SOBRE

UNA TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA

POR

JUAN J. DURÁN-LÓRIGA

PUBLICADO EN LA «REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID». — TOMO VI. — NÚMERO 6, DICIEMBRE DE 1907.

MADRID
IMPRENTA DE LA GACETA DE MADRID
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1907

SOBRE UNA TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA

1. Consideremos la recta cuya ecuación en coordenadas basicéntricas es

$$(R)\ldots\ldots\ l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

y hallemos su polo respecto á la elipse imaginaria

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

que tiene por centro el baricentro del triángulo de referencia, obtendremos el punto

$$(M)\ldots\ldots\ \alpha : \beta : \gamma = l : m : n.$$

Si ahora transformamos el punto M por una inversión de Hirst, siendo la cónica de los puntos dobles la elipse de Steiner circunscripta, resultará el punto

$$(M')\ldots\ldots\ \alpha : \beta : \gamma = l^2 - mn : m^2 - ln : n^2 - lm,$$

dado por la intersección de las rectas

$$(GM)\,(^*)\ldots\ldots \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(*) Empleamos, para señalar los distintos puntos y rectas que se vayan presentando, la notación corriente en la *Moderna geometría del triángulo.*

y

$$l(\beta+\gamma)+m(\alpha+\gamma)+n(\alpha+\beta)=0$$

polar, esta última de M respecto á la elipse

$$\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta=0.$$

En nuestra transformación hacemos corresponder á la recta R el punto M' y recíprocamente.

La hemos dado la denominación de *Transformación por rectas isobáricas*, por la razón que vamos á exponer:

Volvamos á considerar la recta

$$(R)\ldots\ldots\ l\alpha+m\beta+n\gamma=0 \qquad (1)$$

y sus dos *isobáricas*

$$\left.\begin{array}{l}(R_1)\ldots\ldots\ m\alpha+n\beta+\ l\gamma=0\\(R_2)\ldots\ldots\ n\alpha+l\beta+m\gamma=0\end{array}\right\} \quad (2)$$

las rectas R_1 y R_2 se cortan en el punto

$$(P)\ldots\ldots\ \alpha:\beta:\gamma=l^2-mn:m^2-ln:n^2-lm,$$

es decir, el mismo punto M' anteriormente considerado. Resulta, pues, que hacemos corresponder á una recta el punto de intersección de sus dos isobáricas, y correlativamente á un punto, la recta que une sus dos isobáricos.

Aun se puede presentar la cuestión bajo otro aspecto. Observemos, en efecto, que dada la recta

$$(R)\ldots\ldots\ l\alpha+m\beta+n\gamma=0,$$

existen sobre ella sólo dos puntos isobáricos uno del otro (un punto y su primer isobárico), cuyas coordenadas se obtendrán resolviendo las ecuaciones

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$
$$n\alpha + l\beta + m\gamma = 0,$$

resultando

$$(M) \ldots\ldots \alpha : \beta : \gamma = m^2 - ln : n^2 - lm : l^2 - mn,$$
$$(M_1) \ldots\ldots \alpha : \beta : \gamma = n^2 - lm : l^2 - mn : m^2 - ln,$$

en esta transformación se hace corresponder á R el *segundo isobárico* de M, es decir,

$$(M_2) \ldots\ldots \alpha : \beta : \gamma = l^2 - mn : m^2 - ln : n^2 - lm.$$

Inversamente, dado un punto, sólo pasan por él dos rectas isobáricas una de otra (una recta y su primera isobárica), cuyas ecuaciones se obtienen por medio del sistema

$$\alpha_2 l + \beta_2 m + \gamma_2 n = 0,$$
$$\gamma_2 l + \alpha_2 m + \beta_2 n = 0,$$

resultando las rectas

$$(R) \ldots\ldots (\beta_2^2 - \alpha_2\gamma_2)\,\alpha + (\gamma_2^2 - \alpha_2\beta_2)\,\gamma + (\alpha_2^2 - \beta_2\gamma_2)\,\gamma = 0,$$
$$(R_1) \ldots\ldots (\gamma_2^2 - \alpha_2\beta_2)\,\alpha + (\alpha_2^2 - \beta_2\gamma_2)\,\gamma + (\beta_2^2 - \alpha_2\gamma_2)\,\gamma = 0.$$

La transformación hace corresponder al punto

$$M_2\,(\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2),$$

la *segunda isobárica* de R, es decir,

$$(\mathrm{R}_2) \ldots\ldots (\alpha_2^2 - \beta_2\gamma_2)\,\alpha + (\beta_2^2 - \alpha_2\gamma_2)\,\beta + (\gamma_2^2 - \alpha_2\beta_2)\,\gamma = 0.$$

Es evidente que á los lados del triángulo fundamental corresponden los vértices opuestos, y recíprocamente. A una recta, pasando por el baricentro, le corresponde este punto, puesto que sus isobáricas pasan también por él.

Puesto que la recta del infinito coincide con sus isobáricas, los puntos correspondientes están en el infinito.

2. Consideremos, en general, una curva cuya ecuación baricéntrica es

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

la condición para que la recta

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$$

le sea tangente, ó, en otros términos, la ecuación tangencial de la curva será de la forma

$$\varphi(u, v, w) = 0.$$

El punto correspondiente á la recta es

$$\alpha : \beta : \gamma = u^2 = vw : v^2 - uw : w^2 - uv,$$

y eliminando los parámetros u, v, w entre estas últimas ecuaciones y la $\varphi(u, v, w) = 0$, se tendrá el lugar geométrico de los puntos correspondientes á las tangentes de $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, es decir, la transformada de la curva propuesta; para hacer esta eliminación, basta observar que, siendo u, v, w proporcionales respectivamente á $\alpha^2 - \beta\gamma$, $\beta^2 - \alpha\gamma$, $\gamma^2 - \alpha\beta$, resta substituir sus valores en la $\varphi = 0$, obteniéndose para la transformada

$$\varphi(\alpha^2 - \beta\gamma, \beta^2 - \alpha\gamma, \gamma^2 - \alpha\beta) = 0.$$

Si la curva dada es de la clase n, resultará una ecuación del grado $2n$, pero podrá rebajarse; así, por ejemplo, si la curva toca la recta del infinito, como á esta recta corresponden puntos en el infinito, la ecuación de la transformada contendrá el factor $\alpha + \beta + \gamma$, análogamente aparecerán las correspondientes á las tangentes imaginarias, si existen, trazadas desde el baricentro.

Podemos proceder inversamente, es decir, en lugar de obtener la curva transformada como lugar de puntos, considerarla como envolvente de rectas.

Sea la curva dada

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

la recta correspondiente al punto (α, β, γ), tiene por coordenadas tangenciales

$$u : v : w = \alpha^2 - \beta e : \beta^2 - \alpha\gamma : \gamma^2 - \alpha\beta,$$

y eliminando α, β, γ, tendremos la ecuación

$$f(u^2 - vw, v^2 - uw, w^2 - uv) = 0,$$

que será, en coordenadas tangenciales, la transformada de

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

3. Supongamos que la recta (1) pase por un punto fijo, $M_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, y vamos á encontrar el lugar geométrico del punto correspondiente; ó, en otros términos, tratemos de encontrar la línea transformada de un haz de rectas de vértice M_1, tendremos:

$$l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1 = 0,$$

y eliminando l, m, n, entre ésta y las (2), resulta

$$\alpha_1\alpha_2^2 + \beta_1\beta_2^2 + \gamma_1\gamma_2^2 - \alpha_1\beta\gamma - \beta_1\alpha\gamma - \gamma_1\alpha\beta = 0 \quad (3)$$

que representa una elipse, puesto que

$$\Delta_1 = -\frac{3}{4}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)^2 < 0,$$

degenerando en dos rectas imaginarias, pasando por el baricentro cuando el vértice del haz coincide con dicho punto.

Si el punto fijo está en el infinito, el lugar correspondiente se descompone en una recta, pasando por el baricentro y la recta del infinito.

Las cónicas representadas por la ecuación (3) pasan por el centro de gravedad del triángulo y tienen sus centros sobre la recta que une M_1 con su complementario. Además, los ejes de estas cónicas son paralelos, y si pasa su determinación, se aplica el método dado por el Sr. Lemoine *(Nouvelles Annales*, Septiembre, 1901), el punto del círculo circunscripto que resulta es el punto de Steiner.

La polar de M_1, respecto á las cónicas, es la recta correspondiente al punto en la transformación considerada.

Si en particular, M_1 es el punto K (punto de Lemoine), la elipse correspondiente tiene por eje mayor el segmento GH_0, siendo la tangente en G la transversal recíproca del eje de homología de ABC y del segundo triángulo de Brocard $A_2\,B_2\,C_2$, y, por consiguiente, paralela á la recta de Longchamps.

El eje menor tiene por ecuación,

$$[3(a^4-b^2c^2)+q^4-n^4]\alpha+[3(b^4-a^2c^2)+q^4-n^4]\beta+$$
$$+[3(c^4-a^2b^2)+q^4-n^4]\gamma=0,$$

en la que q y n tienen la significación habitual. Es, pues, paralelo á la *transversal recíproca* del eje de homología de ABC, y su primer triángulo de Brocard.

La polar de K, respecto á la cónica, es la transversal recíproca del eje de homología de ABC y del primer triángulo de Brocard $A_1\,B_1\,C_1$; es, pues, paralela á su eje menor como podía preverse, puesto que K está sobre su eje mayor.

Si el vértice del haz es el pie de una mediana, por ejemplo, M_1 (0, 1, 1), resulta para la ecuación de la transformada,

$$\beta^2+\gamma^2-\alpha(\beta+\gamma)=0,$$

que se ve fácilmente representa la elipse de Steiner inscripta en el triángulo formado por las intermedianas $A'C'$, $A'B'$ y la paralela ó BC trazada por A.

Finalmente, si M_1 coincide con el vértice A, resulta

$$\alpha^2 - \beta\gamma = 0,$$

que representa la elipse de Steiner circunscripta al triángulo BCA_1, simétrico del propuesto respecto al punto medio de BC.

La consideración de nuevos puntos, nos llevaría seguramente á resultados interesantes.

La ecuación (3) no puede representar un círculo más que en el caso particular de ser equilátero el triángulo de referencia.

Hemos encontrado para la elipse correspondiente al punto $M_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ la ecuación

$$\alpha_1\alpha^2 + \beta_1\beta^2 + \gamma_1\gamma^2 - \alpha_1\beta\gamma - \beta_1\alpha\gamma - \gamma_1\alpha\beta = 0. \quad (3)$$

Ahora bien; si $L_1 = 0$ es la ecuación de la recta correspondiente al punto, y $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, las de sus isobáricas, se la puede dar á la (3) la forma

$$L_1^2 - L_2 L_3 = 0;$$

de donde resulta que la cónica (3) juega respecto al triángulo formado por M_1, y sus dos isobáricos, el mismo papel que la cónica $\alpha^2 - \beta\gamma = 0$ respecto al triángulo fundamental. Este hecho, que podía preverse, permitiría determinar con facilidad, geométricamente, sus elementos.

4. Consideremos ahora, inversamente, en lugar de varias rectas en haz, varios puntos en línea recta, ó en otros términos, vamos á encontrar la transformada de la recta que tiene por ecuación

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0. \quad (1)$$

Se ve *à priori* que la transformada es una cónica.

En efecto, cuando el punto M_1 recorre la recta (1), el punto M' que tiene por coordenadas

$$\alpha : \beta : \gamma = (\alpha_1{}^2 - \beta_1 \gamma_1) : (\beta_1{}^2 - \alpha_1 \gamma_1) : (\gamma_1{}^2 - \alpha_1 \beta_1),$$

describe la cónica

$$\Sigma l \alpha^2 - \Sigma l \beta\gamma = 0,$$

y, por consiguiente, la recta

$$\Sigma(\alpha_1{}^2 - \beta_1 \gamma_1)\alpha = 0,$$

polar de M' respecto á la elipse imaginaria

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

envolver á otra cónica.

Vamos á encontrar su ecuación: bastará eliminar los parámetros $\frac{\alpha_1}{\gamma_1}$ y $\frac{\beta_1}{\gamma_1}$, que representaremos por a y b entre las ecuaciones

$$f = (a^2 - b)\alpha + (b^2 - a)\beta + (1 - ab)\gamma = 0,$$
$$\varphi = la + mb + n = 0,$$

y la ecuación

$$\frac{f'a}{\varphi'a} = \frac{f'b}{\varphi'b},$$

y se obtiene fácilmente

$$(p^2 - qr)\alpha + (q^2 - pr)\beta + (r^2 - pq)\gamma = 0,$$

habiendo hecho

$$p = -lm\alpha + (m^2 - 2ln)\beta - mn\gamma,$$
$$q = (l^2 - 2mn)\alpha - lm\beta - ln\gamma,$$
$$r = 2m^2\alpha + 2l^2\beta + 2lm\gamma.$$

La ecuación que hemos obtenido es de tercer grado; pero se ve fácilmente que se descompone en las siguientes:

$$m^2\alpha + l^2\beta + lm\gamma = 0,$$

$$(4mn - l^2)\alpha^2 + (4ln - m^2)\beta^2 + (4lm - n^2)\gamma^2 +$$
$$+ 2(2l^2 + mn)\beta\gamma + 2(2m^2 + ln)\alpha\gamma + 2(2n^2 + lm)\alpha\beta = 0.$$

La segunda de las cuales representa una parábola, cuya ecuación puede escribirse así:

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma)^2 - 4(m\alpha + n\beta + l\gamma)(n\alpha + l\beta + m\gamma) = 0, \quad (2)$$

ó bien,

$$L_1{}^2 - 4L_2L_3 = 0.$$

Representando por $L_1 = 0$ la recta dada, y $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ sus isobáricas. La (2) demuestra que la parábola toca las rectas L_2 y L_3 sobre la L_1. Las coordenadas de los puntos de contacto son

$$(L_1L_2) - - \alpha : \beta : \gamma = n^2 - lm : l^2 - mn : m^2 - ln$$
$$(L_1L_3) - - \alpha : \beta : \gamma = m^2 - ln : n^2 - lm : l^2 - mn,$$

puntos isobáricos del correspondiente á L_1.

Resulta, pues, que (2) es una parábola de Artz del triángulo formado por L_1 y sus isobáricas, triángulo que es triplemente homológico del propuesto y con el mismo baricentro: si lo representamos por $A_1\,B_1\,C_1$, se ve fácilmente que la dicha parábola toca la recta que une los puntos medios b_1 y c_1 de $A_1\,C_1$ y $A_1\,B_1$, que la dirección conjugada ó $B_1\,C_1$ es la mediana $A_1\,a_1$; ésta es, pues, la dirección del eje. El foco es el punto de intersección de la recta $A_1\,K_1$ (siendo K_1 el punto de Lemoine del nuevo triángulo) con el círculo circunscripto al triángulo $A_1\,b_1\,c_1$.

Para la expresión analítica de los elementos de la parábola, hemos encontrado

EJE

$$[(P-Q)(2m^2+ln)+(R-P)(2n^2+lm)+(Q-R)(4mn-l^2)]\alpha,$$
$$+[(Q-R)(2n^2+lm)+(P-Q)(2l^2+mn)+(R-P)(4ln-m^2)]\beta,$$
$$+[(R-P)(2l^2+mn)+(Q-R)(2m^2+ln)+(P-Q)(4lm-n^2)]\gamma=0.$$

DIRECTRIZ

$$P\alpha+Q\beta+R\gamma=0.$$

COORDENADAS DEL FOCO

$$\alpha:\beta:\gamma=2lP-nQ-mR:2mQ-lR-nP:2nR-mP-lQ,$$

en cuyas fórmulas se ha puesto

$$P=mc^2+nb^2-lbc\cos A,$$
$$Q=na^2+lc^2-mac\cos B,$$
$$R=lb^2+ma^2-nab\cos C.$$

5. Consideremos ahora el caso particular en que $m=n=0$, es decir, cuando la recta considerada es el lado BC del triángulo fundamental; entonces se obtiene la parábola de Artz $\alpha^2-4\beta\gamma=0$, y análogamente para los otros dos lados $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, $\gamma^2-4\alpha\beta=0$.

Podemos, pues, decir que *si un triángulo inscripto en el de referencia tiene por vértices tres puntos isobáricos, la envolvente de los lados de estos triángulos está formada por las tres parábolas de Artz del primer grupo.*

Resulta, por consiguiente, que las parábolas de Artz son un caso particular de las que hemos obtenido en la ecuación (2), y que su existencia es debida á la propiedad de que goza el triángulo fundamental de ser un *triángulo isobárico;* llamamos así á todo triángulo en el que se verifica que los vértices son puntos isobáricos (un punto y sus dos isobáricos), como sucede en el triángulo $L_1 L_2 L_3$ que antes hemos considerado, y más generalmente á los que sirven de fundamento á la transformación que estamos estudiando.

La consideración de lo que pudiéramos llamar *isobaritismo*, nos lleva á hacer algunas reflexiones. Si recorremos los elementos punto, recta y curva (en partículas cónicas) que figuran en la geometría del triángulo, y nos referimos particularmente á coordenadas baricéntricas (pues en otro sistema se modificarían los elementos isobáricos), observamos que unos gozan de isobaritismo absoluto, es decir, que una transformación isobárica los deja invariables, citaremos entre los puntos el centro de gravedad, único que goza de esta propiedad, y que origina que una *transformación recíproca, complementaria, brocardiana*, etc., los deja invariables; entre las rectas, citaremos la *recta del infinito* ($\alpha + \beta + \gamma = 0$), y entre las cónicas, *la elipse de Steiner circunscripta*

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0\right).$$

En la expresión analítica de estos elementos no pueden entrar de ningún modo los del triángulo, y son de formas absolutamente simétricas. Otros elementos gozan de un *isobaritismo relativo;* tampoco figuran en su expresión los elementos del triángulo, pero dejan de ser simétricos respecto á las tres coordenadas, y una transformación isobárica, si bien los altera, los deja en la misma *posición relativa* en el triángulo. Tal sucede, por ejemplo, con las medianas; así, si se considera la relativa al lado BC, que tiene por ecuación

$$\beta - \gamma = 0,$$

que se puede también escribir

$$0\,\alpha + \beta - \gamma = 0;$$

una transformación isobárica le convierte en

$$0\beta + \gamma - \alpha = 0; \quad \text{es decir,} \quad \alpha - \gamma = 0;$$

esto es, *también la mediana*, pero relativa al lado AC.—Por último, hay elementos que, siendo función de los lados del triángulo, una transformación isobárica puede cambiarlos completamente; así, por ejemplo, si sometemos á esta transformación al círculo circunscripto que tiene por ecuación

$$a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0,$$

se obtiene una línea completamente distinta; pero no siempre ocurre esto; así, por ejemplo, si á la *interbisectriz* que que tiene por ecuación

$$-\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0,$$

se la somete á dos transformaciones isobáricas, resultan las otras dos.

6. Dadas, en general, dos rectas, sólo se pueden encontrar en ellas dos puntos (uno sobre cada recta) que sean isobáricos uno de otro (un punto y su primer isobárico); pero si las rectas son isobáricas, entonces á cada punto de una de las rectas corresponde en la otra su isobárico. Las parábolas de Artz, *generalizadas*, que antes hemos considerado, se han obtenido, en suma, por la siguiente generación. Dadas dos rectas isobáricas, la envolvente de las rectas que unen pares de puntos isobáricos elegidos uno en cada una de ellas, es una parábola representada por la ecuación (2). *En particular, si las dos rectas isobáricas son dos lados del triángulo de referencia, se obtienen dos parábolas de Artz.*

Este resultado se explica fácilmente; pues las dichas rectas de unión dividen los lados del triángulo en partes proporcionales, que es cabalmente la generación por la cual llegó su autor á determinarlas.

7. Si consideramos una recta,

$$L = l\alpha + m\beta + n\gamma,$$

y sus dos isobáricas L' y L'', puesto que la ecuación de una cónica circunscripta al triángulo $L\,L'\,L''$ es

$$p\,L\,L' + q\,L\,L'' + r\,L'\,L'' = 0,$$

resulta para la elipse de Steiner, circunscripta á dicho triángulo,

$$\Sigma\, l\, m\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + (\Sigma\, l^2 + \Sigma\, l m)\,(\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta) = 0.$$

Si $l m + m n + l n = 0$, es decir, si el polo baricéntrico de L está sobre la elipse de Steiner, circunscripta al triángulo fundamental, la anterior ecuación se reduce á

$$\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta = 0;$$

de modo que la elipse de Steiner circunscripta al triángulo de las isobáricas $L\,L'\,L''$ coincide con la elipse del triángulo fundamental. Podemos, pues, decir *que cuando el polo baricéntrico de una recta cae sobre la elipse de Steiner, circunscripta, el triángulo formado por ella y sus isobáricas queda inscripto en dicha elipse.*

Por otra parte, se ve fácilmente que, si el polo baricéntrico cumple la anterior condición, la envolvente de la recta correspondiente es la elipse de Steiner inscripta; resulta, por consiguiente, que si una recta toca la elipse de Steiner inscripta, el triángulo formado por ellas y sus isobáricas apoya sus vértices en la de Steiner circunscrita. Es, por otra parte, evidente que cuando una recta satisface la circunstancia anterior, lo mismo sucede con sus isobáricas, puesto que siendo los polos baricéntricos puntos isobáricos, todos estarán en la elipse circunscriptas al estar uno de ellos. Se tienen, pues, ∞^1 triángulos inscriptos en una de las elipses (la circunscripta) y circunscriptas á la otra

8. Vamos, para terminar, á hacer aplicación del procedimiento general que hemos dado en el párrafo 2, á algunos ejemplos.

Sea la parábola de Artz, $\alpha^2 - 4\beta\gamma = 0$, la línea cuya transformada deseamos obtener. Su ecuación tangencial es $u^2 - vw = 0$, y substituyendo en ésta, según hemos dicho, en lugar de u, v, w, respectivamente, los binomios $\alpha^2 - \beta\gamma$, $\beta^2 - \alpha\gamma$, $\gamma^2 - \alpha\beta$, resulta para la curva correspondiente la ecuación

$$\alpha^2(\alpha^2 - 3\beta\gamma) + \alpha(\alpha^3 + \beta^3) = 0$$

que se descompone en las tres siguientes:

$$\alpha = 0, \ \alpha + \beta + \gamma = 0, \ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \alpha\gamma - \alpha\beta = 0,$$

las dos últimas representan la recta del infinito, y el par de tangentes imaginarias conducidas desde el baricentro á la parábola dada; la primera $\alpha = 0$, esto es, el lado BC del triángulo de referencia, es la del lugar que se busca conforme con lo anteriormente dicho.

Consideremos ahora la curva $\alpha^2 - \beta\gamma = 0$ que, según sabemos, es la elipse de Steiner circunscripta al triángulo BCA_1, simétrico del propuesto respecto al punto medio de BC. Su ecuación tangencial es $u^2 - 4vw = 0$, y la línea correspondiente,

$$\alpha^2(\alpha^2 - 6\beta\gamma) + 4\alpha(\beta^3 + \gamma^3) - 3\beta^2\gamma^2 = 0 \qquad (1)$$

que siendo unicursal pueden expresarse sus diversos puntos en función racional de un parámetro.

Observemos con este objeto, que si en la ecuación tangencial hacemos $u = m$, $v = n$, resulta $w = \frac{m^2}{4n}$; tenemos, pues, $u = 4mn$, $v = 4n^2$, $w = m^2$. Las rectas que corresponden á los puntos de la curva (1), son, pues,

$$4mn\alpha + 4n^2\beta + m^2\gamma = 0,$$

y tales puntos tienen por coordenadas,

$$\alpha : \beta : \gamma = 12m^2n^2 : 16n^4 - 4m^3n : m^4 - 16mn^3,$$

ó haciendo $m : n = p$, resulta:

$$\alpha : \beta : \gamma = 12p^2 : 16 - 4p^3 : p^4 - 16p.$$

Mas, generalmente, á las cónicas $\alpha^2 - k\beta\gamma = 0$, corresponden las curvas que tienen por ecuación

$$\alpha^2 \left[k\alpha^2 - 2(k+2)\beta\gamma \right] + 4\alpha(\beta^3 + \gamma^3) + (k-4)\beta^2\gamma^2 = 0,$$

obtenida mediante la ecuación tangencial,

$$Ku^2 - 4vw = 0$$

y la representación paramétrica, es:

$$\alpha : \beta : \gamma = p^2(4 - k) : (1 - 2kp^3) : k^2p^4 - 2p.$$

Sea, como tercer ejemplo, la recta que tiene por ecuación

$$\beta + \gamma = 0,$$

es, decir, la paralela á BC, trazada por A.

Poniendo en lugar de β y γ, respectivamente, $v^2 - uw$ y $w^2 - uv$, resulta para ecuación tangencial de la transformada

$$v^2 + w^2 - uw - uv = 0,$$

ó en coordenadas puntuales,

$$4\alpha(\alpha+\beta+\gamma)-(\beta-\gamma)^2=0,$$

que representa evidentemente una parábola tangente al lado BC en el pie de la mediana.

A la mediana BC corresponde una envolvente degenerada de la segunda clase, formada del baricentro y del punto del infinito de BC.

Si el punto describe una cónica,

$$l\beta\gamma+m\alpha\gamma+n\alpha\beta=0$$

circunscripta al triángulo fundamental, la curva correspondiente tendrá por ecuación tangencial:

$$F(u_1 v_1 w)=\Sigma\, l v^2 w^2-\Sigma\, lu(v^3+w^3)+uvw\,\Sigma\, lw=0,$$

evidentemente inscripta en el triángulo de referencia.

Se tendrá la ecuación puntual eliminando u, v, u, entre las ecuaciones

$$F'_u : F'_v : F'_w=\alpha:\beta\,\gamma$$

y la

$$u\alpha+v\beta+w\gamma=0.$$

En particular, para la elipse de Steiner circunscripta, resulta la incripta del mismo geómetra.