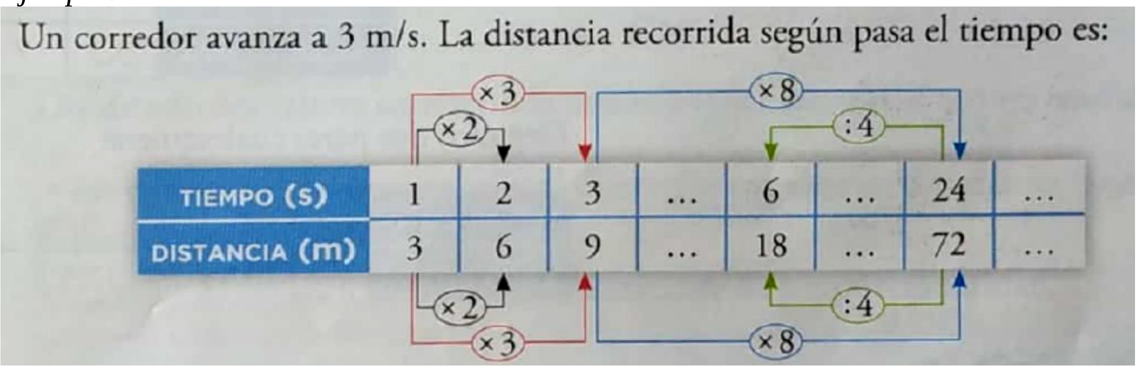


Magnitudes directamente proporcionales (PD)

En las magnitudes directamente proporcionales, multiplicando (dividiendo) por el mismo número dos valores correspondientes se obtiene otro par de valores correspondientes.

Magnitud A	a	$2 \cdot a$	$3 \cdot a$	…	ka
Magnitud B	b	$2 \cdot b$	$3 \cdot b$	…	kb

Ejemplo:

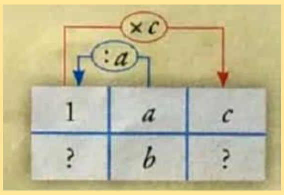


Un corredor avanza a 3 m/s. La distancia recorrida según pasa el tiempo es:

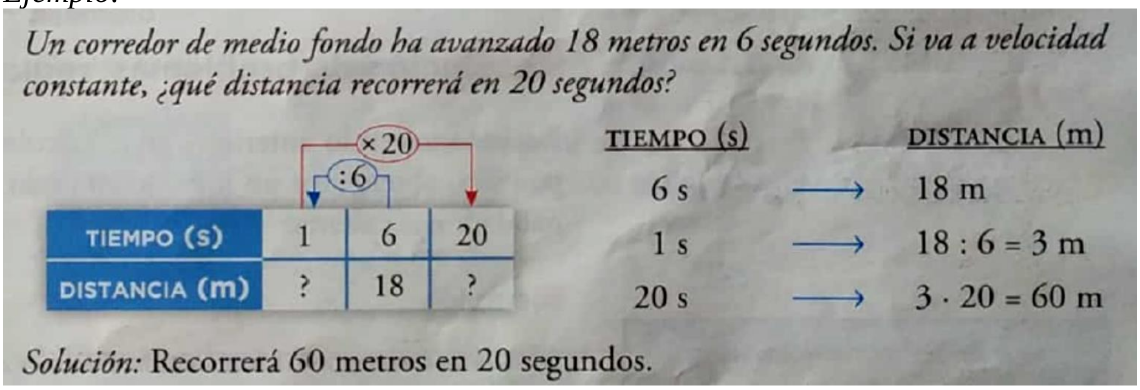
TIEMPO (s)	1	2	3	…	6	…	24	…
DISTANCIA (m)	3	6	9	…	18	…	72	…

Resolución de problemas por reducción a la unidad (PD):

- Consiste en calcular, primero, el valor asociado a la unidad en la tabla de valores correspondientes.
- Conociendo ese dato, no hay dificultad en completar cualquier otro par de valores correspondiente



Ejemplo:



Un corredor de medio fondo ha avanzado 18 metros en 6 segundos. Si va a velocidad constante, ¿qué distancia recorrerá en 20 segundos?

TIEMPO (s)	1	6	20
DISTANCIA (m)	?	18	?

TIEMPO (s)		DISTANCIA (m)
6 s	⟶	18 m
1 s	⟶	18 : 6 = 3 m
20 s	⟶	3 · 20 = 60 m

Solución: Recorrerá 60 metros en 20 segundos.

En una tabla de proporcionalidad directa, dos pares de valores correspondientes forman una proporción.

Resolución de problemas por regla de tres (PD):

Regla de tres

MAGNITUD A		MAGNITUD B
a	$\longrightarrow$	b
c	$\longrightarrow$	d

- Se ordenan los datos y la incógnita.
- Se construye la proporción con los términos en el orden en que aparecen. $\rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
- Se calcula el término desconocido en la proporción.

Ejemplo:

Una vendimiadora ha recolectado 14 kilos de uva en las 4 primeras cepas de la viña. ¿Cuántos kilos puede esperar de las próximas 10 cepas?

CEPAS		KILOS
4	$\longrightarrow$	14
10	$\longrightarrow$	x

PROPORCIÓN

$$\frac{4}{14} = \frac{10}{x} \rightarrow x = \frac{14 \cdot 10}{4} = 35$$

Solución: De 10 cepas puede esperar 35 kilos.

Constante de proporcionalidad (PD):

- En una tabla de proporcionalidad directa, el cociente de dos valores correspondientes es siempre el mismo.
- Al valor de ese cociente se le llama **constante de proporcionalidad.**

Ejemplo:

TIEMPO (h)	2	3	4	5	…	7	…
COSTE (€)	2,50	3,75	5	6,25	…	8,75	…

2,50 : 2 = **1,25** 5 : 4 = **1,25** 8,75 : 7 = **1,25**

Magnitudes inversamente proporcionales (PI)

En las magnitudes inversamente proporcionales, si se multiplica (o divide) uno de los valores de una magnitud por un número, el valor correspondiente de la otra magnitud queda dividido (o multiplicado) por dicho número.

MAGNITUD A	a	$a \cdot 3$	$a : 5$
MAGNITUD B	b	$b : 3$	$b \cdot 5$

Ejemplo:
Dos trabajadores descargan un camión en seis horas. Veamos cómo varía el tiempo de descarga al variar el número de trabajadores.

Yo solo, $6 \cdot 2 = 12$ h. Entre los tres, $12 : 3 = 4$ h. Los 12 tardamos 1 h.

N.º DE TRABAJADORES	1	2	3	4	6	12
TIEMPO DE DESCARGA (h)	12	6	4	3	2	1

Resolución de problemas por reducción a la unidad (PI):

Lo veremos con un ejemplo:

Un granjero tiene alfalfa en el almacén para alimentar a sus 3 vacas durante 10 días. ¿Cuánto le duraría el forraje si tuviera 5 vacas?

N.º DE VACAS	1	3	5
DÍAS	?	10	?

N.º DE VACAS		DURACIÓN ALIMENTO
3	⟶	10 días
1	⟶	$10 \cdot 3 = 30$ días
5	⟶	$30 : 5 = 6$ días

Solución: Si tuviera 5 vacas, le duraría 6 días.

Resolución de problemas por regla de tres inversa (PI):

Se aplica la regla de tres, pero para construir la proporción invertiremos la razón de los valores en una de las magnitudes.

MAGNITUD A		MAGNITUD B
a	$\longrightarrow$	b
c	$\longrightarrow$	x

$\boxed{\dfrac{a}{c} = \dfrac{x}{b}}$ o bien $\boxed{\dfrac{c}{a} = \dfrac{b}{x}}$

Se invierte el orden en los elementos de una de las magnitudes.

Ejemplo:

Un ciclista, a 20 km/h, tarda 30 minutos en ir de un pueblo a la aldea vecina. ¿Cuánto tardará un motorista, a 50 km/h?

VELOCIDAD		TIEMPO (min)
20	$\longrightarrow$	30
50	$\longrightarrow$	x

PROPORCIÓN: $\dfrac{20}{50} = \dfrac{x}{30}$, o bien $\dfrac{50}{20} = \dfrac{30}{x}$

Solución: $x = \dfrac{20 \cdot 30}{50} = 12$ minutos

Ejemplos de problemas resueltos de proporcionalidad compuesta

1. ***En un comedor escolar con 60 comensales se han consumido 36 kilos de verdura en tres semanas.***

¿Cuántos kilos de verdura se consumirán, en cuatro semanas, con 80 comensales?

a) Primero, analiza el problema:

- Identifica las magnitudes que intervienen.
- Ordena las magnitudes, los datos y la incógnita.
- Identifica el tipo de proporcionalidad (directa-inversa) que liga cada magnitud con la que lleva la incógnita.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA (COMENSALES – KILOS)

PROP. DIRECTA (SEMANAS – KILOS)

COMENSALES		SEMANAS		KILOS
60	⟶	3	⟶	36
80	⟶	4	⟶	x

Para facilitar el proceso que viene a continuación, conviene colocar en último lugar la magnitud que lleva la incógnita.

b) A continuación, resuelve:

COMENSALES		SEMANAS		KILOS
60 comensales	→	en 3 semanas	→	consumen 36 kilos
60 comensales	→	en 1 semana	→	consumen 36 : 3 = 12 kilos
1 comensal	→	en 1 semana	→	consume 12 : 60 = 0,2 kilos
80 comensales	→	en 1 semana	→	consumen 0,2 · 80 = 16 kilos
80 comensales	→	en 4 semanas	→	consumen 16 · 4 = 64 kilos

c) Automatiza el proceso:

PROPORCIONALIDAD DIRECTA (COMENSALES – KILOS)

PROP. DIRECTA (SEMANAS – KILOS)

COMENSALES		SEMANAS		KILOS	PROPORCIÓN
60	⟶	3	⟶	36	$\rightarrow \dfrac{60}{80} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{36}{x}$
80	⟶	4	⟶	x	

$$x = \frac{80 \cdot 4 \cdot 36}{60 \cdot 3} = 64$$

Solución: Con 80 comensales, en 4 semanas, en el comedor se consumirán 64 kilos de verduras.

2. ***Un ranchero ha necesitado 400 kilos de cebada para alimentar a sus 15 caballos durante 8 días.***

¿Durante cuántos días podría alimentar a 25 caballos con 500 kilos de cebada?

a) Observa que ahora interviene una relación de proporcionalidad inversa.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA (KILOS DE CEBADA – DÍAS); PROP. INVERSA (N.º DE CABALLOS – DÍAS)

KILOS DE CEBADA		N.º DE CABALLOS		DÍAS
400	⟶	15	⟶	8
500	⟶	25	⟶	x

b) A continuación, resuelve:

KILOS DE CEBADA		N.º DE CABALLOS		DÍAS
Con 400 kilos	→	comen 15 caballos	→	durante 8 días
Con 400 kilos	→	come 1 caballo	→	durante $8 \cdot 15 = 120$ días
Con 100 kilos	→	come 1 caballo	→	durante $120 : 4 = 30$ días
Con 500 kilos	→	come 1 caballo	→	durante $30 \cdot 5 = 150$ días
Con 500 kilos	→	comen 25 caballos	→	durante $150 : 25 = 6$ días

c) Automatiza el proceso:

PROPORCIONALIDAD DIRECTA (KILOS DE CEBADA – DÍAS); PROP. INVERSA (N.º DE CABALLOS – DÍAS)

KILOS DE CEBADA		N.º DE CABALLOS		DÍAS		PROPORCIÓN
400	⟶	15	⟶	8	→	$\frac{400}{500} \cdot \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{15}} = \frac{8}{x}$
500	⟶	25	⟶	x		

Observa que la magnitud NÚMERO DE CABALLOS es inversamente proporcional a la magnitud DÍAS.

Por eso, al formar la proporción, en lugar de la razón $\frac{15}{25}$ tomamos su inversa, $\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{15}}$.

$$\frac{400}{500} \cdot \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{15}} = \frac{8}{x} \rightarrow x = \frac{500 \cdot 15 \cdot 8}{400 \cdot 25} = 6$$

Solución: Con 500 kilos de cebada se alimentan 25 caballos durante 6 días.

Problemas de repartos directamente proporcionales (PD)

Para repartir una cantidad, C, en partes directamente proporcionales a m, n, k:

– Se divide la cantidad a repartir, C, entre la suma $S = m + n + k$.

Así, calculamos la parte, p, que corresponde a una unidad.

– Se multiplica cada número m, n, k, por el cociente, p, obtenido.

NÚMEROS	m	n	k	$m+n+k=S$
CANTIDAD	x	y	z	C

$$\rightarrow p = \frac{C}{S} \begin{cases} x = p \cdot m \\ y = p \cdot n \\ z = p \cdot k \end{cases}$$

Ejemplo:

Tres amigos aficionados al bricolaje alquilan un taladro para hacer arreglos en casa. El primero lo utiliza durante dos días y se lo pasa al segundo, que lo tiene cinco días. Después lo recibe el tercero, que lo usa durante tres días y lo devuelve a la tienda. ¿Cuánto debe poner cada uno para pagar los 60 € que cuesta en total el alquiler?

DÍAS	2	5	3	2 + 5 + 3 = 10
COSTE (€)	x	y	z	60

→ PROPORCIONALIDAD DIRECTA

$$x = \frac{2 \cdot 60}{10} = 12\ € \qquad y = \frac{5 \cdot 60}{10} = 30\ € \qquad z = \frac{3 \cdot 60}{10} = 18\ €$$

Solución: El primero debe poner 12 €; el segundo, 30 €, y el tercero, 18 €.

Lo anterior, se podría resumir así:

$$\text{Coste por día} \rightarrow 60 : 10 = 6\ € \begin{cases} \text{El primero pagará} \rightarrow 2 \cdot 6 = 12\ € \\ \text{El segundo pagará} \rightarrow 5 \cdot 6 = 30\ € \\ \text{El tercero pagará} \rightarrow 3 \cdot 6 = 18\ € \end{cases}$$

Observa que en esta forma de abordar el problema se ha utilizado la constante de proporcionalidad (coste por día → 6 €).

Comprobación:

$$12 + 30 + 18 = 60 \qquad \frac{2}{12} = \frac{5}{30} = \frac{3}{18}$$

Problemas de repartos inversamente proporcionales (PI)

Para repartir una cantidad, C, en partes inversamente proporcionales a m, n, k, se reparte en partes directamente proporcionales a los inversos, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{k}$.

Ejemplo:

Una madre decide repartir entre sus tres hijos una paga extra de 70 € como premio por las buenas notas obtenidas. Pero les dice que cada uno recibirá una cantidad inversamente proporcional al número de días que olvidó hacer su cama:

Martín → 1 día   Laura → 2 días   Óscar → 4 días

¿Cuánto le tocará a cada uno?

Debemos repartir 70 en partes inversamente proporcionales a 1, 2 y 4.

Resolveremos el problema repartiendo 70 en partes directamente proporcionales a los **inversos** de esos números: 1, 1/2 y 1/4.

PROPORCIONALIDAD INVERSA

1	2	4
x	y	z

→

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1	1/2	1/4
x	y	z

Así, actuando como en el problema anterior:

$C = 70 \qquad S = 1 + 1/2 + 1/4 = 7/4$

$$p = C : S = 70 : 7/4 = 40 \begin{cases} \text{Martín} \to 40 \cdot 1 = 40 \\ \text{Laura} \to 40 \cdot 1/2 = 20 \\ \text{Óscar} \to 40 \cdot 1/4 = 10 \end{cases}$$

Solución: Martín recibirá 40 euros; Laura, 20, y Óscar, 10.

Comprobación:

$40 + 20 + 10 = 70 \qquad 1 \cdot 40 = 2 \cdot 20 = 4 \cdot 10$

Porcentajes

Para calcular un determinado tanto por ciento de una cantidad, se multiplica la cantidad por el tanto y se divide entre 100. $\Big\}$ $a\,\%$ de $C = \dfrac{C \cdot a}{100}$

Un porcentaje se puede calcular como la fracción de una cantidad. $\Big\}$ $a\,\%$ de $C = \dfrac{a}{100}$ de $C = \dfrac{C \cdot a}{100}$

Para calcular un porcentaje, se multiplica el total por el tanto por ciento expresado en forma decimal.

RECUERDA:

$a\,\%$ de $C = P$

$\Downarrow$

TOTAL		PARTE
100	$\longrightarrow$	a
C	$\longrightarrow$	P

$\Downarrow$

$$P = \frac{a \cdot C}{100}$$

$$C = \frac{P \cdot 100}{a}$$

$$a = \frac{P \cdot 100}{C}$$

Cálculo rápido de algunos porcentajes

El **50% es la mitad**
El **25% es la cuarta parte**
El **20% es la quinta parte**
El **10% es la décima parte**

$50\,\% \to \frac{1}{2}$ $\quad 25\,\% \to \frac{1}{4}$

$75\,\% \to \frac{3}{4}$ $\quad 20\,\% \to \frac{1}{5}$

$10\,\% \to \frac{1}{10}$ $\quad 5\,\% \to \frac{1}{20}$

Problemas con porcentajes.

Cálculo del total conocidos el tanto por ciento y la parte

Una empresa de limpieza tiene 63 empleados en el turno de noche, lo que supone el 35% de la plantilla. ¿Cuántos empleados componen el total de la plantilla?

TOTAL		PARTE
100	$\longrightarrow$	35
x	$\longrightarrow$	63

$$\left.\begin{matrix}100 \longrightarrow 35\\ x \longrightarrow 63\end{matrix}\right\} \frac{100}{x} = \frac{35}{63} \rightarrow x = \frac{63 \cdot 100}{35} = 180$$

Solución: La empresa tiene en total 180 trabajadores.

Teniendo en cuenta que la expresión decimal asociada al 35 % es $\frac{35}{100} = 0{,}35$, también podríamos haber resuelto el problema así:

El 35 % de una cantidad desconocida, x, es 63. Calculemos x:

$$35\,\% \text{ de } x = 63 \rightarrow 0{,}35 \cdot x = 63 \rightarrow x = 63 : 0{,}35 = 180$$

Cálculo del tanto por ciento, conocidos el total y la parte

De los 180 empleados que tiene una empresa de limpieza, 63 trabajan en el turno de noche. ¿Qué porcentaje trabaja de noche?

TOTAL		PARTE
180	$\longrightarrow$	63
100	$\longrightarrow$	x

$$\left.\begin{matrix}180 \longrightarrow 63\\ 100 \longrightarrow x\end{matrix}\right\} \frac{180}{100} = \frac{63}{x} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 63}{180} = 35$$

De cada 100 empleados, 35 trabajan de noche; es decir, el 35 %.

Solución: El 35 % de la plantilla está en el turno de noche.

Aumentos porcentuales

Aumentar una cantidad en un $\boldsymbol{a}$ % equivale a calcular en $(\mathbf{100} + \boldsymbol{a})$ % de dicha cantidad

Disminuciones porcentuales

Disminuir una cantidad en un $\boldsymbol{a}$ % equivale a calcular en $(\mathbf{100} - \boldsymbol{a})$ % de dicha cantidad

Problema de aumentos porcentuales

El aparcamiento del centro comercial, que tiene 180 plazas, se va a reformar aumentando su capacidad en un 20%. ¿De cuántas plazas dispondrá después de la obra?

- **Primera forma**

$$\boxed{\text{PLAZAS FINALES}} = \underbrace{\boxed{\text{PLAZAS INICIALES}}}_{180} + \underbrace{\boxed{\text{AUMENTO}}}_{20\,\%\text{ de }180}$$

AUMENTO → $20\,\%$ de $180 = \dfrac{180 \cdot 20}{100} = 36$ plazas

PLAZAS FINALES → $180 + 36 = 216$ plazas

Solución: Después de la reforma, el aparcamiento dispondrá de 216 plazas.

- **Segunda forma**

Un aumento del 20 % significa que cada 100 plazas se convierten en 120.

PLAZAS INICIALES		PLAZAS FINALES
100	⟶	120
180	⟶	x

$$\left.\begin{matrix}100 \to 120\\ 180 \to x\end{matrix}\right\} \frac{100}{180} = \frac{120}{x} \to x = \frac{180 \cdot 120}{100} = 216 \text{ plazas}$$

- **Forma rápida**

Observa que, en realidad, en el punto anterior hemos calculado el 120 % de 180, por lo que podíamos haber resuelto el problema así:

PLAZAS FINALES → $120\,\%$ de $180 = 180 \cdot 1{,}20 = 216$ plazas

Problema de disminuciones porcentuales

El trimestre pasado hubo en la provincia 620 accidentes de tráfico. Tras adoptar medidas, las autoridades esperan rebajar la siniestralidad al menos en un 15%. En ese caso, ¿cuál sería el máximo de accidentes en el trimestre actual?

- **Primera forma**

$$\boxed{\text{PREVISIÓN DE ACCIDENTES}} = \underbrace{\boxed{\text{ACCIDENTES TRIMESTRE ANTERIOR}}}_{620} - \underbrace{\boxed{\text{DISMINUCIÓN}}}_{15\,\%\text{ de }620}$$

DISMINUCIÓN DE ACCIDENTES → $15\,\%$ de $620 = \dfrac{620 \cdot 15}{100} = 93$ accidentes

PREVISIÓN PARA EL TRIMESTRE ACTUAL → $620 - 93 = 527$ accidentes

Solución: El máximo de accidentes previstos para el trimestre actual sería de 527.

- **Segunda forma**

Una disminución de accidentes del 15 % significa que cada 100 se quedan en 85.

ACCIDENTES ANTES		PREVISIÓN ACTUAL
100	⟶	85
620	⟶	x

$$\left.\begin{matrix}100 \to 85\\ 620 \to x\end{matrix}\right\} \frac{100}{620} = \frac{85}{x} \to x = \frac{620 \cdot 85}{100} = 527 \text{ accidentes}$$

- **Forma rápida**

Observa que, en realidad, los accidentes previstos son el 85 % de 620, por lo que podemos resolver el problema así:

ACCIDENTES PREVISTOS → $85\,\%$ de $620 = 620 \cdot 0{,}85 = 527$ accidentes

Interés bancario

Se llama **interés** al beneficio que produce el dinero prestado.
El tanto por ciento de beneficio anual se llama **rédito (r)**

Ejemplo: $\boldsymbol{r = 4\%} \rightarrow$ significa que 100€, en 1 año, producen un beneficio de 4€

Un capital, C, colocado al r % anual durante t años produce un beneficio I.

P. DIRECTA

P. DIRECTA

CAPITAL		TIEMPO		INTERÉS
100	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	r
C	$\longrightarrow$	t	$\longrightarrow$	I

$$\rightarrow \frac{100}{C} \cdot \frac{1}{t} = \frac{r}{I} \rightarrow I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Problema resuelto de interés bancario

Un banco ofrece un beneficio anual del 4 %. ¿Qué beneficio obtendremos si depositamos 750 € durante 3 años?

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

PROP. DIRECTA

CAPITAL		TIEMPO				BENEFICIO = INTERÉS
100 €	$\rightarrow$	en 1 año	$\rightarrow$	producen	$\rightarrow$	4 €
1 €	$\rightarrow$	en 1 año	$\rightarrow$	produce	$\rightarrow$	$\frac{4}{100}$ €
750 €	$\rightarrow$	en 1 año	$\rightarrow$	producen	$\rightarrow$	$\frac{750 \cdot 4}{100}$ €
750 €	$\rightarrow$	en 3 años	$\rightarrow$	producen	$\rightarrow$	$\frac{750 \cdot 4 \cdot 3}{100} = 90$ €

Resumiendo:

CAPITAL		TIEMPO		INTERÉS
100	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	4
750	$\rightarrow$	3	$\rightarrow$	I

$$\frac{100}{750} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{I} \rightarrow I = \frac{750 \cdot 4 \cdot 3}{100} = 90 \text{ €}$$

Solución: 750 € colocados al 4 % anual durante 3 años producen 90 €.